

$$\omega^2 \alpha = -\frac{3}{4} \delta a^2 - k \gamma^2 \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2 \beta^2 + a^{-1} H (\omega^2 - \mu^2)^{-1} \sqrt{\omega^2 \beta^2 + \left( \omega^2 \alpha + \frac{3}{4} \delta a^2 + k \gamma^2 + \gamma \right)^2}}. \quad (15)$$

Вона є базовою для побудови зон стійкості розв'язку рівняння (13). Без особливих труднощів наведену методику можна перенести і на випадок полігармонічного збурення. Для нього, відповідно до принципу одночастотності коливань у нелінійних системах, домінуючий вплив будуть мати гармоніки, частота котрих є близькою до частоти власних коливань або пов'язана із нею раціонально залежністю.

**Висновки:** а) із зростанням швидкості руху гусеничного обводу ширина резонансної зони збільшується; б) величина коефіцієнта нелінійної складової відновлювальної сили впливає на кут нахилу резонансних кривих до осі  $\alpha$ ; в) коефіцієнт параметричного збурення  $\gamma$  впливає на ширину резонансної зони подібно, як і швидкість позовжнього руху гнучкого елемента: із збільшенням коефіцієнта  $\gamma$  її ширина зростає.

### Література

1. Li-Qun Cheng. Analysis and Control of Transverse Vibrations of Axially Moving Strings / Cheng Li-Qun // Applied Mechanics Reviews. – 2005. – Vol. 58. – P. 91-116.
2. Wei Zhang. Vibration control of an axially moving string system: Wave cancellation method / Zhang Wei, Cheng Li-Qun // Applied Mathematics and Computation. – 2006. – № 175. – P. 851-863.
3. Pellicano F. Complex dynamics of high-speed axially moving systems / F. Pellicano // Journal of Sound and Vibration. – 2002. – № 258(1). – P. 31-44.
4. Кузьо І.В. Динамічні процеси у середовищах, які характеризуються позовжнім рухом, та вплив крайових умов на амплітуду і частоту їх коливань / І.В. Кузьо, Є.В.Харченко, М.Б. Сокіл // Вібрації в техніці і технологіях. – 2007. – № 3 (48). – С. 53-56.
5. Мартинців М.П. Одне узагальнення методу Д'Аламбера для систем, які характеризуються позовжнім рухом / М.П. Мартинців, М.Б. Сокіл // Науковий вісник НЛТУ України : зб. наук.-техн. праць. – Львів : РВВ НЛТУ України. – 2003. – Вип. 13.4. – С. 64-67.
6. Белман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений / Р. Беллман. – М. : Изд-во "Иностранная лит-ра", 1954. – 216 с.
7. Назар І.І. Метод Ван-дер-Поля у дослідженні періодичних збурень рухомих однорічних систем / І.І. Назар, Б.І. Сокіл // Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні. – Львів, 2006. – № 560. – С. 71-75.

### *Верхола І.І., Сенюк А.П., Чаган Ю.А.* Аналіз устойчивости нелінійних коливань гусеничного обвода

Исследовано вплив зміни сили натяження, швидкості продольного руху на устійність коливань продольно-подвижного гусеничного обвода. Получены соотношения, которые определяют зоны их устойчивости (неустойчивости) и проведен анализ влияния скорости продольного движения на их конфигурацию.

**Ключевые слова:** гусеничный обвод, гибкий элемент, зоны устойчивости, амплитуда колебаний.

### *Verhola I.I., Senyuk A.P., Chagan Yu.A.* Buckling analysis of nonlinear oscillations of caterpillar outline

Effect of replaceable force of tension, speed of longitudinal motion on stability of oscillations of longitudinal-mobile caterpillar outline is probed. It is received ratio which determine zones of their stability (instability) and the analysis of effect of speed of longitudinal motion on their configuration is carried out.

**Keywords:** caterpillar outline, flexible element, stability zones, oscillation frequency.

УДК 539.2:532.6 *Мат. І-ої кат. Т.В. Голубець – Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я.С. Підстригача НАН України*

### ВИЗНАЧЕННЯ РІВНОВАЖНОГО ЗВОЛОЖЕННЯ ТА ВЛАСНОЇ ПРОНИКНОСТІ ПОРИСТОГО МАТЕРІАЛУ НА ОСНОВІ ІЗОТЕРМ СОРБЦІЇ АБО КРИВИХ ЗАТРИМКИ ВОЛОГИ

У рамках формалізму об'ємного усереднення переглянуто основні співвідношення фізики поверхні для пористого зволоженого матеріалу. Сформульовано умови рівноваги між рідиною і газом у пористому матеріалі. Означено функцію розподілу розміру пор за радіусом. Відповідно до експериментальних даних, розраховано залежність відносних проникностей рідини та газу у пористому матеріалі від ступеня насичення пор рідиною. З допомогою порівняльного аналізу напівемпіричних моделей зволоження запропоновано метод визначення власної проникності твердої фази та рівноважного зволоження у пористому матеріалі.

**Ключові слова:** пористі матеріали, адсорбція, капілярні явища, дифузія рідин та газів.

**Вступ.** У зв'язку з математичним моделюванням тепломасообмінних процесів у пористих зволжених середовищах виникає необхідність адекватного опису дифузійних явищ, природа яких залежить від структури матеріалу та властивостей його складових або компонент. У теорії осушування такі дифузійні явища описуються системою балансових рівнянь тепла і маси у частинних похідних з відповідними граничними умовами, які визначають характер перебігу процесів у внутрішніх областях пористого зволоженого матеріалу. На цей час розвиваються два протилежні підходи до опису процесів тепломасообміну у пористих матеріалах на основі моделей осушування – феноменологічний Ликова [1] та теоретичний Вайтекера [2]. Згідно з феноменологічним підходом [1], коефіцієнти дифузії у балансових рівняннях тепла і маси приймаються постійними величинами, тому виникає науковий інтерес у розрахунку таких коефіцієнтів залежно від структури пористого матеріалу та вагового вмісту складових (компонент). Приклад визначення таких коефіцієнтів наведено у роботі [3] згідно з комірковою моделлю для матеріалу деревини. Оскільки відтворення структурних властивостей пористого матеріалу є окремою науковою проблемою, яка розв'язується методами теорії перколяції [4] детерміністичної або стохастичної геометрії [5], для розрахунку тепломасообмінних процесів оптимальною з точки зору прикладного застосування є теорія осушування Вайтекера [2], яка базується на методах теорії просторового (об'ємного) усереднення. Визначальні рівняння теорії осушування Вайтекера [2] містять пов'язані між собою згідно з законами збереження маси, імпульсу та енергії просторово усереднені величини та конститутивні рівняння, які описують властивості пористого зволоженого матеріалу. До складу цих рівнянь входять ефективні або усереднені характеристики пористого зволоженого середовища, за допомогою яких останнє можна розглядати як неперервний матеріальний континуум.

У рамках теорії просторового усереднення у роботі [6] записано рівняння електродинаміки, за допомогою яких на основі порівняльного аналізу різних моделей композитних матеріалів запропоновано методику розрахунку ефективної комплексної діелектричної проникності пористого зволоженого середовища. Показано, що така ефективна характеристика матеріалу є функцією об'ємних часток фаз, які неперервно змінюються в об'ємі пористого зволожено-

го тіла та параметрів, які відображають вплив зовнішніх факторів (у цьому випадку частоти зовнішнього електромагнітного поля). Для твердого недеформованого скелету структура пористого матеріалу задається пористістю, а вміст води у ньому – насиченням пор рідиною. Зрозуміло, що пористість, як параметр структури, не описує переміщення фаз у матеріалі, спричинене гідродинамічним рухом складових (рідини або газу). Тому для означення дифузійних властивостей пористого матеріалу необхідно вводити додаткові структурні параметри, серед яких важливими є власна проникність скелету та фактор звивистості [7].

У цій роботі в рамках просторового усереднення зроблено спробу узагальнення та надання змісту основним співвідношенням фізики поверхні та рівноважної термодинаміки неоднорідного багатофазного (багатокомпонентного) середовища з точки зору прикладного застосування до отриманих експериментально сорбційних або дренажних характеристик пористого матеріалу. Значна увага приділяється зв'язку наведених співвідношень з структурою пористого матеріалу. Для цього вводяться нормована функція розподілу розміру пор за радіусом та власна проникність скелету пористого матеріалу. Динаміка руху рідини та газу у пористому матеріалі розглядається згідно з узагальненим законом Дарсі (D'Arcy) [13], з якого безпосередньо випливає умова рівноваги фаз у пористому зволоженому матеріалі.

Доцільність переглянутих та описаних у роботі теоретичних та експериментальних даних обґрунтовується необхідністю встановлення початкових умов за чисельного розв'язування балансових рівнянь темпласообміну для зволоженого пористого матеріалу та значними розбіжностями у числових значеннях власної проникності скелету згідно експериментальних методів досліджень [8]. Тому запропоновано уніфікований підхід для визначення рівноважного зволоження та власної проникності скелету на основі типової залежності насичення пор рідиною від середнього радіуса кривизни меніску між рідиною та газом для мезоскопічного пористого матеріалу.

**Огляд проблеми.** Згідно з методом просторового усереднення [6], фізичні властивості зволоженого пористого середовища описують за допомогою ефективних або усереднених величин, які є однозначними функціями неперервних фазових об'ємних характеристик. Останні вводяться при розгляді елементарного об'єму усереднення  $\Delta V_{REV}$  (REV – Representative Elementary Volume) (рис. 1) ( $\Delta V_{REV} = \sum_{\alpha} \Delta V_{\alpha}$ , тут  $\Delta V_{\alpha}$  – об'єм  $\alpha$ -фази,  $\alpha = \{s, l, g\}$  – індекс, який відповідає послідовно твердій ( $s$ ), рідкій ( $l$ ) і газоподібній ( $g$ ) фазам) на основі об'ємних часток фаз  $\theta_{\alpha} = \Delta V_{\alpha} / \Delta V_{REV}$  ( $\sum_{\alpha} \theta_{\alpha} = 1$ ).

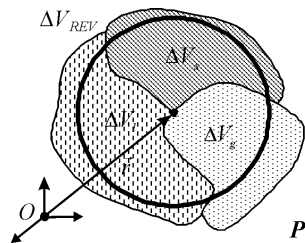


Рис. 1. Схематичне зображення REV

У такий спосіб визначається пористість  $\phi$

$$\phi = \frac{\Delta V_l + \Delta V_g}{\Delta V_{REV}} = 1 - \frac{\Delta V_s}{\Delta V_{REV}} \quad (\phi = \theta_l + \theta_g = 1 - \theta_s) \quad (1)$$

та ступені насичення пор рідиною  $S_l$  та газом  $S_g$

$$S_l = \frac{\Delta V_l}{\Delta V_l + \Delta V_g} \quad S_g = \frac{\Delta V_g}{\Delta V_l + \Delta V_g} \quad (S_l + S_g = 1). \quad (2)$$

З виразів (1) та (2) випливає, що лише величини  $\phi$  та  $S_l$  є незалежними характеристиками, оскільки

$$\theta_s = 1 - \phi \quad \theta_l = \phi S_l \quad \theta_g = \phi(1 - S_l). \quad (3)$$

Відповідно до теорії осушування Вайтекера (Whitaker) [2] та рівняння Юнга-Лапласа (Young-Laplace) [9] в межах REV для усереднених величин виконується просте співвідношення

$$\langle p_c \rangle = \langle p_g \rangle - \langle p_l \rangle = \frac{2\sigma}{\langle r \rangle}, \quad (4)$$

де:  $\langle p_c \rangle$  – капілярний тиск, якому на умовній поверхні розділу фаз рідина та газ відповідає радіус меніску  $\langle r \rangle$ ,  $\langle p_l \rangle$  і  $\langle p_g \rangle$  – тиск у рідкій та газоподібній фазі,  $\sigma$  – коефіцієнт поверхневого натягу.

Використовуючи принцип локальної термічної рівноваги [2] ( $\langle T_{\alpha} \rangle = T$ , тут  $\alpha = \{s, l, g\}$ ,  $\langle T_{\alpha} \rangle$  – усереднена температура  $\alpha$ -фази, а  $T$  – рівноважна температура), опишемо термодинамічний стан рідини та водяної пари в межах REV з допомогою співвідношень Гіббса-Дюгемана (Gibbs – Duhem) [11]

$$\langle s_v \rangle dT + \frac{1}{\langle \rho_v \rangle} d\langle p_g \rangle + \frac{RT}{M_v \langle x_v \rangle} d\langle x_v \rangle - d\langle \mu_v \rangle = 0, \quad (5)$$

$$\langle s_l \rangle dT + \frac{1}{\langle \rho_l \rangle} d\langle p_l \rangle - d\langle \mu_l \rangle = 0$$

де:  $\langle s_{\alpha} \rangle = S_{\alpha} / \Delta m_{\alpha}$ , де  $\alpha = \{l, v\}$  – питома ентропія,  $\langle \rho_{\alpha} \rangle = \Delta m_{\alpha} / \Delta V_{\alpha}$  – густина,  $\langle \mu_{\alpha} \rangle = G_{\alpha} / \Delta m_{\alpha}$  – хімічний потенціал  $\alpha$ -фази (компоненти),  $G_{\alpha}$  і  $S_{\alpha}$  – енергія Гіббса та ентропія,  $\Delta m_{\alpha}$  – маса  $\alpha$ -складової (рідини ( $l$ ) або водяної пари ( $v$ )),  $\langle x_v \rangle = \langle p_v \rangle / \langle p_g \rangle$  – молярна частка водяної пари,  $\langle p_v \rangle$  та  $\langle p_g \rangle$  – парціальний тиск ненасиченої водяної пари та газової суміші відповідно.

Оскільки в стані термодинамічної рівноваги хімічні потенціали рівні  $\langle \mu_v \rangle = \langle \mu_l \rangle = \mu$  і температура  $T$  в межах REV є постійними величинами, то на основі співвідношень (4) та (5) з врахуванням рівняння стану  $\langle \rho_v \rangle = M_v \langle p_g \rangle / RT$  отримуємо

$$\left( 1 - \frac{\rho_l RT \langle x_v \rangle}{M_v \langle p_v \rangle} \right) d\langle p_v \rangle - \frac{1}{\langle x_v \rangle} d\langle x_v \rangle = 2\sigma \langle x_v \rangle d\left( \frac{1}{\langle r \rangle} \right). \quad (6)$$

Для реальних газів, зокрема для суміші сухого повітря і водяної пари [12], молярна частка водяної пари  $\langle x_v \rangle$  є відомою функцією парціального тиску  $\langle p_v \rangle$  і температури  $T$  згідно з рівнянням стану  $\langle x_v \rangle = f(\langle p_v \rangle, T)$ . При спрощеному розгляді у наближенні  $\langle x_v \rangle \cong 1$  ( $\langle p_v \rangle \leq p_{vs}$ , де  $p_{vs} = p_{vs}(T)$  – тиск насиченої водяної пари), інтегруючи рівняння (6) з граничною умовою, яка враховує, що тиску насиченої водяної пари  $p_{vs}$  відповідає в середньому плоска ( $\langle r \rangle \rightarrow \infty$ ) поверхня розділу між рідиною і водяною парою ( $\langle p_c \rangle = 0$ ), отримуємо співвідношення Кельвіна (Kelvin) [9]

$$\langle p_c \rangle = \frac{2\sigma}{\langle r \rangle} = -\frac{\rho_l RT}{M_v} \ln[\langle \phi \rangle] + \delta, \quad (7)$$

де:  $\langle \phi \rangle = \langle p_v \rangle / p_{vs}$  – відносна вологість водяної пари,  $\delta = \langle p_v \rangle - p_{vs}$  – малий відносно першого доданку параметр.

Припустимо, що REV вільно позиціонує в межах макроскопічного об'єму  $V$  пористого матеріалу. Згідно зі співвідношеннями (3), означивши середню для матеріалу пористість  $\langle \phi \rangle$ , можна стверджувати

$$\langle S \rangle \langle \langle r \rangle \rangle = \frac{1}{\langle \phi \rangle} \frac{\langle V_l \rangle \langle \langle r \rangle \rangle}{\Delta V_{REV}}, \quad (8)$$

де  $\langle S \rangle$  і  $\langle V_l \rangle$  – усереднені за макрооб'ємом  $V$  ступінь насичення пор рідиною і об'єм рідкої фази в межах REV, яким відповідає середній радіус меніску  $\langle r \rangle$ .

Типовий приклад залежності  $\langle S \rangle = f(\langle r \rangle)$  для мезоскопічного пористого матеріалу (рис. 2) отримуємо на основі експериментально визначених кривих ізотерм сорбції [9]  $W = f(\langle \phi \rangle)$ , де:  $W = \langle \phi \rangle \langle S \rangle \rho_l / \rho_s$  – вологовміст ( $\rho_s$  і  $\rho_l$  – відповідно густини твердої і рідкої фаз) або дренажних кривих затримки (вивільнення) вологи [10]  $h = f(\langle S \rangle)$ , де  $h = \langle p_l \rangle / \rho_l g$  – гідравлічний напір рідини у пористому матеріалі ( $g$  – прискорення вільного падіння), застосувавши співвідношення (4) та (7) при переході до змінних  $\langle S \rangle$  та  $\langle r \rangle$ .

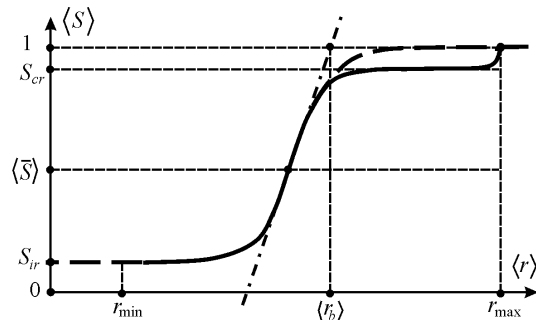


Рис. 2. Залежність  $\langle S \rangle = f(\langle r \rangle)$  для мезоскопічного пористого матеріалу

Треба зауважити, що  $\lim_{\langle r \rangle \rightarrow r_{min}} \langle V_l \rangle \langle \langle r \rangle \rangle = V_{ir}$ , де  $V_{ir}$  – залишковий об'єм рідкої фази, який відповідає абсорбованій до поверхні твердого скелету воді (bo-

und water). Таку воду природнім способом неможливо видалити з пористого матеріалу. Оскільки  $\lim_{\langle r \rangle \rightarrow r_{max}} \langle V_l \rangle \langle \langle r \rangle \rangle / \Delta V_{REV} = S_{cr} \langle \phi \rangle$ , то згідно зі співвідношенням

(8) отримуємо:  $S_{ir} \leq \langle S \rangle \leq S_{cr}$ , де  $S_{ir} = \frac{1}{\langle \phi \rangle} V_{ir} / \Delta V_{REV}$  та  $S_{cr}$  – відповідно залишковий та критичний ( $S_{cr} \cong 1$ ) ступені насичення пор рідиною. Враховуючи, що при  $\langle r \rangle \rightarrow r_{min}$  і  $\langle r \rangle \rightarrow r_{max}$  маємо  $\partial \langle S \rangle \langle \langle r \rangle \rangle / \partial \langle r \rangle \rightarrow 0$ , на основі літератури [13] вводимо нормовану функцію розподілу розміру пор за радіусом

$$\Phi \langle \langle r \rangle \rangle = \frac{1}{S_{cr} - S_{ir}} \langle r \rangle \frac{\partial \langle S \rangle \langle \langle r \rangle \rangle}{\partial \langle r \rangle} \quad \left( \int_{r_{min}}^{r_{max}} \Phi \langle \langle r \rangle \rangle d \langle r \rangle = 1 \right), \quad (9)$$

а також ефективне насичення  $\theta$  пор рідиною

$$\Theta = \frac{\langle S \rangle - S_{ir}}{S_{cr} - S_{ir}} = \int_{r_{min}}^{\langle r \rangle} \Phi \langle \langle r \rangle \rangle d \langle r \rangle \quad (0 \leq \Theta \leq 1). \quad (10)$$

Згідно з рис. 2 точка перетину дотичної до залежності  $\langle S \rangle = f(\langle r \rangle)$  при половинному насиченні пор рідиною ( $\langle \bar{S} \rangle = 1/2$ ) з віссю абсцис у границі  $\langle S \rangle \rightarrow 1$  дає змогу отримати наближене значення так званого бульбашкового тиску (bubble pressure):  $\langle p_b \rangle \cong 2\sigma / \langle r_b \rangle$ , де  $\langle r_b \rangle$  – середній радіус меніску відокремлених бульбашок газу при неперервному заповненні пор рідиною. Даний тиск обґрунтовує означення критичного насичення  $S_{cr}$  і дає підставу стверджувати, що згідно з (7) маємо:  $\lim_{\langle \phi \rangle \rightarrow 1} \langle p_c \rangle \cong \langle p_b \rangle = \delta$ . Тим не менше, у більшості прикладних досліджень приймають  $\delta = 0$ . У такому випадку у співвідношеннях (9) і (10) встановлюють  $S_{cr} = 1$ , а ділянки  $0 \leq \langle r \rangle < r_{min}$  та  $\langle r \rangle > r_b$  на графічній залежності  $\langle S \rangle = f(\langle r \rangle)$  аналітично продовжують (див. рис. 2, штриховані лінії) з метою виконання граничних умов  $\lim_{S \rightarrow S_{ir}} p_c = \infty$  та  $\lim_{S \rightarrow 1} p_c = 0$ .

**Закон Дарсі (Darcy). Насичений рух рідини у пористому матеріалі. Власна проникність скелету. Рівняння Кармана-Козені (Carman – Kozeny).** Досліджуючи потік рідини вздовж вертикальної труби, яка заповнена сферичними частинками піску під впливом гравітаційної сили, Дарсі (Darcy) [14] встановив:  $Q_l = -K_l A \Delta h / L$ , де:  $Q_l$  – об'ємний потік рідини,  $\Delta h$  – різниця гідравлічного напору рідини у манометрах, відстань між якими становить  $L$ ,  $A$  – площа поперечного перерізу труби,  $K_l$  – коефіцієнт пропорційності, який відповідає гідравлічній провідності рідини у піску.

В одновимірному плоскому випадку при повному насиченні пор рідиною ( $\langle p_g \rangle = 0$  та  $\langle S \rangle = 1$ ) закон Дарсі [14] можна узагальнити. Для цього означимо відносну по відношенню до скелету пористого матеріалу швидкість рідини (superficial velocity) [13]  $\langle u \rangle = \langle v_l \rangle - \langle v_s \rangle$  (тут  $\langle v_l \rangle$  і  $\langle v_s \rangle$  – усереднені швидкості рідкої та твердої фази) згідно з співвідношенням  $U_l = Q / A = \langle \phi \rangle \langle u \rangle$ , де:  $U_l$  – абсолютна швидкість рідини (specific discharge), а  $\langle \phi \rangle$  – усереднена пористість мате-

ріалу. Оскільки  $h = \langle p_c \rangle / \rho_l g$ , де  $\langle p_c \rangle$  – усереднений капілярний тиск, то у випадку нерухокої ( $\langle v_s \rangle = 0$ ) твердої фази для нескінченно малих приростів довжини  $L$  отримуємо:

$$U_l = \langle \phi \rangle \langle v_l \rangle = - \frac{K_l}{\rho_l g} \frac{\partial \langle p_c \rangle}{\partial x} = - \frac{k_s}{\mu_l} \frac{\partial \langle p_c \rangle}{\partial x}, \quad (11)$$

де:  $k_s = \frac{K_l \mu_l}{\rho_l g}$  – власна проникність (intrinsic permeability) скелету пористого матеріалу,  $\mu_l$  – динамічна в'язкість рідини. Власна проникність є абсолютною характеристикою скелету пористого матеріалу, на що вказує відоме у літературі рівняння Кармана-Козені (Carman-Kozeny) [16]

$$\rho_l g \frac{\Delta h}{L} = -\alpha_0 \frac{(1 - \langle \phi \rangle)^2}{\langle \phi \rangle^3} \langle \psi \rangle^2 \tau \mu_l U_l, \quad (12)$$

де:  $\langle \psi \rangle = A_s / V_s$  – питома поверхня твердої фази ( $A_s$  і  $V_s$  – сумарні площа поверхні та об'єм твердої фази),  $\tau = L_e / L$  – кривизна (звивистість) капілярів у порах ( $L_e$  – середня довжина траєкторії, яку реально долає частинка рідини у пористому матеріалі між двома паралельними площинами перпендикулярними прямолінійному відріzkу  $L$ ), а  $\alpha_0$  – константа, яка залежить від форми і властивостей скелету пористого матеріалу.

При моделюванні скелету пористого матеріалу з допомогою сферичних частинок еквівалентного діаметра  $\langle d \rangle$  [16] маємо  $\langle \psi \rangle = 6 / \langle d \rangle$ . Порівнюючи співвідношення (12) з законом Дарсі (Darcy) [14], отримуємо

$$k_s = \frac{1}{36\alpha_0} \frac{\langle \phi \rangle^3}{(1 - \langle \phi \rangle)^2} \frac{\langle d \rangle^2}{\tau} \quad (13)$$

де  $\langle \phi \rangle$  – усереднена пористість.

**Ненасичений рух рідини у пористому матеріалі. Наближення Leverett. Умови статичної рівноваги.** В умовах ненасиченого плоского потоку рідини у пористому матеріалі згідно з літературою [13] введемо абсолютні швидкості рідини  $U_l = \phi \langle S \rangle \langle u_l \rangle$  та газу  $U_g = \phi(1 - \langle S \rangle) \langle u_g \rangle$ , де  $\langle u_l \rangle = \langle v_l \rangle - \langle v_s \rangle$  та  $\langle u_g \rangle = \langle v_g \rangle - \langle v_s \rangle$  – усереднені швидкості рідини та газу відносно скелету. У випадку нерухомого скелету ( $\langle v_s \rangle = 0$ ), по аналогії до співвідношення (11) узагальнений закон Дарсі (Darcy) [10] матиме вигляд

$$U_l = \langle \phi \rangle \langle S \rangle \langle v_l \rangle = - \frac{K_l \langle S \rangle}{\rho_l g} \frac{\partial \langle p_l \rangle}{\partial x} = - \frac{k_s k_{rl} \langle S \rangle}{\mu_l} \frac{\partial \langle p_l \rangle}{\partial x}$$

$$U_g = \langle \phi \rangle (1 - \langle S \rangle) \langle v_g \rangle = - \frac{K_g \langle S \rangle}{\rho_g g} \frac{\partial \langle p_g \rangle}{\partial x} = - \frac{k_s k_{rg} \langle S \rangle}{\mu_g} \frac{\partial \langle p_g \rangle}{\partial x}, \quad (14)$$

тут  $k_{r\alpha} \langle S \rangle = \frac{k_\alpha \langle S \rangle}{k_s}$ , де  $\alpha = \{l, g\}$  – відносні проникності  $\alpha$ -фази, які згідно з

[10], задовольняють умову  $0 \leq k_{r\alpha} \langle S \rangle \leq 1$ ,  $k_\alpha \langle S \rangle = \frac{K_\alpha \langle S \rangle \mu_\alpha}{\rho_\alpha g}$  – відповідні абсолютні проникності та  $K_\alpha \langle S \rangle$  – гідравлічні провідності матеріалу.

Аналізуючи узагальнені закони руху рідини (11) та (14) для насиченого чи ненасиченого пористого матеріалу, приходимо до висновку, що згідно з відомими рівняннями стану  $\langle x_v \rangle = f(\langle p_v \rangle, T)$  ( $\langle p_g \rangle = \langle p_v \rangle / \langle x_v \rangle$ ) та співвідношенням (4) знання базової залежності  $\langle p_c \rangle = f(\langle S \rangle)$  у довільній макроскопічній частині зволоженого пористого матеріалу є необхідним і достатнім при описі ізотермічних процесів дифузії рідкої (wetting – змочуваної) та газоподібної (non-wetting – не змочуваної) фази. На це вказує відоме з літератури наближення Леверетт (Leverett) [15], яке отримуємо з наступних міркувань. Припустимо, що пористий матеріал розглядається, як сукупність капілярів з середнім діаметром  $\langle d \rangle$ . Тоді, у співвідношенні (12)  $\langle \psi \rangle = 4 / \langle d \rangle$  [16], де  $\langle d \rangle = 4\sigma \cos \theta / \langle p_c \rangle$ , тут  $\theta$  – кут змочування між рідиною і газом у капілярі. Звідси, подібно до співвідношення (13), отримуємо

$$\frac{\langle p_c \rangle}{\sigma} \sqrt{\frac{k_s}{\langle \phi \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_0 \tau}} \frac{\langle \phi \rangle}{1 - \langle \phi \rangle} \langle \cos \theta \rangle. \quad (15)$$

Оскільки  $\langle \cos \theta \rangle = f(\langle S \rangle)$ , то на основі (15) отримуємо безрозмірну  $J$ -функцію Леверетт (Leverett) [15], яка однозначно характеризує процес затримки (вивільнення) вологи для заданого пористого матеріалу

$$J \langle S \rangle = \frac{\langle p_c \rangle \langle S \rangle}{\sigma} \sqrt{\frac{k_s}{\langle \phi \rangle}}, \quad (16)$$

тут  $k_s$  – власна проникність матеріалу,  $\langle \phi \rangle$  – середня пористість, а  $\sigma$  – коефіцієнт поверхневого натягу.

Варто зауважити, що статичний (рівноважний) стан рідини у пористому матеріалі отримуємо, коли у співвідношеннях (14) покладемо  $U_l = U_g = 0$ . Такий стан реалізується при рівноважному значенні зволоження матеріалу  $\langle S_{eqv} \rangle$ , яке згідно з (4) визначаємо з умови  $\langle p_l \rangle \langle S_{eqv} \rangle = 0$ . Тоді маємо  $\langle p_c \rangle \langle S_{eqv} \rangle = P_{amb}$ , де  $P_{amb}$  – тиск пароповітряної газової суміші у зовнішньому середовищі.

**Відносні проникності рідини та газу. Порівняльний аналіз моделей вивільнення або затримки вологи.** Згідно зі статистичною моделлю [13], запропоновано такі вирази для розрахунку відносних проникностей змочуваної (рідкої)  $k_{rl}$  та не змочуваної (газоподібної)  $k_{rg}$  фази у співвідношеннях (14) для узагальненого закону Дарсі (Darcy) [8]:

$$k_{rl} \langle S \rangle = \Theta^\kappa \frac{\int_{r_{min}}^{r_{max}} \langle r \rangle \Phi \langle r \rangle d \langle r \rangle}{\int_{r_{min}}^{r_{max}} \langle r \rangle \Phi \langle r \rangle d \langle r \rangle} \quad k_{rg} \langle S \rangle = (1 - \Theta)^\zeta \frac{\int_{r_{min}}^{r_{max}} \langle r \rangle \Phi \langle r \rangle d \langle r \rangle}{\int_{r_{min}}^{r_{max}} \langle r \rangle \Phi \langle r \rangle d \langle r \rangle}, \quad (17)$$

де:  $\Phi(\langle r \rangle)$  – функція розподілу розміру пор за ефективним радіусом  $\langle r \rangle$  (9),  $\Theta$  – ефективне насичення пор рідиною (10), а  $\kappa$  і  $\zeta$  – експериментальні параметри [13], які відображають відповідно взаємозв'язок між розміром пор і звивистістю (кривизною) траєкторії руху для частинок рідини та газу у пористому ненасиченому зволоженому середовищі.

Співвідношення (17) можна легко узагальнити на випадок довільної залежності  $\langle p_c \rangle = \langle p_c \rangle(\Theta) \equiv f(\langle S \rangle)$ , де  $\Theta = \Theta(\langle S \rangle)$  – ефективне насичення, яке відповідає реальній моделі вивільнення або затримки вологи у пористому матеріалі. Для цього врахуємо, що згідно з формулами (10) та (4)  $\Phi(\langle r \rangle)d\langle r \rangle = d\Theta$ , а  $\langle r \rangle = 2\sigma / \langle p_c \rangle$ . Тоді, при заміні змінних  $\langle r \rangle \rightarrow \Theta(\langle S \rangle)$  ( $r_{\min} \rightarrow \Theta(S_{ir}) \equiv 0$  та  $r_{\max} \rightarrow \Theta(S_{cr}) \equiv 1$ ) отримуємо:

$$k_{rl}(\Theta) = \Theta^{1/2} \frac{\int_0^{\Theta} [1/\langle p_c \rangle(x)] dx}{\int_0^{\Theta} [1/\langle p_c \rangle(x)] dx} \quad k_{rg}(\Theta) = (1 - \Theta)^{1/3} \frac{\int_0^{\Theta} [1/\langle p_c \rangle(x)] dx}{\int_0^{\Theta} [1/\langle p_c \rangle(x)] dx}, \quad (18)$$

де згідно з дослідженнями Мюалем (Muallem) [17] та Лакнер (Luckner) [18] у виразах (17) прийнято  $\kappa = 1/2$  та  $\zeta = 1/3$ .

На цей час найпоширенішими для опису експериментальних залежностей вивільнення чи затримки вологи  $\langle p_c \rangle = f(\langle S \rangle)$  у пористих тілах є напівемпіричні модельні наближення Брукс-Корей (Brooks – Corey) [19] та Генутчен (van Genuchten) [20]. Такі наближення добре узгоджуються з даними по розподілу середніх значень ступеня насичення пор рідиною  $\langle S \rangle$  за радіусом  $\langle r \rangle$  для скінченного об'єму мезоскопічного пористого матеріалу (рис. 2).

Згідно з моделлю Брукс-Корей [19], маємо

$$\Theta = \left[ \frac{1}{\alpha \langle p_c \rangle} \right]^\lambda, \quad (\alpha \langle p_c \rangle \geq 1), \quad (19)$$

де:  $\lambda$  – безрозмірний параметр, який відповідає нахилу кривої на залежності  $\langle S \rangle = f(\langle r \rangle)$  при половинному насиченні пор рідиною  $\langle \bar{S} \rangle = 1/2$ , відомий у літературі [13] під назвою індексу розподілу пор за розміром (pore size distribution index);  $\alpha$  – параметр, який підлягає визначенню.

Згідно моделі Генутчен [20] маємо

$$\Theta = \left[ \frac{1}{1 + (\alpha \langle p_c \rangle)^m} \right]^n, \quad (20)$$

тут  $m$  і  $n$  – емпіричні параметри.

Підставляючи залежності  $\langle p_c \rangle = \langle p_c \rangle(\Theta)$ , визначені з виразів (19) та (20) у співвідношення (18), внаслідок інтегрування отримуємо для моделі Брукс-Корей (Brooks – Corey) [19]:

$$k_{rl}(\Theta) = \Theta^{5/2+2/\lambda} \quad k_{rg}(\Theta) = (1 - \Theta)^{1/3} [1 - \Theta^{2(1+1/\lambda)}], \quad (21)$$

та моделі Генутчен (van Genuchten) [20]

$$k_{rl}(\Theta) = \Theta^{1/2} [1 - (1 - \Theta^{1/m})^m]^2 \quad k_{rg}(\Theta) = (1 - \Theta)^{1/3} [1 - \Theta^{1/m}]^{2m}, \quad (22)$$

де  $m = 1 - 1/n$  – співвідношення, яке задовільняє необхідну умову існування інтегралу.

При  $\alpha \langle p_c \rangle \ll 1$  моделі Брукс-Корей (19) та Генутчен (20) співпадають, звідки випливає  $\lambda = mn = n - 1$ . Емпіричний параметр  $m$  для моделі (20) знаходимо на основі співвідношення  $\langle p_c \rangle \partial \langle S \rangle / \partial \langle p_c \rangle = -\langle r \rangle \partial \langle S \rangle / \partial \langle r \rangle$  згідно з розподілом  $\langle S \rangle = f(\langle r \rangle)$  (рис. 2), звідки відповідно до формул (20) та (9) отримуємо

$$\Phi(\langle r \rangle) = \frac{m}{1 - m} \Theta (1 - \Theta^{1/m}), \quad (23)$$

де  $\Theta = \Theta(\langle S \rangle) \equiv f(\langle r \rangle)$  – відома функція середнього радіусу  $\langle r \rangle$ .

Параметр  $\alpha$  у співвідношеннях (19) та (20) доцільно ввести при половинному насиченні пор рідиною, коли  $\langle \bar{S} \rangle = 1/2$ . Тоді на основі моделі Генутчен [20] отримуємо

$$\alpha = \frac{1}{\langle p_c \rangle} \left( \left[ \frac{1}{\Theta} \right]^{1/m} - 1 \right)^{1-m} = \frac{\langle r \rangle}{2\sigma} \left( \left[ \frac{S_{cr} - S_{ir}}{\langle \bar{S} \rangle - S_{ir}} \right]^{1/m} - 1 \right)^{1-m}, \quad (24)$$

де:  $\langle p_c \rangle = 2\sigma / \langle r \rangle$  – капілярний тиск, а  $\langle r \rangle$  – середній радіус меніска при половинному насиченні  $\langle \bar{S} \rangle$  пор рідиною.

Згідно зі співвідношеннями (19) та (24) в рамках моделі Брукс-Корей [19] неважко на прикладі реальної залежності  $\langle S \rangle = f(\langle r \rangle)$  (рис. 2) переконатися в тому, що  $\alpha \langle p_c \rangle = J(\langle S \rangle)$ , де  $J(\langle S \rangle) = [1/\Theta]^{(1-m)/m} - J$ -Leveret функція (16). Оскільки  $1/\alpha = \langle p_b \rangle$ , де  $\langle p_b \rangle$  – бульбашковий тиск, то власна проникність  $k_s$  пористого матеріалу

$$k_s = \langle \phi \rangle \alpha^2 \sigma^2 = \langle \phi \rangle \frac{\sigma^2}{\langle p_b \rangle^2}, \quad (25)$$

тут  $\langle \phi \rangle$  – середня пористість, а  $\sigma$  – коефіцієнт поверхневого натягу.

**Результати досліджень.** На рис. 3 зображено експериментально визначені [21] залежності  $\langle S \rangle = f(\langle r \rangle)$  для керамічної цегли з місцевості San Marco (Venetian) ( $\langle \phi \rangle = 0,46$ ) у двох модифікаціях відносно середньої пористості  $\langle \phi \rangle$ : modA –  $\langle \phi \rangle = 0,4$  та modB –  $\langle \phi \rangle = 0,52$ .

На основі даних кривих та співвідношень (23) і (24), згідно з модельним описом Генутчен (20), встановлено, що для основного матеріалу при  $S_{ir} = 0.015$  (рис. 3) маємо  $m = 0.67$  та  $\langle p_b \rangle = 102.9 \text{ kPa}$ , а для двох модифікацій: modA ( $S_{ir} = 0.01$ ) –  $m = 0.72$  і  $\langle p_b \rangle = 136.7 \text{ kPa}$  та modB ( $S_{ir} = 0.02$ ) –  $m = 0.61$  і  $\langle p_b \rangle = 77.5 \text{ kPa}$ . Згідно співвідношень (16) і (25) та розрахованих модельних па-

раметрів  $m$  та  $\alpha$ , де  $\alpha = 1/\langle p_b \rangle$  для функції розподілу  $\Phi(\langle r \rangle)$  (23) та  $J$  – Leverett функції (16) –  $J(\langle S \rangle) = \left( \left[ 1/\Theta(\langle S \rangle) \right]^{1/m} - 1 \right)^{1-m}$  отримано залежності зображені на рис. 4 та рис. 5 відповідно

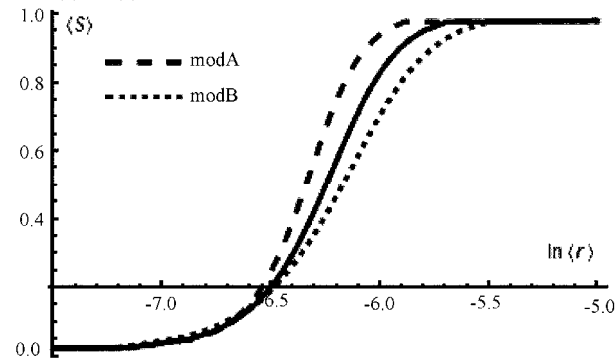


Рис. 3. Залежність  $\langle S \rangle = f(\langle r \rangle)$  для керамічної цегли з місцевості San Marco (Venetian)

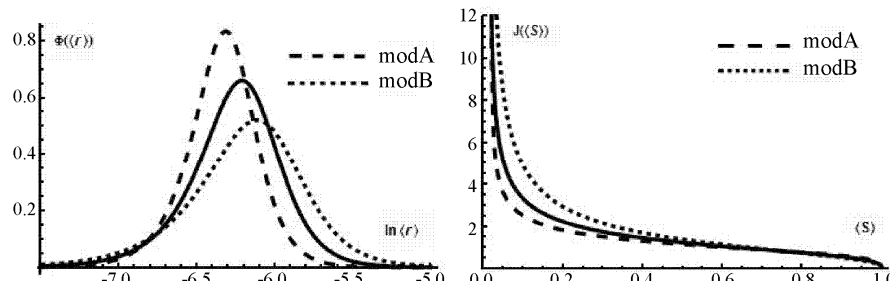


Рис. 4. Функція розподілу пор за радіусом

Рис. 5. J-Leverett функція

Графічні залежності відносних проникностей рідкої  $k_{rl}$  та газоподібної  $k_{rg}$  фаз від середнього насичення  $\langle S \rangle$  пор рідиною, розраховані за співвідношенням (22), зображено на рис. 6.

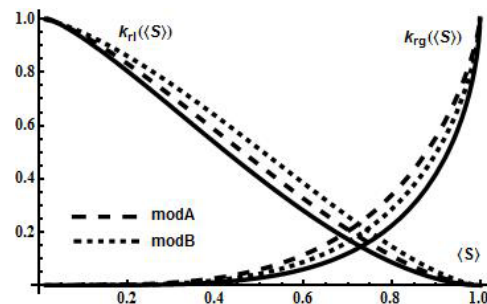


Рис. 6. Відносні проникності рідкої  $k_{rl}$  та газоподібної  $k_{rg}$  фаз

Визначені за співвідношенням (25) власні проникності для основного матеріалу  $k_s = 2,29 \times 10^{-13} \text{ m}^2$  і двох модифікацій  $k_s = 1,13 \times 10^{-13} \text{ m}^2$  (modA) та  $k_s = 4,57 \times 10^{-13} \text{ m}^2$  (modB) дають підставу стверджувати, що рівноважні зволоження матеріалу, які знаходимо згідно з формулою (20) та за умови статичної рівноваги (див. розділ "Ненасичений рух рідини у пористому матеріалі. Наближення Леверетт. Умови статичної рівноваги") співпадають з максимумами функції розподілу  $\Phi(\langle r \rangle)$  (рис. 4) і приймають значення  $\langle S_{eqv} \rangle = 0,64$  – основний матеріал ( $\langle \phi \rangle = 0,46$ ) та  $\langle S_{eqv} \rangle = 0,82$  – modA ( $\langle \phi \rangle = 0,4$ ) і  $\langle S_{eqv} \rangle = 0,51$  – modB ( $\langle \phi \rangle = 0,52$ ) відповідно.

**Висновки.** Отримані на основі порівняльного аналізу моделей Брукс-Корей [19] та Генутчен [20] із застосуванням наближення Леверетт [15] результати дають підставу стверджувати, що при зростанні пористості рівноважне зволоження матеріалу зменшується в той час, як його абсолютна проникність зростає. Умова рівноваги рідини у пористому матеріалі знаходить належне обґрунтування. Також характерним є зменшення бульбашкового тиску по мірі збільшення пористості матеріалу.

### Література

1. Лыков А.В. Теория сушки / А.В. Лыков. – М. : Изд-во "Энергия". – 1968. – 472 с.
2. Whitaker S. Simultaneous Heat, Mass and Momentum Transfer in Porous Media: a Theory of Drying / S. Whitaker // Adv. In Heat Transfer. – 1997. – Vol. 13. – P. 119-203.
3. Голубець Т.В. Аналіз дифузійних вологісних і теплових характеристик деревини у гігроскопічній області / Т.В. Голубець // Науковий вісник НЛТУ України : зб. наук.-техн. праць. – Львів : РВВ НЛТУ України. – 2005. – Вип. 15.3. – С. 106-115.
4. Hunt A.G. Percolation Theory for Flow in Porous Media. Lecture notes in physics / A.G. Hunt. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 2005. – 203 p.
5. Hilfer R. Transport and relaxation phenomena in porous media / R. Hilfer // Advances in Chemical Physics. – 1996. – Vol. 92. – P. 299-424.
6. Гачкевич О.Р. Розрахунок ефективних електрофізичних характеристик пористих матеріалів / О.Р. Гачкевич, Р.Ф. Терлецький, Т.В. Голубець // Математичні методи та фізико-механічні поля : наук. журнал. – Львів : Вид-во ІППММ. – 2009. – Vol. 52, № 1. – С. 159-171.
7. Lal R. Principles of Soil Physics / R. Lal, M.K. Shukla. – New York-Basel : Marcel Dekker, 2004. – 682 p.
8. Honarpour M. Relative Permeability of Petroleum Reservoirs / M. Honarpour, L. Koederitz, A.H. Harvey. – USA, Boca Raton, Florida : CRC Press, 1986. – 152 p.
9. Gregg S.J. Adsorption, Surface Area and Porosity / S.J. Gregg, K.S.W. Sing. – London-Toronto: Academic Press, 1982. – 313 p.
10. Bear J. Modelling Groundwater Flow and Contaminant Transport / J. Bear, A.H.-D. Cheng. – Dordrecht-New York : Springer, 2010. – 834 p.
11. Defay R. Surface Tension and Adsorption / R. Defay, I. Prigogine. – New York : Wiley & Sons, 1966. – 432 p.
12. Harrison L.P. Fundamental Concepts and Definitions relating to Humidity and Moisture – Measurement and Control in Science and Industry / L.P. Harrison // Proc. Int. Symp. On Humidity and Moisture. – Vol. 3. – Fundamentals and Standarts, Reinhold. – New York, 1965. – P. 3-256.
13. Gray W.G. Essentials of multiphase flow and transport in porous media / W.G. Gray, G.F. Pinder. – Hoboken, New Jersey : Wiley & Sons, Inc., 2008. – 258 p.
14. D'Arcy H.P.G. Les fontanes publiques la ville de Dijon / H.P.G. D'Arcy. – Paris : Victor Dalmont, 1856.
15. Leverett M.C. Steady Flow of Gas-Oil Mixtures through Unconsolidated Sands / M.C. Leverett, W.B. Lewis // Trans. AIME. – 1941. – Vol. 142. – P. 107-116.
16. Rhodes M. Introduction to Particle Technology / M. Rhodes. – New York : Wiley & Sons, 2008. – 320 p.

17. Mualem Y. A New Model for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Porous Media / Y. Mualem // Water resources Research. – 1976. – Vol. 12, No. 4. – P. 513-522.

18. Luckner L. A Consistent Set of Parametric Models for the Two-Phase Flow of Immiscible Fluids in the Subsurface / L. Luckner van M.T. Genuchten, D.R. Nielsen // Water Resources Research. – 1989. – 25, No. 10. – P. 2187-2193.

19. Brooks R.H. Properties of Porous Media Affecting Fluid Flow / R.H. Brooks, A.T. Corey // Journal of the Irrigation and Drainage Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers (ASCE). – 1966. – Vol. 92, No. IR2. – P. 61-88.

20. van Genuchten M.T. A Closed-Form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils / M.T. van Genuchten // Soil Science Society of America Journal. – 1980. – Vol. 44, No. 5. – P. 892-898.

21. Baggio P. Determinazione delle caratteristiche termoigrometriche dei materiali da costruzione porosi / P. Baggio, C. Bonacina, E. Grinzato, P. Bison, C. Bressan // Proc. 47<sup>th</sup> Congresso Nazionale ATI, Parma. – 1992. – P. 355-365.

**Голубець Т.В. Определение равновесного увлажнения и собственной проницаемости пористого материала на основе изотерм сорбции или кривых задержки влаги**

В рамках формализма объемного усреднения пересмотрены основные соотношения физики поверхности для пористого увлажненного материала. Сформулированы условия равновесия между жидкостью и газом в пористом материале. Отмечено функцию распределения размера пор за радиусом. В соответствии с экспериментальными данными, рассчитана зависимость относительных проницаемостей жидкости и газа в пористом материале от степени насыщения пор жидкостью. С помощью сравнительного анализа полуэмпирических моделей увлажнения предложен метод определения собственной проницаемости твердой фазы и равновесного увлажнения в пористом материале.

**Ключевые слова:** пористые материалы, адсорбция, капиллярные явления, диффузия жидкостей и газов.

**Holubets' T.V. Specify of equilibrium damping and intrinsic permeability of porous media on the ground of sorption isotherms or water retention curves**

In the range of volume averaging formalism the basic relations of surface physic for porous media have been revised. The equilibrium conditions between liquid and gas in the porous media have been formulated. The pore size distribution function has been defined. The relative permeability for liquid and gas in porous media as a function of the water saturation according to experimental data has been calculated. On the ground of comparative analysis for semi empirical models of humidification the method of definition for intrinsic permeability and equilibrium damping in the porous media has been introduced.

**Keywords:** porous media, adsorption, capillary phenomena, liquid and gas diffusion.

УДК 674.09:51-74:519.87:004.942      Доц. В.О. Маєвський<sup>1</sup>, канд. техн. наук;  
доц. А.Я. Вус<sup>2</sup>, канд. фіз.-мат. наук; проф. Р.І. Мацюк<sup>1</sup>, канд. техн. наук

**МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РОЗПИЛЮВАННЯ КОЛОДИ РОЗВАЛЬНО-СЕГМЕНТНИМ СПОСОБОМ НА ПИЛОМАТЕРІАЛІ З УРАХУВАННЯМ ЇЇ РЕАЛЬНОЇ ФОРМИ**

Розроблено математичну модель процесу розпилювання колоди паралельно до лінійної регресійної осі розвально-сегментним способом на пиломатеріали. Математична модель ураховує форму поверхні реальної колоди, отриманої за результатами

сканування форми поверхонь її поперечних перетинів. Обґрунтовано особливості математичної моделі розрахунку схем розпилювання з урахуванням обертання колоди або схеми розпилювання навколо осі колоди на заданий кут за розрізання (розпилювання) вертикальними і горизонтальними січними площинами.

**Ключові слова:** колода, сегмент, розпилювання, розвально-сегментний спосіб, моделювання, математична модель, постав (схема розпилювання), лінійна регресійна вісь (ЛРВ), пиломатеріал, обертання колоди.

**Постановка проблеми та актуальність досліджень.** Ефективність розрахунку результатів розпилювання реальних колод на пиломатеріали розвально-сегментним способом паралельно до лінійної регресійної осі (ЛРВ), як і розпилювання розвальним способом паралельно [1] та під кутом до неї [2], а також паралельно до твірних [3] залежить здебільшого від достовірності розроблених математичних моделей та прийнятих припущень. Відхилення результатів прогнозування виходу пиломатеріалів від результатів виробничих розпилювань залежно від зазначених показників в окремих випадках може становити понад 10 %, що свідчить про актуальність реалізації моделювання розпилювання колод на пиломатеріали, розробленого з використанням достовірних математичних моделей та обґрунтованих припущень.

**Аналіз відомих досліджень.** Зазначимо, що незважаючи на ґрунтовні дослідження, проведені у технології лісопиляння щодо вирішення проблеми раціонального розпилювання колод на пилопродукцію за допомогою моделювання процесу розпилювання, ця проблема не є повністю вирішеною [1]. У цій статті на продовження серії робіт [1-3] наведено розвиток теоретичного та практичного підходів до процесу розпилювання колод розвально-сегментним способом паралельно до ЛРВ на пиломатеріали з урахуванням їх реальної форми, реалізація якого забезпечуватиме раціональне використання деревини.

**Теоретичні та прикладні аспекти моделювання розпилювання колод паралельно до ЛРВ розвально-сегментним способом на пиломатеріали з урахуванням їх реальної форми.** Розпилювання колод розвально-сегментним способом розглядаємо як двоетапну задачу. На першому етапі (проході) – розпилювання колод розвальним способом на необрізні пиломатеріали та два сегменти, а на другому – розпилювання сегментів на однобічно-обрізні пиломатеріали. Математичну модель розпилювання колод паралельно до ЛРВ з урахуванням їх реальної форми на першому етапі розвально-сегментного способу розроблено у попередній роботі [1]. Тому наведемо тільки основні положення, які буде використано для розроблення другої частини математичної моделі розпилювання колод розвально-сегментним способом – розпилювання сегментів на однобічно-обрізні пиломатеріали.

За отриманим у роботі [4] описом поверхні колоди у вигляді множини значень  $\{R_i(\varphi), i = \overline{0, N}\}$  здійснимо моделювання розрізання (розпилювання) сегмента січними площинами, паралельними до ЛРВ, на однобічно-обрізні пиломатеріали. Загалом цю задачу можна вирішити за допомогою двох технологічних підходів. Перший підхід передбачає, що січні площини – вертикальні (моделювання розпилювання колод або їх частин, зокрема сегментів, колодопиляльним обладнанням з вертикальним розміщенням різального інструменту), а пропиляна частина сегмента розміщена горизонтально. Для другого підходу характерне горизонтальне розміщення січних площин (моделювання розпилюван-

<sup>1</sup> НЛТУ України, м. Львів;

<sup>2</sup> Львівський НУ ім. Івана Франка