УДК 534.111 *Асист. М.Б. Сокіл, канд. техн. наук – НУ "Львівська політехніка"*

ЗГИННІ КОЛИВАННЯ ГНУЧКИХ ЕЛЕМЕНТІВ СИСТЕМ ПРИВОДІВ І СТРУКТУРА РОЗВ'ЯЗКУ ЇХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Запропоновано методику дослідження згинних коливань гнучких елементів систем приводу з урахуванням їх поздовжньої швидкості руху. В її основу покладено узагальнення принципу Д'Аламбера на нові класи динамічних систем.

Ключові слова: згинні коливання, амплітуда, частота, принцип Д'Аламбера.

Актуальність і огляд основних результатів. Дослідження динамічних процесів у гнучких пружних середовищах, які характеризуються поздовжнім рухом, в останні десятиліття набуло нового імпульсу розвитку [1-5] у зв'язку зі зростанням швидкостей різноманітних технологічних процесів і широким використанням гнучких елементів приводів у різних галузях народного господарства. У більшості випадків розглядали процеси у гнучких елементах за найпростіших математичних моделей: одновимірних чи двовимірних за певних обмежень щодо кінематичних параметрів руху [3], природи діючих сил [4-6] та ін. Ті чи інші обмеження щодо швидкості руху, фізико-механічних властивостей чи крайових умов рухомого середовища та побудова на їх базі математичних моделей пов'язані з можливістю застосування аналітичних методів для дослідження відповідних диференціальних рівнянь. Однак спрощені моделі не завжди адекватні динамічному процесу. Так, нехтування поздовжнім рухом чи навіть геометричними параметрами гнучкого середовища істотно впливає на основні характеристики динамічного процесу [7], зокрема частоту поздовжніх чи поперечних коливань; лінеаризація математичної моделі – не дає змоги пояснити цілу низку особливостей при проходженні системи через резонанс [4]. Нижче, розвиваючи основну ідею роботи [7], зроблено спробу вирішити деякі питання з наявних проблем, а саме: оцінити вплив швидкості поздовжнього руху та параметрів жорсткості гнучких елементів на основні характеристики динамічного процесу лінійної математичної моделі процесу за дещо " нестрогих" крайових умов.

Постановка задачі і методика її розв'язування. Математичною моделлю згинних коливань одновимірного гнучкого однорідного пружного середовища, яке рухається вздовж своєї недеформованої геометричної осі зі сталою швидкістю V у змінних Ейлера [8], є диференціальне рівняння [6, 9]

$$u_{tt} + 2Vu_{xt} - (\alpha^2 - V^2)u_{xx} + \beta^2 u_{xxxx} = 0, \qquad (1)$$

де: $u(x,t)$ – переміщення перерізу середовища з координатою x у довільний момент часу t у напрямку, перпендикулярному до недеформованої його осі; α, β – сталі, які виражаються через фізико-механічні параметри середовища: $\alpha^2 = T/\rho$ (T – статична сила натягу, ρ – погонна маса); $\beta^2 = EI/\rho$ (E – модуль пружності, I – момент інерції поперечного перерізу відносно недеформованої осі). Для рівняння (1) будемо розглядати крайові умови

$$u(x,t)\big|_{x=j} = 0, \qquad (2\text{ а}) \quad \text{чи} \quad u_x(x,t)\big|_{x=j} = 0,\ j = 0, l, \qquad (2\text{ б})$$

які відповідають безвідривному контакту гнучкого елементу із повідним і та веденим шківами (крайові умови (2)), чи сходження та входження його з останніх вздовж горизонтальних дотичних.

Отже, метою роботи є знаходження структури розв'язку рівняння (1) за крайових умов (2 а) чи (2 б) та отримання аналітичних залежностей, які дають змогу оцінити вплив кінематичних та фізико-механічних параметрів на динаміку процесу. Легко переконатись, що застосувати відомі класичні методи Фур'є чи Д'Аламбера для побудови розв'язку рівняння (1) не вдається. Тому узагальнюючи основну ідею роботи [7] на розглядувані задачі, їх розв'язок будемо шукати у вигляді накладання прямої та відбитої хвиль різних довжин, але однакових частот. Треба зауважити, вказане є чи не одним із можливих шляхів описання динамічного процесу систем, які характеризуються постійною складовою швидкості поздовжнього руху. Тобто, якщо пряма і відбита хвилі в однорідних ідеально пружних середовищах скінченої довжини із нерухомими кінцями мають однакові довжини, то дещо інші явища спостерігаються у середовищах, які характеризуються поздовжнім рухом. Навіть стала швидкість руху середовища приводить до зміни довжини відбитої хвилі порівняно з прямою, а за значних її величин може бути явище самозахоплення, навіть зрив коливань. Таким чином, для розглядуваного класу динамічних систем пропонуємо враховувати вплив поздовжнього руху гнучких елементів шляхом представлення одночастотного розв'язку рівняння (1) у вигляді

$$u(x,t) = C_1\cos(\kappa x + \omega t + \varphi) + C_2\cos(\chi x - \omega t + \psi), \qquad (3)$$

де: φ, ψ – початкові фази прямої і відбитої хвиль, κ, χ, ω – їх хвильові числа та частота, C_1, C_2 – сталі (амплітуда прямої та відбитої хвиль). Представлення (3) буде задовольняти диференціальне рівняння (1), якщо хвильові числа прямої та відбитої хвиль зв'язані із їх частотою дисперсійними співвідношеннями:

$$\omega^2 - (\alpha^2 - V^2)\kappa^2 - \beta^2\kappa^4 + 2V\kappa\omega = 0,\ \omega^2 - (\alpha^2 - V^2)\chi^2 - \beta^2\chi^4 - 2V\chi\omega = 0. \qquad (4)$$

Наведене дисперсійне співвідношення визначає зв'язок між хвильовими числами вказаних хвиль та їх частотою у вигляді

$$\omega = 0{,}5(\kappa - \chi)V^{-1}\left(\beta^2(\chi^2 + \kappa^2) + \alpha^2 - V^2\right). \qquad (5)$$

Одночасно із (3) та крайових умов (2) випливає

$$C_1\cos(\omega t + \varphi) + C_2\cos(-\omega t + \psi) = 0,\ C_1\cos(\kappa l + \omega t + \varphi) + C_2\cos(\chi l - \omega t + \psi) = 0. \qquad (6)$$

Наведені системи тригонометричних рівнянь будуть виконуватись для довільного значення параметра t, якщо невідомі величини φ, ψ, κ, χ зв'язані співвідношеннями $\kappa + \chi = 2k\pi / l$, $C_1 = -C_2 = a$ та $\varphi = -\phi$. У сукупності наведене та дисперсійні співвідношення визначають основні параметри хвиль. Поступаючи подібним чином, які для крайових умов (2), для випадку крайових умов (3) маємо: $C_1 = (\chi/\kappa)C_2 = a$, $\varphi = -\phi$, $\kappa + \chi = 2k\pi / l$, а із урахуванням лінійності розглядуваних математичних моделей – можна записати також і співвідношення, які визначають багаточастотний процес у середовищі.

Нижче на рис. 1, а та рис. 1, б представлені залежності від швидкості гнучких елементів частоти коливань та хвильових чисел за різних значень згинної жорсткості.

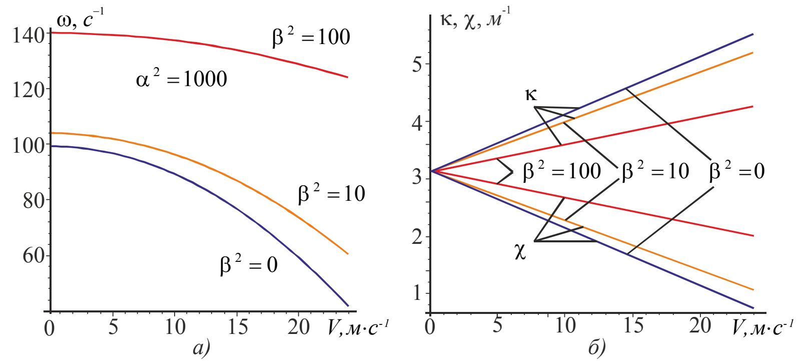

Рис. 1. Залежності від швидкості частот та хвильових чисел за різних жорсткостей

Висновки. Отримані аналітичні та представлені на їх основі графічні залежності показують: 1). Не тільки швидкість поздовжнього руху, але й згинна жорсткість гнучких елементів істотно впливають на частоту їх власних коливань, причому із збільшенням останньої частота власних коливань зростає; 2). За швидкості поздовжнього руху $V=\sqrt{\alpha^2-\left(\kappa^2+\chi^2\right)}$ проходить зрив згинних коливань гнучких елементів, а за швидкостей поздовжнього руху, для яких $\chi<0$, відбувається самозахоплення відбитої хвилі; 3). Основні ідеї наведеного вище слугуватимуть базою для подальших досліджень динамічних процесів у гнучких елементах систем приводів.

Література

1. Chen L-Q Analysis and Control of Transverse Vibrations of Axially Moving Strings / Chen L-Q // Appl. Mech. Rev., March 2005. – Vol. 58.2. – P. 91-116.

2. Lixin Z. Dynamic analysis of viscoelastic serpentine belt drive systems / Zhang Lixin. – Kanada : Department of Mechanical and Industrial Engineering University of Toronto, 1999. – 349 p.

3. Сокіл Б.І. Періодичні Ateb-функції у дослідженні коливань сильно нелінійних рухомих середовищ / Б.І. Сокіл, Х.І. Ліщинська // Науковий вісник НЛТУ України : зб. наук.-техн. праць. – Львів : РВВ НЛТУ України. – 2005. – Вип. 15.4. – С. 96-101. 3.

4. Харченко Є.В. Вимушені коливання рухомих середовищ і асимптотичний метод у їх дослідженні / Є.В Харченко, М.Б. Сокіл // Науковий вісник НЛТУ України : зб. наук.-техн. праць. – Львів : РВВ НЛТУ України. – 2006. – Вип. 16.1. – С. 134-139.

5. Сокіл М.Б. Нелінійні моделі рухомих середовищ і аналітичні методи дослідження їх коливних процесів / М.Б. Сокіл // Вісник Хмельницького національного університету : наук. журнал. – Сер.: Економічні науки. – Хмельницький. – 2006. – № 3. – С. 62-65.

6. Калиняк М.І. Вільні поперечні коливання одного класу систем з урахуванням недосконалої пружності матеріалу / М.І. Калиняк, А.Ф. Барвінський // Доповіді АН УРСР, 1977. – № 5. – С. 435-439.

7. Мартинців М.П. Одне узагальнення методу Д'аламбера для систем, які характеризуються поздовжнім рухом / М.П. Мартинців, М.Б. Сокіл // Науковий вісник УкрДЛТУ : зб. наук.-техн. праць. – Львів : Вид-во УкрДЛТУ. – 2003. – Вип. 13.4. – С. 64-67.

8. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М. : Главная редакция физ.-мат. л-ры, 1972. – С. 27-28.

9. Барвінський А.Ф. Поперечні коливання рухомого стержня з врахуванням недосконалої пружності матеріалу / А.Ф. Барвінський // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". – Сер.: Математика і механіка. – Львів : Вид-во НУ "Львівська політехніка", 1975. – № 106. – С. 9-13.

Сокил М.Б. **Изгибные колебания гибких элементов систем привода и структура решения их математической модели**

Предложена методика исследования изгибных колебаний гибких элементов систем привода с учетом продольной скорости их движения. В ее основу положено обобщение принципа Д'Аламбера на новые классы динамических систем.

Ключевые слова: изгибные колебания, амплитуда, частота, принцип Д'Аламбера.

Sokil M.B. **Bending oscillations of flexible elements of systems of the drive and structure of the solution of their mathematical model**

It is offered a technique of research of bending oscillations of flexible elements of systems of a drive taking into account longitudinal speed of their motion. In its basis generalisation principle D'Alembert on new classes of dynamic systems is necessary.

Keywords: bending fluctuations, amplitude, frequency, the D'Alamber's principle.