УДК 539.3 Проф. М.М. Стадник, д-р техн. наук – НЛТУ України, м. Львів

ТОНКЕ ТЕПЛОПРОВІДНЕ ВКЛЮЧЕННЯ У ПРУЖНОМУ ПРОСТОРІ ЗА ДІЇ НА БЕЗМЕЖНОСТІ ТЕПЛОВОГО ПОТОКУ

Одержано точний розв'язок системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь, до якої зведена термопружна задача для тіла з теплопровідним пружним тонким включенням. Вважали, що на безмежності тіла діє однорідний тепловий потік, перпендикулярний до серединної площини включення. Внаслідок виписані формули для обчислення концентрації напружень біля включення та напружень у ньому, а також відповідних коефіцієнтів інтенсивності напружень K_{II} і K_{III}. Проаналізовано вплив конфігурації включення на концентрацію та інтенсивність напружень для деяких часткових випадків задачі.

Ключові слова: система інтегро-диференціальних рівнянь, теплопровідне пружне включення, тепловий потік.

Базовими параметрами для оцінки міцності та довговічності тіл з пружними включеннями за дії температурного поля є коефіцієнти концентрації та інтенсивності напружень для відповідних термопружних задач. Термопружні задачі для жорсткого пластинчастого еліптичного включення, коли на його поверхні підтримується постійна температура або на безмежності тіло знаходиться під дією рівномірного теплового потоку, напрямок якого паралельний чи перпендикулярний до площини включення, досліджено і встановлено КІН K_I **[1-3]**. Нижче розв'язано термопружну задачу і знайдено концентрацію напружень і відповідні КІН K_{II} і K_{III} для теплопровідного пружного тонкого включення у тілі за дії теплового потоку на безмежності, напрямок якого перпендикулярний до серединної площини включення.

Постановка задачі і її розв'язок. Розглянемо тривимірне ізотропне тіло, у якому виберемо систему прямокутних декартових координат $Oxyz$. У тілі розміщено пружне ($0 \le \varepsilon = G_1/G < \infty$, G_1, G – модулі зсуву включення та матриці відповідно) тонке включення, обмежене поверхнею $z = \pm h = \pm c\sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}$ ($\max h << d$; $\rho << d$; d – найменше значення діаметра серединної площини включення S; ρ – радіус заокруглення його вершини).

На безмежності на тіло діє тепловий потік інтенсивності $q = const$, напрямок якого є перпендикулярним до серединної S площини включення $z = 0$. Вважають, що на поверхні з'єднання матриця-включення є ідеальний механічний і тепловий контакти. Задача полягає у визначенні термічних напружень у включенні та у матриці біля нього. Користуючись відомим результатом **[4]**, зведемо її до розв'язку такої системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь

$$\frac{2+\varepsilon d_3}{4\pi\varepsilon d_1}\Delta\iint_S\left[\tilde{u}_{\lambda_i}\right]_* R^{-1}d\xi d\eta + \frac{2\mu+\varepsilon d_3}{4\pi\varepsilon d_1}\frac{\partial}{\partial\lambda_{3-i}}\iint_S\left(\left[\tilde{u}_{\lambda_{3-i}}\right]_*\frac{\partial R^{-1}}{\partial\lambda_i} - \left[\tilde{u}_{\lambda_i}\right]_*\frac{\partial R^{-1}}{\partial\lambda_{3-i}}\right)d\xi d\eta +$$

$$+\frac{\varepsilon\kappa-2d_3}{8\pi G_1 d_1}\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\iint_S\frac{\left[\tilde{\sigma}_{zz}\right]_*}{R}d\xi d\eta - \frac{\left[\tilde{u}_{\lambda_i}\right]_*}{h} = \frac{\alpha d_2(2-\varepsilon)}{4\pi\varepsilon d_1}\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\iint_S\frac{\left[\tilde{T}\right]_*}{R}d\xi d\eta +$$

$$+\frac{\partial\left(u_z^0\right)_*}{\partial\lambda_i} + \frac{\left[u_{\lambda_i}^0\right]_*}{h} - \frac{\left(\sigma_{z\lambda_i}^0\right)_*}{G_1};$$

$$-\frac{\kappa}{8\pi d_1 G}\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\iint_S\frac{\left[\tilde{\sigma}_{zz}\right]_*}{R}d\xi d\eta - \frac{d_3}{4\pi d_1}\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\iint_S\left(\left[\tilde{u}_{\lambda_i}\right]_*\frac{\partial R^{-1}}{\partial\lambda_i} + \left[\tilde{u}_{\lambda_{3-i}}\right]_*\frac{\partial R^{-1}}{\partial\lambda_{3-i}}\right)d\xi d\eta +$$

$$+\frac{\left[\tilde{u}_{\lambda_i}\right]_*}{h} + \frac{1}{G_1 h}\int_{-a_i}^{\lambda_i}\left[\tilde{\sigma}_{zz}^{(\lambda_i)}\right]_* d\lambda_i = \frac{\alpha d_2}{4\pi d_1}\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\iint_S\frac{\left[\tilde{T}\right]_*}{R}d\xi d\eta - \qquad (1)$$

$$-\frac{\partial\left(u_z^0\right)_*}{\partial\lambda_i} - \frac{\left[u_{\lambda_i}^o\right]_*}{h} - \frac{1}{G_1 h}\int_{-a_i}^{\lambda_i}\left[\sigma_{zz}^{o(\lambda_i)}\right]_* d\lambda_i + A_3^{(i)}\left(\lambda_i\right),$$

$$(x,y)\in S;\ z=0;\ i=1,2;\ \lambda_1=x;\ \lambda_2=y;\ a_1=a;\ a_2=b$$

відносно стрибків вектора збурених переміщень $\left[\vec{\tilde{u}}\right]_*$ та тензора напружень $\left[\hat{\tilde{\sigma}}\right]_*$ для тріщини, на берегах якої $z = \pm 0$ діють напруження, знесені із поверхонь пружного включення $z = \pm h$.

Тут S – еліптична область $x^2/a^2 + y^2/b^2 \le 1$; $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$; $(A)_*, [A]_*$ – відповідно сума і різниця величини A на поверхнях включення $\pm h$; $R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$; $A_3^{(i)}(\lambda_i)$ – довільні функції, які підлягають визначенню; $T = T_0 + \tilde{T}$; $T_0 = qz/\lambda_0$ – температура у суцільному тілі **[5]**; λ_0 – коефіцієнт теплопровідності матриці; α – коефіцієнт теплового розширення матриці; $\tilde{T}$ – збурене температурне поле у тілі; $d_1 = 1-\mu; d_2 = 1+\mu$; $d_3 = 1-2\mu$; $\kappa = 3-4\mu$; μ – коефіцієнт Пуассона матриці; $\vec{u}^0$, $\hat{\sigma}^0$ – відповідно вектор зміщень і тензор напружень у суцільному тілі; $\vec{u} = \vec{\tilde{u}} + \vec{u}^0; \hat{\sigma} = \hat{\tilde{\sigma}} + \hat{\sigma}^0$.

Стрибок температури $\left[\tilde{T}\right]_*$ визначаємо із рівняння, яке з врахуванням гармонічності та лінійної залежності температури $\tilde{T}$ від висоти включення набуває вигляду **[4]**:

$$-\frac{2\pi\lambda_b}{h\lambda_0}\left[\tilde{T}\right]_* + \Delta\iint_S\frac{\left[\tilde{T}\right]_* d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = -\frac{4\pi q_1}{\lambda_0};\ q_1 = q\left(1 - \frac{\lambda_b}{\lambda_0}\right), \qquad (2)$$

тобто

$$\left[\tilde{T}\right]_* = 2q_1 b\sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}\,/\left(\lambda_0 E(k) + \lambda_b\lambda\right);\ k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}. \qquad (3)$$

Тут λ_b – коефіцієнт теплопровідності включення; $\lambda = b/c$; $E(k) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}\,d\theta$.

Розв'язок рівнянь (1) подамо у вигляді:

$$\left[\tilde{u}_x\right]_* = C_1 x\sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2};\ \left[\tilde{u}_y\right]_* = C_2 y\sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2};$$

$$\left[\tilde{\sigma}_{zz}^{(x)}\right]_* = C_3\frac{\partial}{\partial x}\left(x\sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}\right); \qquad (4)$$

$$\left[\tilde{\sigma}_{zz}^{(y)}\right]_* = C_4\frac{\partial}{\partial y}\left(y\sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}\right);\ \left[\tilde{\sigma}_{zz}\right]_* = \left[\tilde{\sigma}_{zz}^{(x)}\right] + \left[\tilde{\sigma}_{zz}^{(y)}\right],$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – невідомі сталі величини.

Підставивши вирази (4) у рівняння (1), отримуємо формули:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{\Delta_1}\left[\left(\frac{N_1F_5(k)}{b}+\frac{3bF_3(k)}{a^2\varepsilon}+\frac{1}{c}+\frac{N_2Q_8}{b\Delta_0}\right)\left(\frac{b^2F_1(k)R_2}{a^2}-\frac{N_2bR_3Q_6}{a^2\Delta_0}\right)-\right.\\
&\left.-\left(\frac{N_2bQ_5}{a^2\Delta_0}+\frac{N_3bF_3(k)}{a^2}\right)\left(F_2(k)R_2-\frac{N_2R_3Q_9}{b\Delta_0}\right)\right];\\
C_2 &= \frac{1}{\Delta_1}\left[\left(\frac{N_1bF_4(k)}{a^2}+\frac{3F_3(k)}{b\varepsilon}+\frac{1}{c}+\frac{N_2bQ_4}{a^2\Delta_0}\right)\left(F_2(k)R_2-\frac{N_2R_3Q_9}{b\Delta_0}\right)-\right.\\
&\left.-\left(\frac{N_2Q_7}{b\Delta_0}+\frac{N_3F_3(k)}{b}\right)\left(\frac{b^2F_1(k)R_2}{a^2}-\frac{N_2bR_3Q_6}{a^2\Delta_0}\right)\right];\\
C_3 &= \frac{1}{G\Delta_0}\left[C_1\left(\left(\frac{3bF_4(k)}{a^2d_1}+\frac{3F_3(k)}{b}\right)\left(\frac{3d_3F_5(k)}{2d_1b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{9d_3\mu}{2d_1^2a^2}F_3^2(k)\right)+\right.\\
&+\frac{3bF_3(k)}{a^2d_1}C_2\left(\frac{\mu}{c}-\frac{3d_3F_5(k)}{2b}-\frac{3bd_3F_3(k)}{2a^2}\right)+\\
&\left.+R_3\left(\frac{3d_3b}{2d_1a^2}\left(F_2(k)F_3(k)-F_1(k)F_5(k)\right)-\frac{b^2F_1(k)}{a^2c}\right)\right];\\
C_4 &= \frac{1}{G\Delta_0}\left[\frac{3F_3(k)}{bd_1}C_1\left(\frac{\mu}{c}-\frac{3d_3bF_4(k)}{2a^2}-\frac{3d_3F_3(k)}{2b}\right)+\right.\\
&+C_2\left(\left(\frac{3F_5(k)}{bd_1}+\frac{3bF_3(k)}{a^2}\right)\left(\frac{3bd_3F_4(k)}{2d_1a^2}+\frac{1}{c}\right)-\frac{9d_3\mu}{2d_1^2a^2}F_3^2(k)\right)+\\
&\left.+R_3\left(\frac{3d_3b}{2d_1a^2}\left(F_1(k)F_3(k)-F_2(k)F_4(k)\right)-\frac{F_2(k)}{c}\right)\right]
\end{aligned}\tag{5}$$

для обчислення C_1, C_2, C_3, C_4.

Тут

$$N_1=\frac{3(2+\varepsilon d_3)}{2\varepsilon d_1};\ N_2=\frac{3(\varepsilon\kappa-2d_3)}{4G\varepsilon d_1};\ N_3=\frac{3(2\mu+\varepsilon d_3)}{2\varepsilon d_1};\ F_3(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}d\theta;$$

$$F_4(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4\theta d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}};\ F_5(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^4\theta d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}};\ R_2=\frac{\alpha d_2q_1(2-\varepsilon)}{\varepsilon d_1\left(\lambda_0E(k)+\lambda_b\lambda\right)};$$

$$R_3=\frac{2\alpha d_2q_1}{d_1\left(\lambda_0E(k)+\lambda_b\lambda\right)};$$

$$\Delta_0=\frac{1}{G^2}\left[\left(\frac{3bd_3}{2d_1a^2}F_4(k)+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{3d_3}{2d_1b}F_5(k)+\frac{1}{c}\right)-\left(\frac{3d_3}{2d_1a}F_3(k)\right)^2\right];$$

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \left(\frac{bN_1F_4(k)}{a^2}+\frac{3F_3(k)}{b\varepsilon}+\frac{1}{c}+\frac{bN_2Q_4}{a^2\Delta_0}\right)\left(\frac{N_1F_5(k)}{b}+\frac{3bF_3(k)}{a^2\varepsilon}+\frac{1}{c}+\frac{N_2Q_8}{b\Delta_0}\right)-\\
&-\left(\frac{N_3F_3(k)}{b}+\frac{N_2Q_7}{b\Delta_0}\right)\left(\frac{bN_3F_3(k)}{a^2}+\frac{bN_2Q_5}{a^2\Delta_0}\right);\\
Q_4 &= \frac{1}{Gc}\left(F_4(k)\left(\frac{3b}{a^2d_1}F_4(k)+\frac{3}{b}F_3(k)\right)+\frac{3\mu}{d_1b}F_3^2(k)\right)+\\
&+\frac{3d_3}{2Gd_1b}\left(\frac{3b}{a^2d_1}F_4(k)+\frac{3}{b}F_3(k)\right)\left(F_4(k)F_5(k)-F_3^2(k)\right);\\
Q_5 &= \frac{1}{Gc}\left(\frac{3b\mu}{a^2d_1}F_3(k)F_4(k)+\frac{3F_5(k)F_3(k)}{d_1b}+\frac{3b}{a^2}F_3^2(k)\right)+\\
&+\frac{9d_3\mu}{2Gd_1^2a^2}F_3(k)\left(F_4(k)F_5(k)-F_3^2(k)\right);\\
Q_6 &= -\frac{1}{Gc}\left(\frac{b^2}{a^2}F_1(k)F_4(k)+F_2(k)F_3(k)\right)+\frac{3bd_3}{2Gd_1a^2}F_1(k)\left(F_3^2(k)-F_4(k)F_5(k)\right);\\
&F_1(k)=F_4(k)+F_3(k);\quad F_2(k)=F_5(k)+F_3(k);\\
Q_7 &= \frac{1}{Gc}\left(\frac{3\mu}{d_1b}F_3(k)F_5(k)+\frac{3b}{a^2d_1}F_3(k)F_4(k)+\frac{3}{b}F_3^2(k)\right)+\\
&+\frac{9\mu d_3}{2Gd_1^2a^2}F_3(k)\left(F_4(k)F_5(k)-F_3^2(k)\right);\\
Q_8 &= \frac{1}{Gc}\left(F_5(k)\left(\frac{3}{d_1b}F_5(k)+\frac{3b}{a^2}F_3(k)\right)+\frac{3b\mu}{a^2d_1}F_3^2(k)\right)+\\
&+\frac{3bd_3}{2Gd_1a^2}\left(\frac{3}{d_1b}F_5(k)+\frac{3b}{a^2}F_3(k)\right)\left(F_4(k)F_5(k)-F_3^2(k)\right);\\
Q_9 &= -\frac{1}{Gc}\left(\frac{b^2}{a^2}F_1(k)F_3(k)+F_2(k)F_5(k)\right)+\frac{3bd_3}{2Gd_1a^2}F_2(k)\left(F_3^2(k)-F_4(k)F_5(k)\right);\\
&A_3^{(1)}(x)=A_3^{(2)}(y)=0.
\end{aligned}\tag{6}$$

Перейшовши у співвідношеннях (5) до границі $\varepsilon\to 0$ або $\varepsilon\to\infty$, одержимо відповідно результати для випадків еліпсоїдальних теплопровідної порожнини або теплопровідного абсолютно жорсткого включення. Якщо у (5) перейти спочатку до границі $\varepsilon\to 0$, а потім $c\to 0$ і покласти $\lambda_b=0$, то одержимо відомий [6] розв'язок для еліптичної теплоізольованої тріщини. Очевидно, що коли матеріали матриці і включення одинакові ($\varepsilon=1; \lambda_b=\lambda_0$), то із виразів (5) матимемо, що $C_1=C_2=C_3=C_4=0$.

На основі результатів праці [4] та виразів (4), (5) для визначення нормальних і дотичних напружень на поверхні з'єднання матриці-включення $\pm h$ одержимо співвідношення:

$$\left[\tilde{\sigma}_{zz}\right]_* = \left(C_3 + C_4\right)\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \left(\frac{C_3 x^2}{a^2} + \frac{C_4 y^2}{b^2}\right) / \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}; \quad (7)$$

$$\sigma_{zx} = \frac{3x}{2d_1 b}\left[\frac{d_3 b^2}{2a^2}\left(C_3 F_4(k) + C_4 F_3(k)\right) - GC_1\left(\frac{b^2}{a^2}F_4(k) + d_1 F_3(k)\right) - \frac{\mu G b^2 C_2}{a^2}F_3(k) + \right.$$

$$\left. + \frac{2\alpha d_2 b^3 G q_1}{3a^2\left(\lambda_0 E(k) + \lambda_b \lambda\right)}F_1(k)\right];$$

$$\sigma_{zy} = \frac{3y}{2d_1 b}\left[\frac{d_3}{2}\left(C_3 F_3(k) + C_4 F_5(k)\right) - GC_2\left(F_5(k) + \frac{b^2 d_1}{a^2}F_3(k)\right) - \mu G C_1 F_3(k) + \right.$$

$$\left. + \frac{2\alpha d_2 b G q_1}{3\left(\lambda_0 E(k) + \lambda_b \lambda\right)}F_2(k)\right], \quad (x, y) \in S.$$

Встановлено, що найбільшого значення напруження σ_{zx} і σ_{zy} досягають на контурі області S, тобто відшарування включення від матриці (якщо воно відбувається) починається з його вершини, а у центрі включення дорівнюють нулю.

Користуючись рухомою локальною прямокутною системою координат $O_1 ntz$ з початком на контурі області S, матимемо асимптотичні подання для стрибків зміщень та напружень у малому околі межі еліпса

$$\left[\tilde{u}_x\right]_* = C_1\sqrt{-2f(\varphi)na/b}\ \cos\varphi + O(n); \quad \left[\tilde{u}_y\right]_* = C_2\sqrt{-2f(\varphi)nb/a}\ \sin\varphi + O(n);$$

$$\left[\tilde{\sigma}_{zz}\right]_* = \left(C_3 + C_4\right)\sqrt{-2nf(\varphi)/(ab)} - \left(C_3\cos^2\varphi + C_4\sin^2\varphi\right)\sqrt{-ab/\left(2nf(\varphi)\right)} + O(n), \quad (8)$$

де нехтуємо доданками порядку $O(n)$, $f(\varphi) = \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$, $O_1 n$ – зовнішня нормаль до контуру області S; φ – кут, що визначає параметричні координати точок еліпса ($x^2/y^2 + y^2/b^2 = 1$; $|n| << a, b$).

Формули переходу для зміщень і напружень у системі координат $O_1 ntz$ матимуть вигляд:

$$\left[\tilde{u}_n\right]_* = \left[\tilde{u}_x\right]_*\cos\theta + \left[\tilde{u}_y\right]_*\sin\theta; \quad \left[\tilde{u}_t\right]_* = -\left[\tilde{u}_x\right]_*\sin\theta + \left[\tilde{u}_y\right]_*\cos\theta; \quad (9)$$

$$\left[\tilde{\sigma}_{zz}^{(n)}\right]_* = \left[\tilde{\sigma}_{zz}\right]_*\cos(\theta - \varphi); \quad \left[\tilde{\sigma}_{zz}^{(t)}\right]_* = \left[\tilde{\sigma}_{zz}\right]_*\sin(\varphi - \theta),$$

де: $\left[\tilde{\sigma}_{zz}^{(n)}\right]_*$ і $\left[\tilde{\sigma}_{zz}^{(t)}\right]_*$ – напруження, вектори згинних моментів яких перпендикулярні відповідно до площин $t = 0$ і $n = 0$; θ – кут між додатними напрямками осей Ox і $O_1 n$; $\cos\theta = b\cos\varphi / f(\varphi)$; $\sin\theta = a\sin\varphi / f(\varphi)$.

На основі виразів (8), (9) одержимо

$$\left[\tilde{u}_n\right]_* = \left(C_1\cos^2\varphi + C_2\sin^2\varphi\right)\sqrt{-2nab/f(\varphi)} + O(n);$$

$$\left[\tilde{u}_t\right]_* = \left(-C_1 a^2 + C_2 b^2\right)\sin 2\varphi\sqrt{-n/\left(2abf(\varphi)\right)} + O(n);$$

$$\left[\tilde{\sigma}_{zz}^{(n)}\right]_* = \left(b\cos^2\varphi + a\sin^2\varphi\right)\left[\left(C_3 + C_4\right)\sqrt{-2n/\left(abf(\varphi)\right)} - \right.$$

$$\left. - \left(C_3\cos^2\varphi + C_4\sin^2\varphi\right)\sqrt{-ab/\left(2nf^3(\varphi)\right)}\right] + O(n); \quad (10)$$

$$\left[\tilde{\sigma}_{zz}^{(t)}\right]_* = (b - a)\sin 2\varphi\left[\left(C_3 + C_4\right)\sqrt{-2n/\left(abf(\varphi)\right)} - \right.$$

$$\left. - \left(C_3\cos^2\varphi + C_4\sin^2\varphi\right)\sqrt{-ab/\left(2nf^3(\varphi)\right)}\right] / 2 + O(n).$$

Користуючись поданнями (10) і результатами праці **[4]**, матимемо формули:

$$K_{II}(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi ab}}{2d_1\sqrt{f(\varphi)}}\left[G\left(C_1\cos^2\varphi + C_2\sin^2\varphi\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{d_3}{2f(\varphi)}\left(b\cos^2\varphi + a\sin^2\varphi\right)\left(C_3\cos^2\varphi + C_4\sin^2\varphi\right)\right]; \quad (11)$$

$$K_{III}(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi ab}}{4\sqrt{f(\varphi)}}\sin 2\varphi\left[G\left(-C_1\frac{a}{b} + C_2\frac{b}{a}\right) - \frac{d_3(b - a)}{2f(\varphi)d_1}\left(C_3\cos^2\varphi + C_4\sin^2\varphi\right)\right]$$

щоб обчислити КІН $K_{II}(\lambda)$ і $K_{III}(\lambda)$ для еліптичної тріщини, на берегах $z = \pm 0$ якої діють напруження, знесені із поверхонь $z = \pm h$ пружного теплопровідного еліпсоїдального включення. Очевидно, що для сфероїдального ($a = b$) включення $K_{III}(\lambda) = 0$ для будь-якого значення φ. Якщо у формулах (11) перейти спочатку до границі $c \to 0$, то тоді, як це випливає із виразів (5), $\lim\limits_{c \to 0} K_{II}(\lambda) = K_{II} = 0$; $\lim\limits_{c \to 0} K_{III}(\lambda) = K_{III} = 0$ для пружного включення, де K_{II} і K_{III} – загальноприйняті позначення КІН.

Якщо у виразах (11) перейти спочатку до границі $\varepsilon \to 0$, то одержимо формули для обчислення КІН $K_{II}(\lambda)$ і $K_{III}(\lambda)$ у випадку еліптичної тріщини, на берегах $z = \pm 0$ якої діють напруження, знесені із поверхонь $z = \pm h$ еліпсоїдальної теплопровідної порожнини. Перейшовши у поданнях (11) послідовно до границі $\varepsilon \to 0$, $c \to 0$ і поклавши $\lambda_b = 0$, одержимо відомі **[6]** формули для обчислення КІН K_{II} і K_{III} у випадку термоізольованої еліптичної тріщини.

Якщо у виразах (11) перейти спочатку до границі $\varepsilon \to \infty$, то одержимо подання для обчислення $K_{II}(\lambda)$ і $K_{III}(\lambda)$ у випадку еліптичної тріщини, на поверхнях $z = \pm 0$ якої діють напруження, знесені з поверхонь $z = \pm h$ еліпсоїдального абсолютно жорсткого теплопровідного включення. Для пластинчастого ($c \to 0$) абсолютно жорсткого ($\varepsilon \to \infty$) термоізольованого ($\lambda_b = 0$) чи теплопровідного ($\lambda_b \neq 0$) включення величини $K_{II} = K_{III} = 0$, що випливає із виразів (5), (11).

Для визначення концентрації напружень σ_{zn} і σ_{zt} у матриці в околі включення використаємо співвідношення **[4]**:

$$\sigma_{zn} = 2nK_{II}(\lambda) / \sqrt{\pi(\rho + 2n)^3} + \tilde{\sigma}_{zn}(0)\rho\sqrt{\rho} / (\rho + 2n)^{3/2};$$

$$\sigma_{zt} = K_{III}(\lambda)/\sqrt{\pi(\rho+2n)}\,,\ \rho = bf(\varphi)/(a\lambda^2), \tag{12}$$

де $\tilde{\sigma}_{zn}(0)$ – збурені дотичні напруження на контурі області S.

Дослідження першої формули (12) на екстремум показує, що найбільшого значення σ_{zn} досягають для $n = \rho\left(2K_{II}(\lambda) - 3\tilde{\sigma}_{zn}(0)\sqrt{\pi\rho}\right)/\left(2K_{II}(\lambda)\right)$, яке залежить від пружних та геометричних параметрів включення. У конкретному випадку, за необхідності, це значення n можна завжди обчислити, використовуючи вирази (7), (11). Вважаючи, що у поданнях (12) $n = 0$, $\rho > 0$, на основі (7), (11) і умови рівності контактних напружень на контурі області S, одержимо формули:

$$\sigma_{zn} = \frac{3a}{2d_1 f(\varphi)}\left\{\left[\frac{d_3 b^2}{2a^2}\left(C_3F_4(k) + C_4F_3(k)\right) - C_1G\left(\frac{b^2}{a^2}F_4(k) + d_1F_3(k)\right) - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{\mu G b^2 C_2}{a^2}F_3(k) + \frac{2\alpha d_2 b^3 G q_1 F_1(k)}{3a^2\left(\lambda_0 E(k) + \lambda_b\lambda\right)}\right]\cos^2\varphi + \left[\frac{d_3}{2}\left(C_3F_3(k) + C_4F_5(k)\right) - \right.$$
$$\left.\left. - C_2\,G\left(F_5(k) + \frac{b^2 d_1}{a^2}F_3(k)\right) - \mu G C_1 F_3(k) + \frac{2\alpha d_2 b G q_1 F_2(k)}{3\left(\lambda_0 E(k) + \lambda_b\lambda\right)}\right]\sin^2\varphi\right\};$$

$$\sigma_{zt} = \frac{ab\sin 2\varphi}{4cf(\varphi)}\left[G\left(-\frac{a}{b}C_1 + \frac{b}{a}C_2\right) - \frac{d_3(b-a)}{2f(\varphi)d_1}\left(C_3\cos^2\varphi + C_4\sin^2\varphi\right)\right], \tag{13}$$

які служать для обчислення величини напружень у матриці на контурі S біля пружного еліпсоїдального включення. Для сфероїдального ($a = b$) включення ($C_1 = C_2$, $C_3 = C_4$) формули (13) значно спрощуються і набувають вигляду

$$\sigma_{zn} = \frac{3\pi}{16d_1}\left(d_3C_3 - 2C_1G + \frac{8\alpha d_2 a q_1 G}{3\left(\lambda_0\pi + 2\lambda_b\lambda\right)}\right),\ \sigma_{zt} = 0\,. \tag{14}$$

Підставляючи у вирази (13) величини C_1, C_2, C_3, C_4 відповідно для $\varepsilon = 0$ або $\varepsilon \to \infty$, матимемо відповідні подання для обчислення напружень σ_{zn} і σ_{zt} у матриці біля еліпсоїдальної порожнини або еліпсоїдального абсолютно жорсткого включення.

Якщо для визначення контактних напружень ($n = 0$) на контурі області S, коли $c \ll a, b$, використати відоме [7] подання $\tilde{\sigma}_{zn}(0) = K_{II}(\lambda)/\sqrt{\pi\rho}$, що не забезпечує їх рівності, то на основі виразів (12) при $n = 0$ матимемо

$$\sigma_{zn} = K_{II}(\lambda)/\sqrt{\pi\rho}\,, \tag{15}$$

де $K_{II}(\lambda)$ подається виразом (11).

Підставляючи C_1, C_2, C_3, C_4 із співвідношень (5) при $\varepsilon \to 0$, $c \to 0$, $\lambda_b = 0$ у формулу (15) і спрямовуючи $\rho \to 0$, одержимо, що $\sigma_{zn} \to \infty$, тобто матимемо результат для тріщини. Якщо у виразах (7), (11), (13) перейти до границі $a \to \infty$, то за відповідних значень кута φ матимемо подання для тунельного еліптичного пружного теплопровідного включення, тобто розв'язок плоскої і антиплоскої задач.

Література

1. Подильчук Ю.Н. О термонапряженном состоянии трансверсально-изотропного тела с жестким эллиптическим включением / Ю.Н. Подильчук, В.В. Добривечер // Прикладна механика. – 1996. – № 1. – С. 11-17.

2. Подильчук Ю.Н. О термонапряженном состоянии трансверсально-изотропного тела с жестким эллиптическим включением, подверженном действию равномерного теплового потока в плоскости включения / Ю.Н. Подильчук, В.В. Добривечер // Прикладна механика. – 1996. – № 8. – С. 31-39.

3. Пассос Моргадо А.Х. Распределение напряжений в бесконечном трансверсально-изотропном теле с жестким эллиптическим включением в равномерном тепловом потоке / Пассос А.Х. Моргадо, Я. Пивник, Ю.Н. Подильчук // Прикладна механика. – 1995. – № 11. – С. 3-10.

4. Стадник М.М. Метод розв'язування тривимірних термопружних задач для тіл з тонкими включеннями / М.М. Стадник // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1994. – № 6. – С. 30-40.

5. Партон В.З. Механика упругопластического разрушения / В.З. Партон, Е.М. Морозов. – М. : Изд-во "Наука", 1985. – 503 с.

6. Стадник М.М. Еліптична тріщина у просторі під дією теплового потоку на безмежності / М.М. Стадник // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2010. – № 3. – С. 38-41.

7. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения / Г.П. Черепанов. – М. : Изд-во "Наука", 1974. – 640 с.

***Стадник М.М.* Упругое тонкое теплопроводящее включение в пространстве при действии теплового потока на бесконечности**

Получено точное решение системы сингулярных интегро-диференциальных уравнений, к которой сведена трехмерная термоупругая задача для тела с теплопроводящим упругим тонким включением. Считается, что на бесконечности тела действует однородный тепловой поток, перпендикулярный к срединной плоскости включения. В результате выписаны формулы для вычисления концентрации напряжений возле включения и напряжений в нем, а также соответствующих коэффициентов интенсивности напряжений K_{II} и K_{III}. Проанализировано влияние конфигурации включения на концентрацию и интенсивность напряжений для некоторых частных случаев задачи.

***Stadnyk M.M.* Elastic thin heat-conducting inclusion in a space under the action of a heat flux applied at infinity**

The exact solution of system singular integro-differentional equations, to which three-dimensional thermoelastic problem for body with thermal conductive elastic thin inclusion is reduced, has been obtained. It is consider, that homogenous heat flow, which is perpendicular to middle plane of the inclusion, acts on the infinity of body. As results, formulae for evaluation of concentrations of stresses near inclusion and stresses in it and corresponding stress intensity factors K_{II} and K_{III} have been written. The influence of configuration of inclusion on concentration and intensity of stresses has been analyzed for some partial cases of problem.

УДК 629.113.001

Проф. Є.В. Харченко, д-р техн. наук;
здобувач Т.Ю. Підгайний – НУ "Львівська політехніка"

ВИЗНАЧЕННЯ НИЖЧИХ ВЛАСНИХ ЧАСТОТ КОЛИВАНЬ КУЗОВА АВТОБУСА ЛАЗ-А152 ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИМ ШЛЯХОМ

Експериментально визначено нижчі власні частоти коливань кузова автобуса ЛАЗ-А152. Описано методику експерименту та вимірювальну апаратуру. Результати експерименту порівняно з результатами, отриманими теоретичним шляхом. Підтверджено адекватність запропонованих теоретичних методів. Запропоновано рекомендації щодо практичного застосування теоретичних методів.

Ключові слова: власні частоти, коливання, кузов, автобус.