Маевский В.О., Вус А.Я., Максымив В.М. **Моделирование распиловки бревна секторным способом на радиальные пиломатериалы с учетом его реальной формы**

Разработана математическая модель распиловки бревна параллельно линейной регрессионной оси секторным способом на радиальные пиломатериалы. Математическая модель учитывает форму поверхности реального бревна, полученной по результатам сканирования его поперечных сечений. Обоснованы особенности математической модели расчета схем распиловки бревна (секторов) с учетом вращения (поворота) бревна или схемы распиловки вокруг оси бревна на заданный угол при разрезании (распиловке) вертикальными и горизонтальными секущими плоскостями.

Ключевые слова: бревно, сектор, распиловка, секторный способ, моделирование, математическая модель, постав (схема распиловки), линейная регрессионная ось (ЛРО), пиломатериал радиальной распиловки (радиальный пиломатериал), вращение бревна.

Mayevskyy V.O., Vus A. Ya., Maksymiv V.M. **Simulation of log sawing by sector method into quarter sawn lumber with consideration of real log shape**

Mathematical model of log sawing to parallel of linear regressive axis by sector method into quarter sawn lumber was developed. This model is taken to account the surface shape of real log which is received by scanning for surface of log cross sections. The features of calculation for mathematical model of sawing pattern for log (sectors) taking account log rotation or sawing pattern around log axis at the fixed angle under cutting (sawing) by vertical and horizontal cutting planes were validated.

Keywords: log, sector, sawing, sector method, simulation, mathematical model, sawing pattern, linear regressive axis, quarter sawn lumber, rotation of log.

УДК 519.852.33:004

Доц. Л.К. Гліненко, канд. техн. наук; доц. Є.І. Яковенко, канд. техн. наук – НУ "Львівська політехніка"

РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ З ПРОМІЖНИМИ ПУНКТАМИ ЗА ДОПОМОГОЮ НАДБУДОВИ SOLVER MS EXCEL

Розглянуто можливості застосування надбудови Solver MS Excel для розв'язання транспортної задачі з проміжними пунктами як задачі лінійного програмування з обмеженням балансу потоків у вузлах транспортної мережі. Запропоновано модель задачі, яка дає змогу реалізувати пошук оптимального маршруту перевезень для транспортних мереж довільної складності.

Ключові слова: транспортна задача, проміжний пункт, оптимізація, MS Excel Solver.

Транспортна задача (Т-задача) є однією з найпоширеніших спеціальних задач лінійного програмування, до якої, окрім власне задачі оптимізації транспортних перевезень, зводять задачі з оптимізації маршрутизації обчислювальних і телекомунікаційних мереж, управління капіталом, обслуговування великих систем тощо. Це висуває вимогу оперативного розв'язання Т-задач за допомогою доступного і простого у використанні програмного забезпечення. Враховуючи пошириність сімейства програм MS Office, актуально дослідити можливості застосування для комп'ютерної підтримки розв'язання задач пакету MS Excel.

Опис можливостей надбудови Solver (Пошук рішення) MS Excel 7.0-2010 з підтримки розв'язання транспортної задачі як задачі лінійного

програмування розглянуто у численних публікаціях [1-4]. Автори практично всіх робіт спираються на наведений у файлі solvsamp.xls MS Excel приклад і обмежуються моделюванням та розв'язанням виключно збалансованих Т-задач без проміжних (транзитних) пунктів переміщення з класичними обмеженнями [3; 4, с. 773-776; 5, с. 63-71; 6; 7] чи додатковими обмеженнями на ресурси і пропускні здатності окремих маршрутів [8, с. 148-152, 159-210], хоча більшість реальних Т-задач, зокрема задач об'ємно-календарного планування, маршрутизації мереж, розподілу інформаційного ресурсу в мережі провайдера зводиться саме до Т-задач з проміжними пунктами [9]. Більше того, у [10, с. 325], як і в деяких інших джерелах [5, с. 63-71], стверджено, що під час розв'язання Т-задачі у Excel її варто попередньо збалансувати, що не відповідає дійсності. У [8, с. 148-152; 11] розглянуто лише збалансовану задачу з транзитним пунктом попиту; окрім того, сама умова балансу потоку через транзитний пункт попиту поставлена некоректно, як умова не перевищення сумарним потоком через транзитний пункт пропозиції справжнього обсягу пропозиції у цьому пункті, що призводить до неоптимального рішення.

У [7] та багатьох інших роботах, які стосуються розв'язання Т-задач у середовищі MS Excel Solver, задачу з транзитними пунктами пропонують розв'язувати за запропонованим у [12, с. 213] методом зі введенням у транспортні таблиці невідомих та вартостей транзитних пунктів одночасно як пунктів пропозиції, так і пунктів попиту з обсягом попиту / пропозиції в розмірі обсягу буфера. При цьому ніяких додаткових обмежень, які забезпечували б зв'язність графу, який відповідатиме маршруту перевезень, у модель задачі не вводиться. Наведені приклади дають оптимальне рішення виключно завдяки тому, що мережа перевезень містить не більше двох транзитних пунктів між пунктами пропозиції та попиту. За наявності більшої кількості проміжних пунктів отримують некоректні рішення, які не містять проміжної частини маршруту і включають лише одне початкове ребро графу й одне кінцеве, що є прямим наслідком відсутності обмеження на зв'язність графу маршруту перевезень, одним з різновидів якого є обмеження балансу потоків через всі транзитні пункти, як при розгляді збалансованої транзитної Т-задачі як потокової задачі на мережі [13, с. 348]. При цьому обмеження балансу потоків встановлюють на кожний вузол окремо на основі ідентифікації всіх вхідних і вихідних дуг, що істотно ускладнює відтворення моделі задачі на аркуші Excel і реально може бути реалізоване лише для мереж простої структури з малою кількістю проміжних пунктів. У [3] неможливість застосування процедури розв'язання традиційної Т-задачі за допомогою надбудови Пошук рішення MS Excel для випадку транзитної Т-задачі долається "ручним" проходженням кількох етапів пошуку рішення за методом потенціалів з отриманням на проміжному кроці варіанта транспортної таблиці, з якої вилучено "незадіяні" транзитні пункти; у [2, с. 587] задачі на графах розглядають як такі, розв'язання яких у MS Excel Solver потребує програмування на VBA. Спеціалізоване програмне забезпечення для Т-задач з проміжними пунктами вважають за необхідне й автори програми Trans Task [14].

Метою роботи є дослідження ефективних можливостей розв'язання транзитної транспортної задачі у MS Excel Solver як задачі лінійного програмування для транспортних мереж довільної складності.

Транспортною задачею у її класичному розумінні називають задачу про вибір плану перевезень із m пунктів відправлення в n пункти призначення. Як умова задачі задається набір коефіцієнтів c_{ij}, що визначає вартість доставки продукції із пункту i в пункт j, ресурси продукту в пунктах пропозиції a_i та потреби у продуктах у пунктах попиту b_j. Метою Т-задачі є визначення обсягів перевезень з пунктів пропозиції у пункти попиту за мінімальної сумарної вартості перевезень. Якщо позначити обсяги продукту, що перевозяться з пункту i в пункт j, через x_{ij}, то у випадку рівності сумарних обсягів попиту та пропозиції (збалансована Т-задача) задача зведеться до визначення таких значень $x_{ij} \geq 0$, $i=1, \ldots, m$; $j=1, \ldots, n$), які задовольнятимуть умові:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{1}$$

за реалізації всієї пропозиції та всього попиту для збалансованої задачі (2) та частини пропозиції (3) чи частини попиту для незбалансованої (4):

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i;\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j;\ x_{ij} \geq 0;\ (i=1,\ldots, m;\ j=1,\ldots, n), \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i;\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j;\ x_{ij} \geq 0;\ (i=1,\ldots, m;\ j=1,\ldots, n), \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i;\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j;\ x_{ij} \geq 0;\ (i=1,\ldots, m;\ j=1,\ldots, n). \tag{4}$$

У випадку транзитної транспортної задачі модель задачі ускладнюється введенням обмежень на обсяги перевезень через проміжні пункти [12, с. 213]. Якщо позначити через M множину пунктів пропозиції, $M = \{i\}$, $i=\overline{1,m}$; N – множину пунктів попиту, $N = \{j\}$, $j=\overline{1,n}$; T – множину транзитних пунктів, $T = \{t\}$, $t=\overline{1,u}$, G – множину всіх вузлів транспортної мережі $G = \{g\}$, $g=\overline{1,w}$, $\gamma=\overline{1,w}$, то цільова функція і обмеження попиту / пропозиції для збалансованої Т- задачі набудуть вигляду відповідно (5) та (6) і (7):

$$\sum_{t=1,t\in N\cup T,g\in M\cup T}^{w-m}\ \sum_{g=1,g\in M\cup T,t\in N\cup T}^{w-n} c_{gt}x_{gt} \to \min \tag{5}$$

$$\sum_{t=1,t\in N\cup T}^{w-m} x_{it} = a_i;\quad \sum_{g=1,g\in M\cup T}^{w-n} x_{gj} = b_j; \tag{6}$$

$$\sum_{g=1,g\in M\cup T,t\in T}^{w-n} x_{gt} \leq B,\quad \sum_{t=1,t\in N\cup T,g\in T}^{w-m} x_{gt} \leq B, \tag{7}$$

де B – обсяг буфера, який розраховують за (8):

$$B = \sum_{j=1,j\in N}^{n} b_j = \sum_{i=1,i\in M}^{m} a_i. \tag{8}$$

Для незбалансованої транспортної задачі обмеження попиту / пропозиції для пунктів попиту пропозиції зберігають вигляд (3) або (4), а обсяг буфера розраховують як суму попиту чи пропозиції:

$$B = \max\left\{\sum_{j=1,j\in N}^{n} b_j,\ \sum_{i=1,i\in M}^{m} a_i\right\}. \tag{9}$$

У разі наявності транзитних пунктів попиту та пропозиції множини M та N складаються з двох підмножин:

$$M = M_I \cup M_T,\ N = N_I \cup N_T, \tag{10}$$

де: M_I – множина справжніх ("істинних") пунктів пропозиції потужністю m_I=k, $M_I = \{i\}$, $i=\overline{1,k}$; M_T – множина транзитних пунктів пропозиції потужністю m_t=m-k, $M_T = \{i\}$, $i=\overline{k+1,m}$; N_I – множина справжніх ("істинних") пунктів попиту потужністю n_i=l, $N_I = \{j\}$, $j=\overline{1,l}$; N_T – множина транзитних пунктів попиту потужністю n_t=n-l, $N_T = \{j\}$, $j=\overline{l+1,n}$, причому транзитні пункти попиту і пропозиції можна вважати такими, що входять у склад розширеної множини транзитних пунктів T*:

$$T^* = M_T \cup N_T \cup T. \tag{11}$$

Тоді для збалансованої задачі обмеження пропозиції / попиту для справжніх пунктів попиту та пропозиції набувають вигляду (12), аналогічний (6) з урахуванням розширення множини транзитних пунктів до T*; для суто транзитних пунктів приймають вигляд (13), а для транзитних пунктів пропозиції / попиту – (14), (15):

$$\sum_{t=1,t\in N_I\cup T^*,i\in M_I}^{w-m_i} x_{it} = a_i;\quad \sum_{g=1,g\in M_I\cup T^*,j\in N_I}^{w-n_i} x_{gj} = b_j, \tag{12}$$

$$\sum_{g=1,g\in M_I\cup T^*,t\in T}^{w-n_i} x_{gt} \leq B,\quad \sum_{t=1,t\in N_I\cup T^*,g\in T}^{w-m_i} x_{gt} \leq B, \tag{13}$$

$$\sum_{t=1,t\in N_I\cup T^*,i\in M_T}^{w-m_i} x_{it} \leq B + a_i,\quad \sum_{g=1,g\in M_I\cup T^*,i\in M_T}^{w-n_t} x_{gi} \leq B + a_i, \tag{14}$$

$$\sum_{t=1,t\in N_I\cup T^*,j\in N_T}^{w-m_i} x_{jt} \leq B + b_j,\quad \sum_{g=1,g\in M_I\cup T^*,j\in N_T}^{w-n_t} x_{gj} \leq B + b_j. \tag{15}$$

Для незбалансованої Т-задачі з транзитними пунктами попиту і / або пропозиції обмеження попиту / пропозиції для справжніх пунктів попиту / пропозиції зберігають вигляд аналогічний (6) з переходом до нестрогої нерівності як у (3) або (4), для суто транзитних пунктів приймають вигляд (13); для транзитних пунктів пропозиції – (14), для транзитних пунктів попиту – (15), обсяг буфера розраховують за (9).

У [13, с. 213] обґрунтовано можливість розв'язання задачі з проміжними пунктами традиційними для Т-задачі методами, застосування яких автоматично забезпечує зв'язність оптимальних маршрутів перевезень. Під час розв'язання такої моделі у MS Excel Solver як задачі лінійного програмування за симплекс-методом із маршруту будуть усунуті всі проміжні пункти, за винятком суміжних, з пунктами справжнього попиту і пропозиції.

Для запобігання цьому необхідно ввести у модель задачі обмеження зв'язності оптимальних маршрутів перевезень. Враховуючи, що реалізація умов (6) та (12) забезпечує включення справжніх пунктів попиту та пропозиції у маршрут перевезень, обмеження зв'язності оптимальних маршрутів перевезень може бути реалізовано як обмеження балансу потоків через транзитні пункти.

Умова балансу потоків для суто транзитних пунктів набуває вигляду (16), для транзитних пунктів пропозиції і попиту у випадку збалансованої задачі – (17) та (18) відповідно:

$$\sum_{g=1, g\in M_I\bigcup T^*, t\in T}^{w-n_i} x_{gt} = \sum_{g=1, g\in N_I\bigcup T^*, t\in T}^{w-m_i} x_{tg}, \tag{16}$$

$$\sum_{g=1, g\in N_I\bigcup T^*, i\in M_T}^{w-m_i} x_{ig} - \sum_{t=1, t\in M_I\bigcup T^*, i\in M_T}^{w-n_i} x_{ti} = a_i, \tag{17}$$

$$\sum_{g=1, g\in M_I\bigcup T^*, j\in N_T}^{w-n_i} x_{gj} - \sum_{g=1, t\in N_I\bigcup T^*, j\in N_T}^{w-m_t} x_{jt} = b_j. \tag{18}$$

У разі незбалансованої задачі знак суворої рівності у (17) чи (18), залежно від характеру незбалансованості, заміняється на знак нестрогої рівності "<=".

У запропонованому підході для встановлення обмежень зв'язності остаточного графу та балансу потоків використовуються властивості табличного представлення структури остаточної частини графу таблицею змінних, яку після знаходження шуканих значень x_{ij} можна розглядати як фрагмент його матриці суміжності з урахуванням того, що:

1) і рядки, і стовпці таблиці змінних відповідають, як і в матриці суміжності, вершинам графу;
2) кожна вершина повторюється і в матриці суміжності, і в рядку заголовків стовпців, і в рядку заголовків рядків не більше разу;
3) наявність відмінного від 0 значення на перетині i-го стовпця і j-го рядка, як і в матриці суміжності, вказуватиме на суміжність вершин i та j і входження ребра x_{ij} у склад остаточного графу.

Від матриці суміжності заповнена таблиця змінних відрізнятиметься відсутністю стовпців та рядків, що відповідають справжнім пунктам пропозиції та попиту відповідно, проте, за очевидної відсутності у маршруті ребер типу "петля", цього фрагмента матриці суміжності достатньо для однозначного задавання структури маршруту перевезень. Тоді аналогічним способом сформований фрагмент матриці суміжності вихідного графу, в якому виключені стовпці та рядки, що відповідають справжнім пунктам пропозиції та попиту відповідно, буде однозначно задавати структуру вихідного графу, оскільки у ньому буде втрачена лише інформація про комірки K_{ii} та K_{jj}, де i, j – номери вершин графу, що відповідають справжнім пунктам пропозиції та попиту. Оскільки у графі моделі задачі не може існувати ребер типу "петля", то

значення цих комірок все одно будуть нульовими. Отримана підматриця буде збігатися за розмірністю з матрицею (таблицею) вартостей, що дає підставу розглядати останню як різновид підматриці суміжності вихідного графу.

Якщо такий фрагмент матриці суміжності, для якого ми пропонуємо назву "редукованої матриці суміжності", сформувати, розставивши рядки і стовпці, що відповідають пунктам пропозиції, попиту і транзиту, в тому ж порядку, що й у транспортній таблиці та в матриці невідомих, то отримана матриця задаватиме обмеження на структуру не лише вихідного, а й остаточного графу, який складається з маршрутів перевезень. Якщо позначити K_{gh} значення комірки редукованої матриці суміжності, яка відповідає перетину g-го рядка, який відповідає g-й вершині графу, і h-го стовпця, який відповідає h-й вершині графу, а X_{gh} – значення відповідної комірки матриці змінних, то обмеження на структуру остаточної частини графу набуде вигляду:

$$X_{gh} = \begin{cases} X_{gh} = 0 & \text{якщо} \quad K_{gh} = 0 \\ X_{gh} \geq 0 & \text{якщо} \quad K_{gh} \neq 0 \end{cases}, \tag{19}$$

що відображає факт неможливості появи у частини графу ребер, відсутніх у вихідному графі. Реалізацію цього обмеження на аркуші Excel можна досягнути двома способами:

1) якщо при заповненні редукованої матриці суміжності вихідного графу на перетині стовпця і рядка, що відповідають суміжним вершинам вихідного графу, вводити не 1, як у традиційній матриці суміжності, а максимально можливий обсяг перевезень через довільний пункт X_{max}, то у модель задачі додасться обмеження:

$$X_{gh} \leq K_{gh}, \tag{20}$$

яке разом з початковим обмеженням $X_{gh} \geq 0$ забезпечує виконання обмеження структури графу. Аналогічний результат можна отримати множенням редукованої традиційної матриці суміжності графу на максимально можливий обсяг перевезень через пункти X_{max}, який визначається як:

$$X_{\max} = \max\{B; a_{it}^{\max} + B; b_{jt}^{\max} + B\}, \tag{21}$$

де $a_{it}^{\max}$, $b_{jt}^{\max}$ – максимальні обсяги пропозиції та попиту у транзитних пунктах пропозиції та попиту відповідно для випадку, коли транзитними можуть бути не лише проміжні, але й кінцеві пункти пропозиції чи попиту;

2) якщо редукована матриця суміжності задається традиційно і K_{gh} приймає значення з множини булевих змінних 0, 1, то на змінні X_{gh} має накладатися додаткове обмеження $X_{gh} = 0$ для всіх $K_{gh} = 0$. Це обмеження легко досягається без використання функції ЕСЛИ, введення якої у модель задачі виводить останню з класу задач лінійного програмування, шляхом поелементного множення комірок матриці невідомих на відповідні комірки редукованої матриці суміжності вихідного графу, що виключає з остаточного графу неіснуючі у вихідному графі ребра.

Умова балансу потоків як умова рівності сум вхідних і вихідних потоків для кожного з транзитних пунктів реалізується у моделі задачі на аркуші Excel через умову рівності сум по рядках і стовпцях таблиці невідомих, які відповідають цим самим транзитним пунктам, оскільки сума по рядку задає сумарний вихідний потік з кожного пункту, а по стовпцю – сумарний вхідний потік. Для справжнього пункту пропозиції у матриці невідомих існує лише рядок, і сума по ньому дорівнює обсягу пропозиції; для справжнього пункту попиту – лише стовпець, і сума по ньому дорівнює обсягу попиту; для транзитних пунктів попиту різниця між вхідними та вихідними потоками має дорівнювати відповідним обсягам попиту, для транзитних пунктів пропозиції обсягу пропозиції має дорівнювати різниця між вихідними і вхідними потоками. У випадку незбалансованих транспортних задач сувора рівність має перетворюватися на нестрогу, але має додаватися умова вивезення / ввезення максимально можливого сумарного обсягу пропозиції / попиту.

Реалізацію зазначеного підходу для збалансованої транзитної транспортної задачі з нетранзитними пунктами попиту і пропозиції розглянемо для транспортної мережі з n = 8 пунктів на рис. 1.

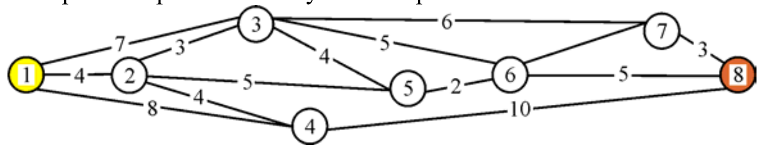

Рис. 1. Транзитна транспортна мережа з нетранзитними пунктами пропозиції (п. 1) та попиту (п. 8), обсяг попиту і пропозиції – 600 одиниць

Згідно з підходом **[**1, с.233**]**, транзитні пункти 2, 3, 4, 5, 6, 7 розглядають і як додаткові пункти пропозиції, і як додаткові пункти попиту з обсягом і пропозиції, і попиту в розмірі обсягу буфера (7). Матриця невідомих набуває розмірності (n-1)×(n-1); серед пунктів пропозиції відсутній лише п. 8 (справжній пункт попиту), серед пунктів попиту – п. 1 (справжній пункт пропозиції) (рис. 2).

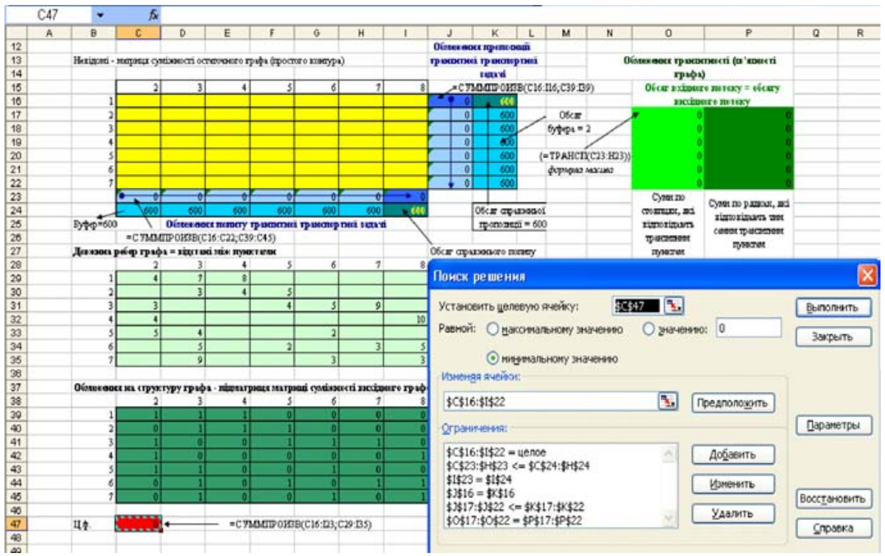

Рис. 2. Модель транзитної Т-задачі (рис. 1) у Solver MS Excel

Реалізацію моделі задачі у MS Excel відображено у табл. 1.

Табл. 1. Реалізація елементів моделі транзитної Т-задачі (рис. 2) на аркуші MS Excel

Адреса комірки	Формула	Розповсюджена на комірки	Зміст, виконуване завдання
C16: I22			Транспортна таблиця (матриця) невідомих, яка є редукованою матрицею суміжності остаточного графу, який відповідає маршруту перевезень
C29: I35	Чисельні значення відстаней між суміжними вершинами		Транспортна таблиця (матриця) вартостей, яка містить значення відстаней між суміжними вершинами
C39: I45	0∧1		Редукована матриця суміжності вихідного графу; задає обмеження на структуру остаточного графу
C23	=СУММПРОИЗВ (C16: C22; C39: C45)	C23: I23	Обсяг вантажу, ввезеного у кожний справжній та транзитний пункт попиту з урахуванням обмежень на структуру графу (СУММ дає суму по рядку, а ПРОИЗВ забезпечує не включення в остаточний граф неіснуючих у вихідному графу ребер завдяки обмеженню балансу потоків)
J16	=СУММПРОИЗВ (C16: I16; C39: I39)	J16: J22	Обсяг вантажу, вивезеного з кожного справжнього чи транзитного пункту пропозиції з урахуванням обмежень на структуру графу
K16	600, чисельне значення обсягу пропозиції у п. 1		Чисельне значення обсягу пропозиції у справжньому пункті пропозиції
I24	600, чисельне значення обсягу попиту в п. 8		Чисельне значення обсягу попиту у справжньому пункті попиту
K17	600, чисельне значення обсягу буфера	K17: K22	Чисельне значення обсягу буфера, розраховане за (8)
C24	600, чисельне значення обсягу буфера	C24: H24	Чисельне значення обсягу буфера, розраховане за (8)
O17: O22	{=ТРАНСП(C23: H23)}	Формула масиву	Сумарний обсяг вантажу, ввезеного в кожний з транзитних пунктів за (15) (сумарний вхідний потік)
P17	=J17	P17: P22	Сумарний обсяг вантажу, вивезеного з кожного з транзитних пунктів за (15) (сумарний вихідний потік)
C47	=СУММПРОИЗВ (C16: I23; C29: I35)		Цільова функція – сумарна вартість перевезень за (5)

Постановка зазначеної задачі як оптимізаційної передбачає ідентифікацію у діалоговому вікні Пошуку рішення надбудови Solver (Пошук рішення) MS Excel: типу екстремуму (мінімум); адрес комірок, які містять цільову функцію (C47) та змінні (C16: I22); обмежень (рис. 2) та параметрів пошуку (рис. 3).

Оскільки жодна з формул моделі задачі не містить ані нелінійних, ані розривних функцій, то задача належить до класу задач лінійного програмування, що дає змогу обрати для її розв'язання підтримуваний Solver симплекс-метод, встановивши у вікні параметрів пошуку прапорець "Лінійна модель". Обмеження невід'ємності змінних є традиційним для Т-задачі.

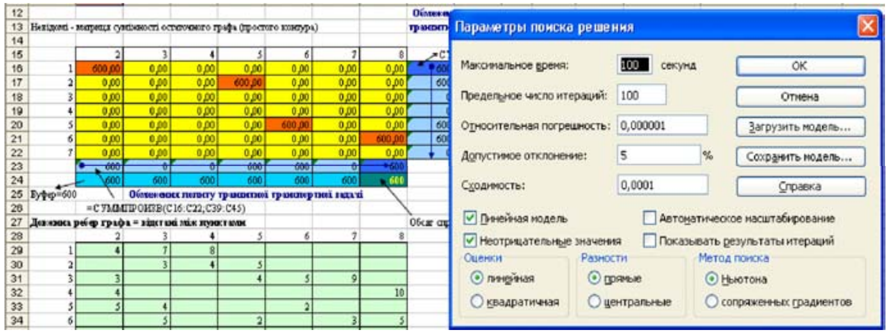

Рис. 3. Параметри пошуку процедури "Пошук рішення" для задачі (рис. 1, 2) та використання умовного форматування (виділення кольором ненульових комірок матриці змінних) для візуалізації маршруту перевезень

Зміст обмежень моделі у полі "Обмеження" діалогового вікна "Пошук рішення" (рис. 2) розкривається у табл. 2. Для незбалансованої транспортної задачі в обмеженні 2 табл. 2 чи обмеженні 3 табл. 2 (якщо пропозиція перевищує попит чи попит перевищує пропозицію відповідно) згідно з (3), (4) знак суворої рівності "=" замінюють на знак нестрогої рівності "<=".

Табл. 2. Реалізація обмежень моделі транзитної Т-задачі (рис. 2) у Solver MS Excel

№ з/п	Модель обмеження	Зміст обмеження
1	$C$16:$I$22=целое	Обмеження цілочисельності змінних; накладається або не накладається залежно від змісту вантажу
2	$J$16=$K$16	Обмеження задоволення пропозиції та попиту (6) для справжніх пунктів пропозиції та попиту відповідно
3	$I$23=$I$24	
4	$J$17:$J$22<=$K$17:$K$22	Обмеження пропозиції та попиту (7) для транзитних пунктів транспортної мережі
5	$C$23:$H$23<=$C$24:$H$24	
6	$O$17:$O$22=$P$17:$P$22	Умова балансу потоків (16) для транзитних пунктів транспортної мережі

У випадку транзитності не лише проміжних пунктів транспортної мережі, але й пунктів реального попиту та пропозиції відповідні пункти попиту і пропозиції розглядають як транзитні, тобто і як пункти попиту, і як пункти пропозиції. Відповідно змінюється розмірність матриці невідомих та редукованої матриці суміжності вихідного графу.

Для наочності відмінностей у моделі задачі розглянемо варіант транзитної Т-задачі з транзитними пунктами попиту (рис. 4).

У цьому випадку не лише суто транзитні пункти 2, 3, 4, 5, 6, розглядають як додаткові пункти пропозиції та як додаткові пункти попиту з обсягом і пропозиції, і попиту в розмірі обсягу буфера (7), а й транзитні пункти реального попиту 7, 8 виступають і як пункти попиту, і як пункти пропозиції з обсягом допустимого пункту й попиту, і пропозиції у розмірі суми обсягів буфера та реального попиту згідно з (13).

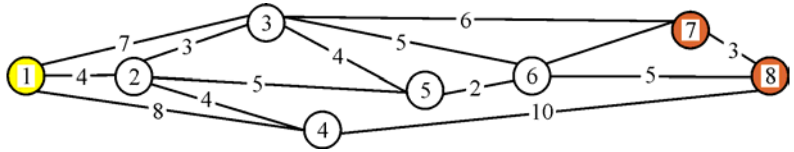

Рис. 4. Транзитна транспортна мережа з нетранзитним пунктом пропозиції (п. 1, обсяг пропозиції 600 одиниць) та транзитними пунктами попиту (п. 7, 8 з обсягами попиту 320 і 280 одиниць відповідно)

Матриця невідомих набуває розмірності (n)×(n-1); серед пунктів попиту відсутній лише п. 1 (справжній пункт пропозиції). Аналогічно змінюються і матриця вартостей, і редукована матриця суміжності вихідного графу (рис. 5).

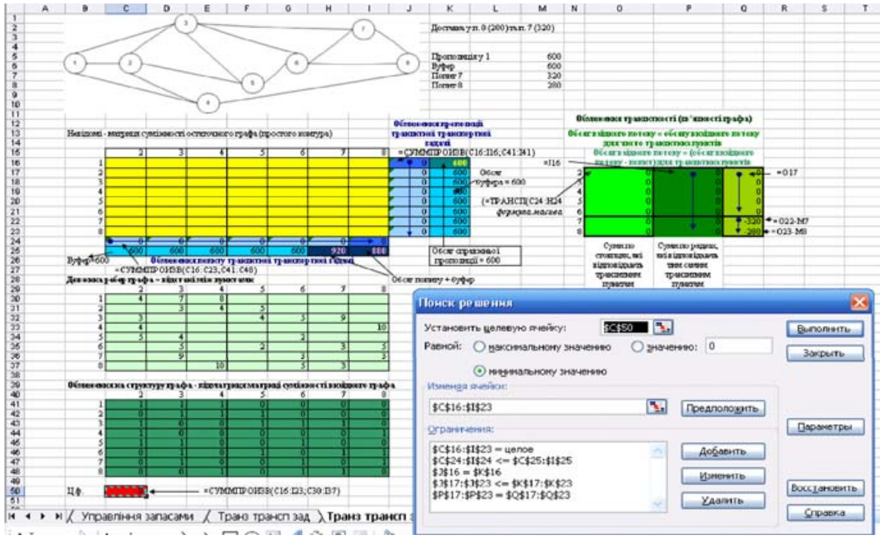

Рис. 5. Модель транзитної транспортної задачі (рис. 4) у Solver MS Excel

Реалізацію моделі задачі у MS Excel відображено у табл. 3.

Як видно з рис. 5 та табл. 3, окрім розмірності масивів комірок, що містять невідомі, вартості перевезень та дані редукованої матриці суміжності вихідного графу, відмінним у моделі задачі буде формування комірок, які міститимуть формули, що задаватимуть умову балансу потоків через транзитні пункти (масив O17:Q23).

Як видно з табл. 3, масив комірок, призначених для формування умови балансу потоків, доповнений додатковим стовпцем та розбитий на дві частини. Масив комірок Q17: Q21, призначений для обсягів вантажів, вивезених із суто транзитних пунктів, формується аналогічно масиву P17: P21 попередньої задачі. Масив комірок Q22: Q23, призначений для обсягів вантажів, вивезених з транзитних пунктів реального попиту, містить формули, які враховують необхідність задоволення у цих пунктах реального попиту за (16).

Табл. 3. Реалізація елементів моделі транзитної Т-задачі (рис. 5) на аркуші MS Excel

Адреса комірки	Формула	Розповсюджена на комірки	Зміст, виконуване завдання
C16: I23			Транспортна таблиця (матриця) невідомих, яка є редукованою матрицею суміжності остаточного графу, який відповідає маршруту перевезень
C30: I37	Чисельні значення відстаней між суміжними вершинами		Транспортна таблиця (матриця) вартостей, яка містить значення відстаней між суміжними вершинами
C41: I48	0∧1		Редукована матриця суміжності вихідного графу; задає обмеження на структуру остаточного графу
K16; M5	600, чисельне значення обсягу пропозиції у п. 1		Чисельне значення обсягу пропозиції у справжньому пункті пропозиції
K17	600, чисельне значення обсягу буфера	K17: K23	Чисельне значення обсягу буфера, розраховане за (8)
J16	=СУММПРОИЗВ (C16: I16; C41: I41)	J16: J23	Обсяг вантажу, вивезеного з кожного справжнього пункту пропозиції та кожного транзитного пункту з урахуванням обмежень на структуру графу
C25	600, чисельне значення обсягу буфера	C25: G25	Чисельне значення обсягу буфера, розраховане за (8)
M7; M8	320; 280; чисельні значення обсягів попиту в п. 7, 8		Чисельне значення реального обсягу попиту в пунктах попиту
C24	=СУММПРОИЗВ (C16: C23; C41: C48)	C24: I24	Обсяг вантажу, ввезеного в кожний зі справжніх та транзитних пунктів попиту з урахуванням обмежень на структуру графу (СУММ дає суму по рядку, а ПРОИЗВ забезпечує не включення в остаточний граф неіснуючих у вихідному графу ребер завдяки обмеженню балансу потоків)
M6	=МАКС (M5;(M7+M8))		Чисельне значення обсягу буфера, розраховане за (9); у нашому випадку збалансованої задачі збігається з розрахунком за (8)
H25	=M7+M6		Чисельне значення граничного обсягу попиту у транзитному пункті попиту 7, розраховане за (15)
I25	=M8+M6		Чисельне значення гранично обсягу попиту у транзитному пункті попиту 8, розраховане за (15)
O17: O22	{=ТРАНСП (C24: I24)}	Формула масиву	Сумарний обсяг вантажу, ввезеного в кожний з транзитних пунктів за (16), (18), з транзитними пунктами попиту включно (сумарний вхідний потік)
P17	=J17	P17: P23	Сумарний обсяг вантажу, вивезеного з кожного з транзитних пунктів за (16), (18), з транзитними пунктами попиту включно (вихідний потік)
Q17	=O17	Q17: Q21	Сумарний обсяг вантажу, вивезеного з кожного з суто транзитних пунктів за (16) (сумарний вихідний потік)
Q22	=O22-M7	Q22: Q23	Сумарний обсяг вантажу, вивезеного з кожного з транзитних пунктів попиту за (18) з урахуванням потреби у задоволенні їх реального попиту
C47	=СУММПРОИЗВ (C16: I2; C30: I37)		Цільова функція – сумарна вартість перевезень за (5)

Формування моделі задачі у вікні "Пошук рішення" надбудови Solver та встановлення параметрів пошуку проводиться аналогічно задачі з нетранзитними пунктами попиту з урахуванням змін у обмеженнях, що відображають умову балансу потоків для транзитних пунктів попиту (табл. 4).

Для незбалансованої Т-задачі в обмеженні пропозиції чи попиту справжніх пунктів пропозиції чи попиту відповідно до (3), (4) знак суворої рівності "=" замінюють на знак нестрогої рівності "<=". Аналогічну заміну проводять в умові балансу потоків транзитних пунктів попиту чи пропозиції.

Табл. 4. Реалізація обмежень моделі транзитної Т-задачі (рис. 4) у Solver MS Excel

№ з/п	Модель обмеження	Зміст обмеження
1	$C$16:$I$23=целое	Обмеження цілочисельності змінних; накладається або не накладається залежно від змісту вантажу
2	$J$16=$K$16	Обмеження задоволення пропозиції (6) для справжнього пункту пропозиції – п.1
3	$J$17:$J$22<=$K$17:$K$22	Обмеження пропозиції та попиту (13), (15) для суто транзитних (2, 3, 4, 5, 6) пунктів та транзитних пунктів попиту (7, 8) транспортної мережі
4	$C$23:$H$23<=$C$24:$H$24	
5	$P$17:$P$23=$Q$17:$Q$23	Умова балансу потоків (16), (18) для суто транзитних (2, 3, 4, 5, 6) та транзитних пунктів попиту (7, 8) мережі

Для альтернативного задавання обмеження на структуру остаточного графу за (21) достатньо замінити 1 у редукованій матриці суміжності вихідного графу на граничний обсяг потоку через пункти мережі (=макс (C25: I25; K16: K23)), встановивши на змінні обмеження цілочисельності замість булевості (рис. 6).

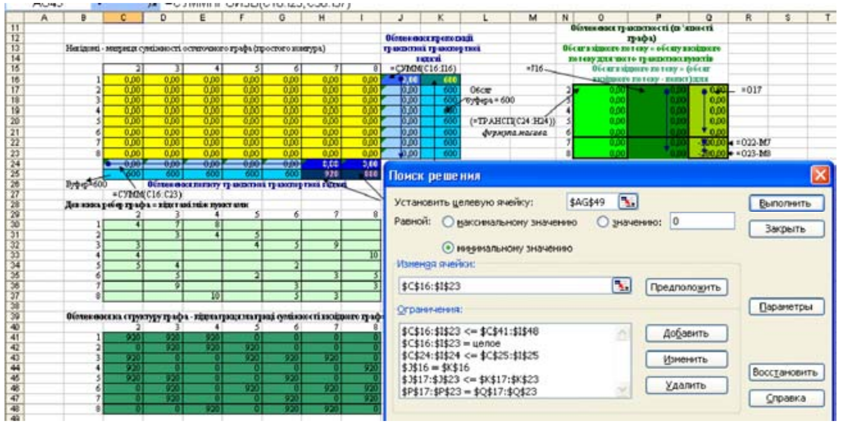

Рис. 6. Модель транзитної транспортної задачі (рис. 4) у Solver MS Excel за альтернативного задавання обмежень на структуру остаточного графа

Знаходження оптимального маршруту перевезень за допомогою інструменту "Пошук рішення" триває від часток секунди до кількох секунд залежно від потужності транспортної мережі та наявності обмеження цілочисельності на змінні. Відповідно у разі "нецілих" обсягів вантажів задаванню обмежень за (21) варто надати перевагу.

Використаний підхід можна застосувати і для розв'язання задачі пошуку мінімального шляху на графі довільної структури, якщо розглядати таку задачу, як транзитну транспортну задачу з нетранзитним пунктом попиту і пропозиції обсягом в 1, як це запропоновано у [12, с. 217]. Очевидно, що у цьому випадку обмеження цілочисельності на змінні зміниться на обмеження булевості, а обмеження на структуру остаточного графу може задаватися як обмеження на перевищення значеннями комірок змінних значень відповідних комірок редукованої матриці суміжності вихідного графу.

Література

1. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0 / Б.Я. Курицкий. – СПб. : Изд-во BHV, 1997. – 384 с.

2. Леоненков А.В. Решение задач оптимизации в среде MS Excel / А. Леоненков. – СПб. : БХВ – СПб., 2005. – 704 с.

3. Примеры задач, решаемых в процедуре "Поиск решения" Excel. [Электронный ресурс]. – Доступный з http://www.lineyka.inf.ua/applied_math/download/metoda/Example Excel.doc.

4. Walkenbach John. Excel® 2010 Bible. – Indianapolis, Indiana: Wiley Publishing, Inc. – 2010. – 1052 p. – Pp. 773-776.

5. Орлова И.В. Экономико-математические методы и модели. Выполнение расчетов в среде EXCEL / И. Орлова. – М. : ЗАО "Финстатинформ", 2000. – 136 с.

6. Федоров О.А. Использование информационных технологий при решении транспортных задач. [Электронный ресурс]. – Доступный з http://www.rae.ru/forum2012/ 21/655

7. Бочкарев А. Решение транспортных задач в MS Excel. [Электронный ресурс]. – Доступный з http://www.3econsultants.com.ua/publications/detail.php? ID=85.

8. Дубина А.Г. Excel для экономистов и менеджеров / А.Г. Дубина, С.С. Орлова, И.Ю. Шубина, А.В. Хромов. – СПб. : Изд-во "Питер", 2004. – 295 с.

9. Прилуцкий М.Х. Многокритериальные задачи распределения ресурсов в иерархических системах / М.Х. Прилуцкий, Е.А. Куликова // Исследовано в России. – 2007. – № 85. – С. 891-900.

10. Вуколов Э.А. Основы статистического анализа. Практикум по статистическим методам и исследованию операций с использованием пакетов STATISTICA и EXCEL / Э.А. Вуколов. – М. : Изд-во "Форум", 2008. – 464 с.

11. Зюков М.Е. Обучение транспортной задаче с использованием Microsoft Excel / М. Зюков, М. Зюкова // Вісник ЛНУ ім. Т. Шевченка. – 2010. – № 22 (209). – Ч. III. – С. 130-136.

12. Таха Х. Введение в исследование операций / Хемди А. Таха. – Изд. 6-ое, [перераб. и доп.]. – М. : Изд. дом "Вильямс", 2001. – 912 с.

13. Мур Д. Экономическое моделирование в Microsoft Excel / Д.Х. Мур, Л.Р. Удерфорд. – М. : Изд. дом "Вильямс", 2004. – 1024 с.

14. Леонов А.А. Пакет для решения многопродуктовой транспортной задачи с промежуточными пунктами перевозок / А.А. Леонов, М.И. Демидов // Научная сессия МИФИ. – Сер.: Экономика и управление. – 2003. – Т. 6. – С. 266-267.

Глиненко Л.К., Яковенко Е.И. **Решение транспортной задачи с промежуточными пунктами с помощью надстройки Solver MS Excel**

Рассмотрены возможности использования надстройки Solver MS Excel для решения транспортной задачи с промежуточными пунктами как задачи линейного программирования с ограничением баланса потоков в узлах транспортной сети. Предложена модель задачи, дающая возможность реализовать поиск оптимального маршрута перевозок для транспортных сетей произвольной сложности.

Ключевые слова: транспортная задача, промежуточный пункт, оптимизация, MS Excel Solver.

Glinenko L.K., Yakovenko Ye.I. **Solving transportation problem with intermediate points using Excel Solver add-in**

Availability of Excel Solver add-in for solving transportation problem with intermediate points as a linear programming problem with restricted flows balance in transport network nodes was considered. Model for finding optimal transit route in networks with arbitrary complexity is proposed.

Keywords: transportation problem, intermediate point, optimization, MS Excel Solver.

УДК 378.1

Доц. О.О. Карабин, канд. фіз.-мат. наук; доц. О.Ю. Чмир, канд. фіз.-мат. наук – Львівський ДУ безпеки життєдіяльності

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАЦІЇ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

У процесі викладання вищої математики значну увагу потрібно приділити вивченню понять і теорем математичного аналізу, які використовуються у математичному моделюванні. До таких понять належать диференціальні операції векторного поля. Розглянуто основні диференціальні операції векторного поля (градієнт, дивергенція, ротор). Показано їх суть з математичної, фізичної та механічної точок зору. Обгрунтовано необхідність їх детального вивчення у курсі вищої математики.

***Ключові слова*:** градієнт, дивергенція, ротор, потенціальне поле.

З метою удосконалення фізико-математичної підготовки майбутніх фахівців важливою є повноцінна реалізація міжпредметних зв'язків математики і фізики з іншими науками. Вища математика, як навчальна дисципліна, виконує одну з головних функцій у процесі навчання, оскільки її поняття дають змогу чітко сформулювати закони і закономірності інших наук, а її методи дають змогу приймати обгрунтовані рішення [2].

Жодне наукове дослідження не є повноцінним без побудови відповідної математичної моделі. Тому значну увагу в процесі викладання вищої математики потрібно приділити вивченню понять і теорем математичного та векторного аналізу, які використовуються в математичному моделюванні.

Векторний аналіз з'явився в математичній науці завдяки У. Гамільтону, який у 1843 р. розглянув поняття кватерніонів, а згодом, у 1853 р., у своїй монографії ввів поняття вектора та вектор-функції. У 1846 р. Гамільтон описав диференціальний оператор "набла", а також визначив скалярний та векторний добутки як операції над нововведеними об'єктами. Векторна символіка своєю компактністю та інварінтністю зацікавила фізиків, що видно з робіт Максвелла, а сучасного вигляду векторному численню надав Хевісайд у 1903 р. [1].

Мета цієї роботи – показати суть диференціальних операцій векторного поля з математичної, фізичної та механічної точок зору, а також можливість застосування сучасних програмних пакетів для розв'язування задач.

На вивчення понять векторного аналізу у вищій школі, на жаль, приділяють дуже мало часу, або їх вивчення виносять на самостійне опрацювання. При цьому не акцентують уваги на застосуванні цих понять у таких дисциплінах, як фізика, механіка, термодинаміка та теплопередача та ін., а тому сту-