

3. ТЕХНОЛОГІЯ ТА УСТАТКУВАННЯ ЛІСОВИРОБНИЧОГО КОМПЛЕКСУ

УДК 539.3

Проф. М.М. Стадник, д-р техн. наук;

доц. І.Я. Горбачевський, канд. техн. наук – НЛТУ України, м. Львів

ПІДХІД ДО ВИЗНАЧЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ ЗАЛИШКОВИХ НАПРУЖЕНЬ У ТІЛАХ З ПРУЖНИМИ ТУНЕЛЬНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Запропоновано підхід до визначення концентрації напружень у пружних тілах з тунельними чужорідностями, які піддаються попередній механічній обробці за границю пружності, а потім звільняються від зовнішніх зусиль. У рамках підходу отримано в замкненому вигляді розв'язки задач для тіл з однією та взаємодіючими чужорідностями.

Ключові слова: пружне тіло, податливе включення, системи включень, переміщення, напруження, математичні розрізи, крайова задача, коефіцієнт інтенсивності напружень.

Розв'язуються задачі з визначення концентрації напружень у безмежному пружному тілі з тонкими податливими тунельними включеннями після попередньої пластичної його деформації.

Ізольоване пружне включення еліптичного перерізу. Розглянемо безмежне пружне тіло, що містить податливе циліндричне включення еліптичного попереччя, яке жорстко спаяне з матрицею (тілом). Систему декартових координат $Oxyz$ виберемо таким чином, щоб вісь Oy збігалася з циліндричною віссю включення, а поперечний його переріз описувався б так:

$$z = \pm h(x) = \pm \sqrt{a^2 - x^2} / \lambda, |x| \leq a. \quad (1)$$

Тут $\lambda = a/c$, a і c – півосі ($a > c$). Нехай тіло на безмежності піддається дії рівномірно розподілених зусиль розтягу або стиску (втяжка або вальцювання), що спричиняють появу пластичних деформацій, після чого відбувається розвантаження тіла.

Позначимо через e та e_1 середні залишкові пластичні деформації у матриці та включенні, а через $\sigma_{zz}^{(k)}$ – залишкові нормальні напруження на поверхні спаю. Вважатимемо, що розвантаження відбувається за законом Гука, і після його закінчення відсутні розриви у тілі. Це дає змогу прийняти таку умову сумісності деформацій [1]:

$$u_z^{(1)}(x) + u_z^{(2)}(x) = (e - e_1) \cdot h(x), |x| \leq a. \quad (2)$$

Тут: $u_z^{(1)}(x)$ – переміщення точок на поверхні циліндричної порожнини в матриці, що має форму включення, до берегів якої прикладені напруження $\sigma_{zz}^{(k)}$; $u_z^{(2)}(x)$ – переміщення точок поверхні самого включення під дією $\sigma_{zz}^{(k)}$. Якщо виразити $u_z^{(1)}$ і $u_z^{(2)}$ через $\sigma_{zz}^{(k)}$ і підставити в умову (2), то отримаємо рівняння для знаходження невідомих напружень $\sigma_{zz}^{(k)}$. Зміщення $u_z^{(2)}$ можна визначити на основі моделі Вінклера для тонкого пружного включення

$$u_z^{(2)}(x) = \frac{\sigma_{zz}^{(k)}}{2G_1(1+\mu_1)} \cdot z = \frac{\sigma_{zz}^{(k)}}{2G_1(1+\mu_1)} \cdot h(x). \quad (3)$$

Тут G_1 і μ_1 – модуль зсуву й коефіцієнт Пуассона для включення.

Щоб визначити залежність $u_z^{(1)}$ через $\sigma_{zz}^{(k)}$, знесемо граничні умови з поверхні $z = \pm h(x)$ на площину симетрії xOy , користуючись тонкістю включення. Внаслідок приходимо до змішаної крайової задачі для півпростору $z \geq 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(x) &= \sigma_{zz}^{(k)}(x), \quad x \in [-a, a], \quad z = 0, \\ u_z^{(1)}(x) &= 0, \quad x \notin [-a, a], \quad z = 0, \\ \sigma_{xz}(x) &= \sigma_{yz}(x) = 0, \quad z = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

З урахуванням результатів роботи [2] крайова задача (4) зводиться до сингулярного інтегрального рівняння

$$\int_{-a}^a \frac{du_z^{(1)}(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{t-x} = - \frac{\pi(1-\mu)(1-\mu_1)}{(1+\mu_1)[(1-2\mu_1) - \mu_1(1-2\mu)\varepsilon]} \cdot \frac{\sigma_{zz}^{(k)}}{G}; |x| \leq a, \quad (5)$$

де: G і μ – модуль зсуву й коефіцієнт Пуассона матриці; $\varepsilon = G_1/G \leq 1$ – відносна жорсткість включення. За теоремою Ешелбі [3], напруження $\sigma_{zz}^{(k)}$ є сталими, а тому розв'язок рівняння (5) виразиться формулою

$$u_z^{(1)} = \frac{\lambda(1-\mu)(1-\mu_1)}{(1+\mu_1)[(1-2\mu_1) - \mu_1(1-2\mu)\varepsilon]} \cdot \frac{\sigma_{zz}^{(k)}}{G} \cdot h(x), |x| \leq a. \quad (6)$$

Якщо підставити вирази (6) і (3) у співвідношення (2), то можна знайти, що напруження на межі "матриця-включення" є такими:

$$\frac{\sigma_{zz}^{(k)}}{G} = \frac{2\varepsilon(1+\mu_1)[(1-2\mu_1) - \mu_1(1-2\mu)\varepsilon]}{(1-2\mu_1) - \mu_1(1-2\mu)\varepsilon + 2\lambda\varepsilon(1-\mu)(1-\mu_1)} \cdot (e - e_1). \quad (7)$$

Опісля знову повертаємося до крайової задачі математичної теорії трищин (4), з якої визначаємо напруження σ_{zz} та переміщення $u_z^{(1)}$ у тілі й на цій підставі знаходимо [4] коефіцієнт інтенсивності залишкових напружень (КІН) K_I за формулою

$$K_I = - \frac{G}{(1-\mu)} \cdot \lim_{x \rightarrow a-0} \left(\sqrt{2\pi(a-x)} \cdot \frac{du_z^{(1)}}{dx} \right). \quad (8)$$

У нашому випадку вона набуде такого вигляду:

$$K_I = \frac{2(1-\mu_1)(e_1 - e)G_1}{(1-2\mu_1) - \mu_1(1-2\mu)\varepsilon + 2\lambda\varepsilon(1-\mu)(1-\mu_1)} \cdot \sqrt{\pi a}.$$

Користуючись формулою

$$\sigma_{zz}^{(3)} \Big|_{x=\pm(a-0)} = \frac{2K_I}{\sqrt{\pi a}}, \quad (9)$$

знаходимо залишкові напруження в місцях найбільшої концентрації

$$\sigma_{zz}^{(3)} \Big|_{x=\pm(a+0)} = \frac{4\lambda G_1(1-\mu_1)(e_1 - e)}{(1-2\mu_1) - \mu_1(1-2\mu)\varepsilon + 2\lambda\varepsilon(1-\mu)(1-\mu_1)}, \quad (10)$$

де ρ – радіус кривини поперечного перерізу у вершині включення.

Залишкові напруження в тілі з періодичною системою компланарних включень складної конфігурації. Нехай у пружному безмежному тілі, що піддається пластичному деформуванню, міститься в площині xOy система періодично (з періодом d) розташованих однакових компланарних включень, конфігурація яких описується залежністю

$$z = \pm h_1(x) = \pm \frac{d}{2\pi\lambda_1} \cdot \ln \left(\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi a}{d}\right) \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi a}{d}\right) - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{d}\right)}}{1 - \cos\left(\frac{\pi a}{d}\right) \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi a}{d}\right) - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{d}\right)}} \right), \quad |x| \leq a. \quad (11)$$

Тут $\lambda_1 = \frac{d}{2\pi c} \cdot \ln \left(\frac{1 + \sin(\pi a/d)}{1 - \sin(\pi a/d)} \right)$. Вибір конфігурації включень у формі (11) забез-

печує сталість напружень у включеннях, незалежно від зміни d . Можна переконатися, що при $d \rightarrow \infty$ поперечні перерізи включень стають еліпсами, а при $d \rightarrow 2a$ – прямокутниками розміром $2a \times 2c$.

Пружні зміщення $u_z^{(2)}$ у центральному включенні, за аналогією з (3), виражатимуться залежністю

$$u_z^{(2)}(x) = \frac{\sigma_{zz}^{(k)}}{2G_1(1 + \mu_1)} \cdot h_1(x), \quad |x| \leq a. \quad (12)$$

Розв'язання крайової задачі для півпростору $z \geq 0$ з періодичною системою математичних розрізів можна, з використанням результатів [2], звести до інтегрального рівняння типу Прандтля з Гільбертовим ядром

$$\int_{-a}^a \frac{du_z^{(1)}}{dt} \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-x)}{d} \right) dt = - \frac{d(1-\mu)(1-\mu_1)}{(1+\mu_1)[(1-2\mu_1) - \mu_1(1-2\mu)\varepsilon]} \cdot \frac{\sigma_{zz}^{(k)}}{G}; \quad |x| \leq a. \quad (13)$$

Його розв'язок з урахуванням консервативності напружень $\sigma_{zz}^{(k)}$ і того, що

$$\int_{-a}^a h_1'(t) \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-x)}{d} \right) \cdot dt = - \frac{d}{\lambda_1},$$

матиме такий вигляд:

$$u_z^{(1)}(x) = \frac{\lambda_1(1-\mu)(1-\mu_1)}{(1+\mu_1)[(1-2\mu_1) - \mu_1(1-2\mu)\varepsilon]} \cdot \frac{\sigma_{zz}^{(k)}}{G} \cdot h_1(x), \quad |x| \leq a. \quad (14)$$

Якщо залежності (12) і (14) підставити в умову сумісності деформацій

$$u_z^{(1)}(x) + u_z^{(2)}(x) = (e - e_1) \cdot h_1(x),$$

то знайдемо, що

$$\frac{\sigma_{zz}^{(k)}}{G} = \frac{2\varepsilon(1+\mu_1)[(1-2\mu_1) - \mu_1(1-2\mu)\varepsilon]}{(1-2\mu_1) - \mu_1(1-2\mu)\varepsilon + 2\lambda_1\varepsilon(1-\mu)(1-\mu_1)} \cdot (e - e_1). \quad (15)$$

Внаслідок розв'язання інтегрального рівняння (13), з урахуванням виразу (11), отримаємо зміщення $u_z^{(1)}$ в тілі після попередньої пластичної деформації

$$u_z^{(1)}(x) = \frac{2\lambda_1\varepsilon(1-\mu)(1-\mu_1)(e - e_1)}{(1-2\mu_1) - \mu_1(1-2\mu)\varepsilon + 2\lambda_1\varepsilon(1-\mu)(1-\mu_1)} \cdot h_1(x), \quad |x| \leq a. \quad (16)$$

Знання зміщень $u_z^{(1)}$ дає змогу обчислити КІН K_I

$$K_I = \frac{2(1-\mu_1)(e_1 - e)G_1\sqrt{\pi a}}{(1-2\mu_1) - \mu_1(1-2\mu)\varepsilon + 2\lambda_1\varepsilon(1-\mu)(1-\mu_1)} \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\pi a/d)}{(\pi a/d)}}. \quad (17)$$

Якщо для конфігурації (11) радіус заокруглення у вершині рівний $\rho_1 = \frac{a}{\lambda_1^2} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\pi a/d)}{(\pi a/d)}$, то за формулою (9) можна знайти концентрацію залишкових напружень у тілі біля включень

$$\sigma_{zz}^{(s)} \Big|_{x=\pm(a+0)} = \frac{4\lambda_1 G_1(1-\mu_1)(e_1 - e)}{(1-2\mu_1) - \mu_1(1-2\mu)\varepsilon + 2\lambda_1\varepsilon(1-\mu)(1-\mu_1)}. \quad (18)$$

Залишкові напруження в тілі з періодичною системою паралельних включень складної конфігурації. Нехай у пружному безмежному тілі, що піддається механічній обробці на нескінченності, міститься система періодично (з періодом d) розташованих вздовж осі Oz тунельних включень, площини симетрії яких є паралельні. Для того, щоб напруження всередині включень були незмінними, будемо вимагати, щоб конфігурація включень описувалася так:

$$z = \pm h_2(x) = \pm \frac{d}{2\pi\lambda_2} \cdot \operatorname{arctg} \left(\operatorname{ch} \left(\frac{2\pi a}{d} \right) \cdot \sqrt{\operatorname{th}^2 \left(\frac{2\pi a}{d} \right) - \operatorname{th}^2 \left(\frac{2\pi x}{d} \right)} \right), \quad (19)$$

де $\lambda_2 = \frac{d}{2\pi c} \cdot \operatorname{arctg} \left(\operatorname{sh} \left(\frac{2\pi a}{d} \right) \right)$. При $d \rightarrow \infty$ контур (19) стає еліптичним, а при $d \rightarrow 0$ – прямокутником розміром $2a \times 2c$.

Пружні зміщення $u_z^{(2)}$ у центральному включенні виражатимуться через контактні напруження $\sigma_{zz}^{(k)}$ на межі розділу:

$$u_z^{(2)}(x) = \frac{\sigma_{zz}^{(k)}}{2G_1(1 + \mu_1)} \cdot h_2(x), \quad |x| \leq a. \quad (20)$$

Якщо використати працю [2], то крайову задачу для простору з періодичною системою паралельних плоских математичних розрізів зведемо до інтегрального рівняння щодо $u_z^{(1)}$

$$\int_{-a}^a \frac{du_z^{(1)}}{dt} \cdot \operatorname{cth} \left(\frac{2\pi(t-x)}{d} \right) dt = - \frac{d(1-\mu)(1-\mu_1)}{2(1+\mu_1)[(1-2\mu_1) - \mu_1(1-2\mu)\varepsilon]} \cdot \frac{\sigma_{zz}^{(k)}}{G}; \quad |x| \leq a. \quad (21)$$

Оскільки $\sigma_{zz}^{(k)} = \text{const}$, а $\int_{-a}^a h_2'(t) \cdot \operatorname{cth} \left(\frac{2\pi(t-x)}{d} \right) \cdot dt = - \frac{d}{2\lambda_2}$, то з рівняння (21)

знайдемо невідому функцію $u_z^{(1)}$:

$$u_z^{(1)}(x) = \frac{\lambda_2(1-\mu)(1-\mu_1)}{(1+\mu_1)[(1-2\mu_1) - \mu_1(1-2\mu)\varepsilon]} \cdot \frac{\sigma_{zz}^{(k)}}{G} \cdot h_2(x), \quad |x| \leq a. \quad (22)$$

Використовуючи умову сумісності деформацій

$$u_z^{(1)}(x) + u_z^{(2)}(x) = (e - e_1) \cdot h_2(x)$$

та залежності (20) і (22), виразимо напруження $\sigma_{zz}^{(k)}$ так:

$$\frac{\sigma_{zz}^{(k)}}{G} = \frac{2\varepsilon(1 + \mu_1)[(1 - 2\mu_1) - \mu_1(1 - 2\mu)\varepsilon]}{(1 - 2\mu_1) - \mu_1(1 - 2\mu)\varepsilon + 2\lambda_2\varepsilon(1 - \mu)(1 - \mu_1)} \cdot (e - e_1). \quad (23)$$

Тоді обчислюємо переміщення $u_z^{(1)}$ у тілі

$$u_z^{(1)}(x) = \frac{2\lambda_2\varepsilon(1 - \mu)(1 - \mu_1)(e - e_1)}{(1 - 2\mu_1) - \mu_1(1 - 2\mu)\varepsilon + 2\lambda_2\varepsilon(1 - \mu)(1 - \mu_1)} \cdot h_2(x), \quad |x| \leq a. \quad (24)$$

та КІН K_I

$$K_I = \frac{2(1 - \mu_1)(e_1 - e)G_1\sqrt{\pi a}}{(1 - 2\mu_1) - \mu_1(1 - 2\mu)\varepsilon + 2\lambda_2\varepsilon(1 - \mu)(1 - \mu_1)} \cdot \sqrt{\frac{th(2\pi a/d)}{(2\pi a/d)}}.$$

Для конфігурації (19) радіус заокруглення у вершинах $x = \pm a$ дорівнює

$$\rho_2 = \frac{a}{\lambda_2^2} \cdot \frac{th(2\pi a/d)}{(2\pi a/d)}, \text{ відтак можна обчислити концентрацію залишкових напружень у тілі біля включень}$$

$$\sigma_{zz}^{(3)} \Big|_{x=\pm(a+0)} = \frac{4\lambda_2 G_1(1 - \mu_1)(e_1 - e)}{(1 - 2\mu_1) - \mu_1(1 - 2\mu)\varepsilon + 2\lambda_2\varepsilon(1 - \mu)(1 - \mu_1)}. \quad (25)$$

Висновки. Маючи формули для обчислення напружень у включеннях $\sigma_{zz}^{(k)}$ та напружень $\sigma_{zz}^{(3)}$ у місцях найбільшої концентрації, можна за допомогою критеріїв міцності досліджувати міцність і працездатність тіл, що містять податливі чужорідності, якщо тіла піддавалися попередньому пластичному деформуванню.

Література

1. Андрейків О.С. Залишкові напруження в металах біля включень після пластичного деформування / О.С. Андрейків, М.М. Стадник, І.Я. Горбачевський // Доповіді АН УРСР. – Сер.: А. – К., 1981. – № 2. – С. 42-44.
2. Панасюк В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацьшин. – К.: Вид-во "Наук. думка", 1976. – 444 с.
3. Eshelby J.N. Elastic inclusion and inhomogeneities / J.N. Eshelby // Progress in Solid Mechanics. – 1961. – Vol. 2. – Pp. 88-140.
4. Стадник М.М. Определение напряженно-деформированного состояния в теле с системой упругих туннельных включений / М.М. Стадник, И.Я. Горбачевский. – Львов: Изд-во ФМИ АН УССР. – 1986. – Препринт АН УССР № 110. – 52 с.

Стадник М.М., Горбачевский И.Я. Подход к определению концентрации остаточных напряжений в телах с упругими туннельными включениями

Предложен подход к определению концентрации напряжений в упругих телах с туннельными чужеродностями, что поддаются предварительной механической обработке за предел текучести, после чего освобождаются от внешних усилий. В пределах подхода получены в замкнутом виде решения задач для тел с изолированным или взаимодействующими включениями.

Ключевые слова: упругое тело, податливое включение, системы включений, перемещение, математические разрезы, граничная задача, коэффициент интенсивности напряжений.

Stadnyk M.M., Horbachevskyy I.Ya. Approach to the determination of the concentration of residual stresses in bodies with elastic tunnel inclusions

An approach to the determination of residual stress concentration in elastic solids with tunnel inhomogeneities that have been under pre-plastic deformation is proposed. The closed form solutions of problems for bodies with isolated and interacting inclusions were obtained.

Keywords: elastic body, non-rigid inclusion, systems of inclusions, displacements, mathematical slits, boundary problem, stress intensity factors.

УДК 535.343.2 Проф. З.П. Чорний, д-р фіз.-мат. наук; ст. викл. І.Б. Пірко; доц. В.М. Салапак, канд. фіз.-мат. наук; асист. М.В. Дячук; доц. О.Р. Онуфрив, канд. фіз.-мат. наук – НЛТУ України, м. Львів

КІНЕТИКА НАРОСТАННЯ ЦЕНТРІВ ЗАБАРВЛЕННЯ В ІОННИХ КРИСТАЛАХ. IV. F-ЦЕНТРИ В КРИСТАЛАХ CaF₂-O²⁻

Досліджено радіаційні параметри кристалів CaF₂-O²⁻, опромінених іонізуючою радіацією за T=350° К. Розраховано кінетику наростання (F-O)-комплементарних пар центрів забарвлення та їх граничну концентрацію у кристалі. Показано, що гранична концентрація F-центрів в 25-30 разів вища порівняно з граничною концентрацією F_A-центрів і в 4 рази вища за граничну концентрацію M_A⁺-центрів.

Ключові слова: кристали, центри забарвлення, радіація.

Вступ. Радіаційні властивості кристалів флюоритів, легованих киснем, інтенсивно досліджували протягом останніх 50 років [1-5]. Оскільки структура генерованих радіацією центрів забарвлення залежить від температури, за якої опромінюється кристал, такі дослідження здійснювали за низьких температур або за кімнатної температури. У цій роботі дослідження зосереджені на специфіці перебігу радіаційних процесів за температур, вищих за кімнатну температуру.

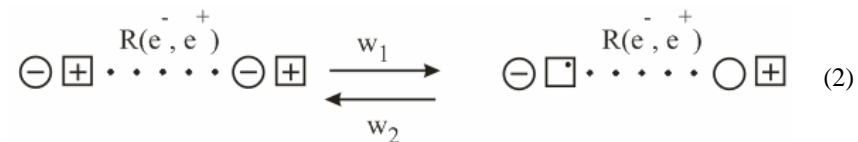
1. Радіаційні процеси в кристалах CaF₂-O²⁻

Кисень входить у ґратку кристала у вигляді O²⁻-іонів заміщення [5, 6, 7]. Надлишковий негативний заряд домішкового іона компенсує позитивно заряджена вакансія іона фтору, яка утворює з іоном кисню домішково-вакансійний диполь (ДВД) типу ⊖ ⊕, де ⊖ – іон кисню, ⊕ – вакансія фтору. За T < 150 К ДВД нерухомі в ґратці кристала флюорита [6], в області температур T=150-300 К існує ротація ДВД [6], а за T > 300 К – їх термодисоціація:



Зміна структури дорадіаційних дефектів обумовлює зміну в структурі центрів забарвлення в процесі нагріву кристала:

- за T < 150 К радіаційні процеси описуються таким рівнянням [7]:



- в області температур T=150-300 К утворення центрів забарвлення протікає за схемою [8]: