

Pastukh O.A. Generalized mathematical model of radio technical and radiocomputer systems

Mathematical description (mathematical model) of the system independent from the subject field of system use is provided. Mathematical model has a high level abstraction that allows a wide range of radio technical and radio computer systems to be covered, and also a proper level constructivism that provides a possibility to consider particular features of these systems.

Keywords: system, mathematical description, radio technical, radio computer.

УДК 004.9 *Аспір. Б.Б. Дмитришин¹ – НУ "Львівська політехніка"*

МЕТОД ГРАТОК БОЛЬЦМАНА ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПОТОКУ РІДИНИ В МІКРОПОТОКОВИХ СИСТЕМАХ

Описано застосування методу ґраток Больцмана (Lattice Boltzmann Methods, LBM) для моделювання мікропотоків у рідинних мікроелектромеханічних системах (МЕМС), наведено обчислювальну схему на прикладі двохвимірної системи D2Q9 та розроблено новий алгоритм LBM, який дає змогу реалізувати більш ефективну схему обчислень та забезпечити можливість паралелізації обчислень на багатоядерних та багатопроцесорних системах. Запропонований метод ґраток Больцмана і його алгоритм для створення прикладного програмного забезпечення дає змогу пришвидшити час виконання обчислень та збільшити точність отриманих результатів. Окрім цього, алгоритм можна легко інтерпретувати на апаратній частині сучасних багатопроцесорних систем.

Ключові слова: метод ґраток Больцмана, МЕМС, алгоритм, мікропотік, моделювання.

Вступ. На сьогодні основні тенденції у розвитку науки та техніки спрямовані на створення ефективних і точних алгоритмів, які швидко можуть розв'язувати задачі будь-якої складності. Чисельний метод моделювання гідродинаміки Lattice Boltzmann Method, LBM, який перекладається, як метод ґраткових рівнянь Больцмана демонструє кращі результати, ніж інші відомі методи (наприклад метод скінченних елементів) у легкості розпаралелювання, можливості моделювання багатофазних потоків, моделювання потоків у пористих середовищах. Окрім цього, обчислювальний алгоритм містить тільки найпростіші арифметичні операції. Метод досить новий, перші комерційні продукти на його основі стали з'являтися в останні десятиліття.

Моделювання гідродинаміки потрібне у таких сферах[1]:

- літакобудування, ракетобудування, автомобілебудування;
- промислова хімія (розподіл речовин, хімічні реактори);
- метеорологія, геологія (потоки рідини крізь пористі середовища, пісковики, дамби);
- медицина (потоки крові, лімфи, реагентів).

1. Рівняння Нав'є-Стокса. Гідро- і аеродинаміка в макромасштабі описуються рівнянням Нав'є-Стокса. Воно показує, яким буде тиск, густина і швидкість рідини в кожній точці простору в кожен момент часу, залежно від початкових і граничних умов і параметрів середовища.

З іншого боку, для розріджених газів справедливе рівняння Больцмана, яке описує, як змінюється густина розподілу часток за швидкостями в кожній точці простору з часом. Якщо проінтегрувати розподіл часток за швидкостями в даній точці, можна отримати густину і макроскопічну швидкість в даній точці. Іншими словами, макроскопічне рівняння Больцмана еквівалентно рівнянню Нав'є-Стокса. Варіант рівняння Нав'є-Стокса для макроскопічної динаміки рідин, які не стискаються, і газів виглядає так:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 v + f, \tag{1}$$

де: v – швидкість потоку, ρ – густина рідини, p – тиск рідини, f – зовнішні сили (наприклад гравітація).

2. Рівняння Больцмана. Це рівняння оперує функцією розподілу ймовірності густини частинок по координатах і за швидкостями, $f(r, v, t)$. Величина $f(x, y, z, V_x, V_y, V_z, t) dx, dy, dz, dV_x, dV_y, dV_z$, показує, яка частка частинок в момент часу t знаходиться в кубі від x до $x + dx$, від y до $y + dy$, від z до $z + dz$ зі швидкостями в діапазоні від V_x до $V_x + dV_x$, від $V_y + dV_y$, від $V_z + dV_z$. Її також можна записати у вигляді $f(r, V, t) d^3 r d^3 V$.

Ця функція зазвичай нормується на масу газу в системі, яка досліджується, тому макроскопічна густина газу в кожній точці визначається як сума (інтеграл) від густини ймовірності в даній точці по всіх можливих значеннях швидкості, а саме:

$$\rho = \int f dv. \tag{2}$$

Аналогічно, макроскопічну швидкість можна визначити через

$$\rho u = \int f v dv. \tag{3}$$

Основна ідея для виведення рівняння схожа на виведення рівняння Нав'є-Стокса. Для цього виділимо в даний момент часу в даному невеликому об'ємі пучок молекул, які летять у даному напрямку. Через невеликий проміжок часу dt вони опиняться в сусідній точці, їх швидкість сама по собі зміниться через прискорення молекул зовнішніми силами. Окрім цього, на даному відрізку шляху деякі молекули зіткнуться з іншими, змінять свою швидкість.

Це можна записати в такому вигляді:

$$\int \left(r + v dt, v + \frac{F}{m} dt, t + dt \right) d^3 r d^3 v - f(r, v, t) d^3 r d^3 v = dN_{coll}, \tag{4}$$

де: F – зовнішня сила, m – маса молекули, dN_{coll} – зміна числа частинок у пучку внаслідок зіткнень.

Візьмемо стандартне наближення для величини dN_{coll} – наближення Батнагара – Гросса – Крука (BGK). У цьому наближенні dN_{coll} дорівнює:

$$-\frac{f - f^{eq}}{\tau} d^3 r d^3 v dt, \tag{5}$$

де: f^{eq} – рівноважна функція розподілу Максвелла – Больцмана, а τ – час релаксації. Внаслідок отримуємо:

¹ Наук. керівник: доц. О.М. Матвійків, канд. техн. наук

$$f\left(r + vdt, v + \frac{F}{m}dt, t + dt\right) - f(r, v, t) = -\frac{f - f^{eq}}{T} dt. \quad (6)$$

Значимо, що f^{eq} залежить від макроскопічної густини і швидкості в даній точці (тобто неявно від координати і часу). Саме це рівняння включимо до подальшого розгляду, але поділимо на dt і приведемо до вигляду:

$$\frac{df}{dt} + v \cdot \nabla f + \frac{F}{m} \nabla_v f = -\frac{f - f^{eq}}{T} \quad (7)$$

де ∇ з індексом V – це ∇ по змінним швидкості.

3. Дискретне рівняння Больцмана. Щоб отримати можливість моделювати динаміку неперервного рівняння Больцмана на комп'ютері, потрібно його дискретизувати. Для цього спочатку введемо рівномірну сітку просторових координат – крок сітки нехай буде однаковим по всіх осях. Поведінку рідини визначатимемо саме у вузлах сітки. Фактично, дозволимо молекулам знаходитися тільки в певних просторових вузлах. Окрім цього, дискретизуємо час – будемо визначати стан рідини в рівновіддалені один від одного моменти часу. Будемо вважати, що при нескінченно малому інтервалі часу і кроці просторової ґратки ця дискретна система перейде в звичайне рівняння Больцмана, яке, своєю чергою, переходить до рівняння Нав'є-Стокса у макроскопічному вимірі.

Для простоти нижче припускаємо, що зовнішні сили відсутні. Пронумеруємо дозволених напрямки швидкості від 1 до Q з індексом i . Якщо тепер масу частинок, що пролітають з даного вузла в напрямку i за крок часу f_i , то рівняння (6) запишеться:

$$f_i(r + v_i, t + 1) - f_i(r, t) = -\frac{f_i - f_i^{eq}}{T}. \quad (8)$$

Тут враховано, що крок за часом дорівнює одиниці, і замінено всі dt з (6) на одиницю. f_i^{eq} позначає дискретну рівноважну густину розподілу, що залежить від макроскопічних маси і швидкості в даному вузлі. Не вказуємо з якого саме вузла буде використовуватись f_i^{eq} із $r + Vi$ в момент часу $t + 1$ або з r в момент часу t . Тоді рівняння вище можна розкласти на дві складові, поширення (streaming step) і зіткнення (collision step).

Крок поширення:
$$f_i(r + v_i, t + 1) - f_i(r, t) = -\frac{f_i - f_i^{eq}}{T} \quad (9)$$

Крок зіткнення:
$$f_i(r, t) = \tilde{f}_i(r, t) - \frac{\tilde{f}_i - f_i^{eq}}{T} \quad (10)$$

Тут \tilde{f}_i – позначає масу частинок, які прийшли у вузол по напрямку i , але ще не зіткнулись з рештою частинок, які теж прийшли у цей вузол. Крок поширення деколи називають кроком адвекції.

Для дискретизованих напрямків швидкості маса і макроскопічна швидкість в кожному вузлі будуть розраховуватися як:

$$\rho = \sum_i f_i, \rho u = \sum_i f_i v_i. \quad (11)$$

Тут і далі ми всюди записуємо густину замість маси, оскільки при одиничному просторовому кроці решітки на кожен вузол припадає одиничний об'єм, і тому маса і щільність співпадуть за значенням.

Таким чином, на кожному кроці обчислювальної схеми необхідно "поширювати" частинки, тобто перемістити частинки, що летіли з вузла r в напрямку i у вузол $r + Vi$. Це потрібно проробити для всіх частинок і напрямів. Після цього необхідно перерахувати маси, швидкості, рівноважні функції розподілу. Нарешті, необхідно "зіттовхнути" частинки, які прилетіли в даний вузол – тобто перерозподілити частинки за напрямками.

4. Ілюстрація схеми обчислень. Проілюструємо обчислювальну схему на прикладі двовимірної системи. Дискретизація на просторові вузли і зв'язки між ними (тобто дозволених напрямки швидкості) зображена на рисунку нижче (рис. 1). Просторові вузли позначені кружечками, зв'язки між ними – тонкими лініями.

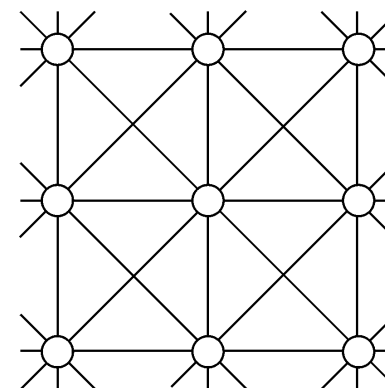


Рис. 1. Просторові вузли і зв'язки між ними

На рис. 2 зображена одна ітерація пари "течія /зіткнення". Кольорові стрілки відображають потоки молекул. Інтенсивність кольору відображає масу молекул, що летять в даному потоці, довжина стрілок приблизно відповідає шляху, пройденому потоком за крок по часу.

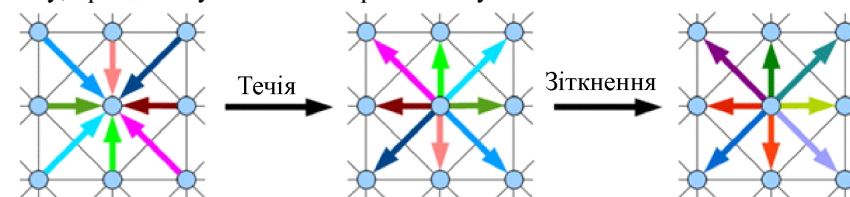


Рис. 2. Ітерація "течія – зіткнення"

5. Просторові решітки. У LBM-методі під решіткою розуміють набір дозволених векторів швидкості (однаковий для кожного просторового вузла). Це узгоджується зі стандартним математичним визначенням про решітку як про сутність, за допомогою якої шляхом паралельних переносів можна отримати всю просторову сітку.

У методі LBM будь-яка решітка повинна містити нульовий вектор з вузла в себе самого. Саме він описує частинки, які нікуди не летять з даного вузла. У LBM решітка зазвичай позначаються аббревіатурою DnQt, де: n – розмірність простору, m – число векторів в решітці. Наприклад, D2Q9, D3Q19 і т.д.

У двовимірному просторі LBM решітка може складатися, наприклад, з 5 векторів (2 вертикальних, 2 горизонтальних і нульовий вектор з вузла в себе самого), а може з 9 векторів, як на рисунку вище (2 вертикальних, 2 горизонтальних, 4 діагональних, один нульовий). Це решітки D2Q5 і D2Q9, відповідно.

Очевидними факторами для вибору решіток є:

1. Точність моделювання. Інтуїтивно зрозуміло, що чим більше векторів у решітці, тим точніше моделювання.
2. Обчислювальні затрати. Розрахунок на решітці D2Q5 буде швидшим від розрахунку на D2Q9.

Зазвичай використовуються решітки D2Q9, D3Q15, D3Q19. Гратки D2Q9 і D3Q19 зображені нижче (рис. 3). Базисні вектори решітки зазвичай позначаються як e_i або c_i (вони співпадають зі швидкостями V_i , введеними раніше при одиничному кроці за часом). Нижче будемо використовувати позначення e_i .

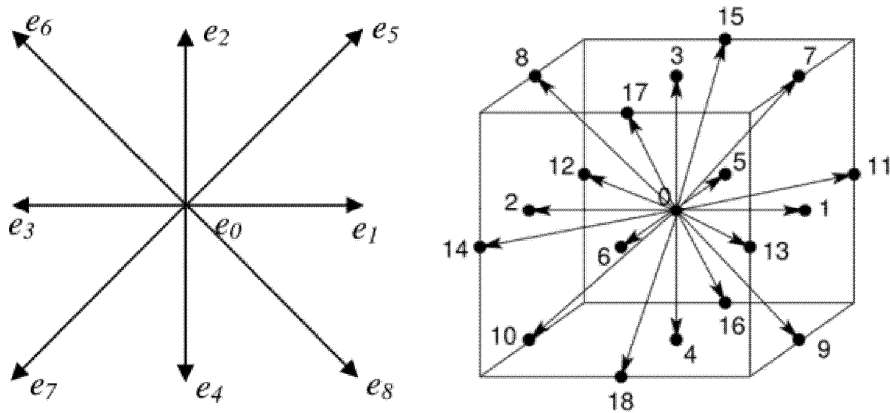


Рис. 3. Гратки D2Q9 і D3Q19

Випишемо базисні вектори для D2Q9:

$$e_i = \begin{cases} (0,0) & i=0 \\ (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1), & i=1,2,3,4. \\ (1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1), & i=5,6,7,8 \end{cases} \quad (11)$$

і для D3Q19:

$$e_i = \begin{cases} (0,0,0) & i=0 \\ (\pm 1,0,0), (0,\pm 1,0), (0,0,\pm 1), & i=1,2,\dots,5,6 \\ (\pm 1,\pm 1,0), (\pm 1,0,\pm 1), (0,\pm 1,\pm 1) & i=7,8,\dots,17,18 \end{cases} \quad (12)$$

Ще раз зауважимо, що всюди припускаємо, що крок за часом дорівнює одиниці, тому $V_i = e_i$.

6. Алгоритму для методу ґраток Больцмана. На рис. 4 зображено схему обчислень для багатопроесорних систем за методом ґраток Больцмана. Алгоритм забезпечує можливість розділення схеми обчислень на блоки, які легко інтерпретувати на апаратній частині багатьох багатопроесорних систем.

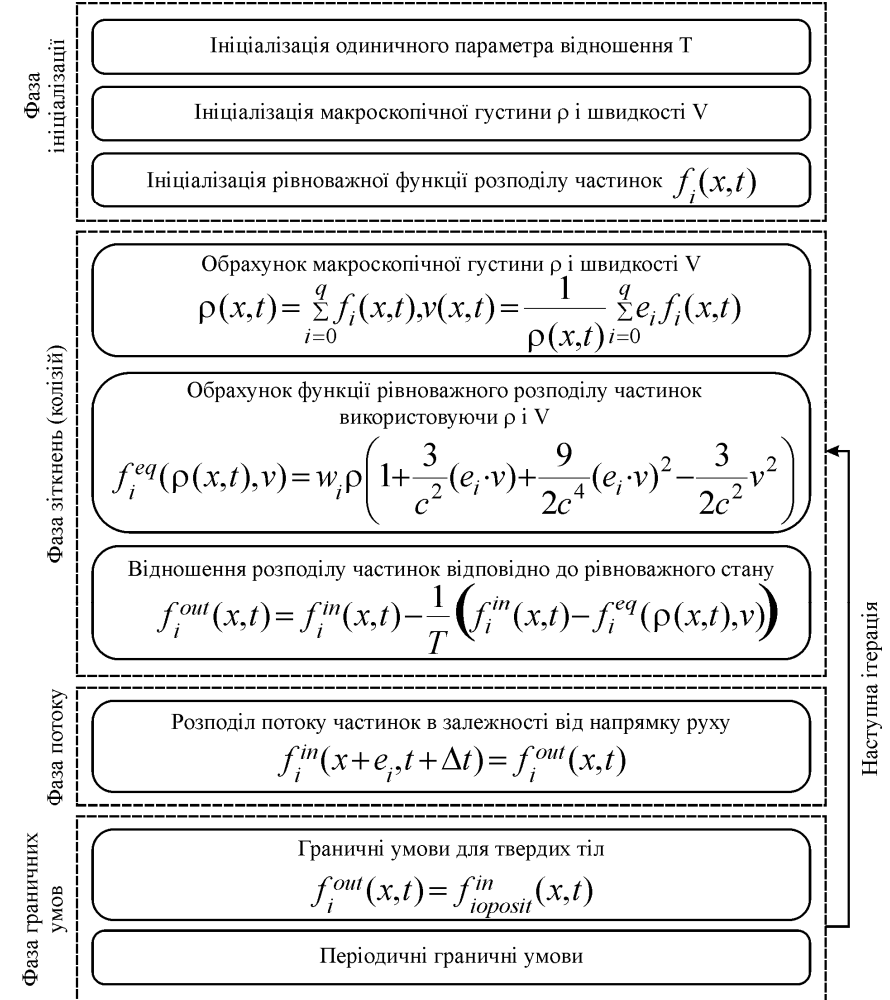


Рис. 4. Схема алгоритму для методу ґраток Больцмана

Висновки. У роботі описано застосування методу ґраток Больцмана (Lattice Boltzmann Methods, LBM) для моделювання мікропотоків у рідинних мікроелектромеханічних системах (MEMS) та наведено обчислювальну схему на прикладі двохвимірної системи D2Q9 та розроблено новий алгоритм LBM, який дає змогу реалізувати більш ефективну схему обчислень та забезпечити можливість паралелізації обчислень на багатоядерних та багатопроесорних системах. Із метою забезпечення максимальної відповідності розробленого ал-

горитму апаратній складовій багатоядерних та багатопроцесорних систем обчислення було розділено на блоки, які легко інтерпретувати на апаратній частині сучасних багатопроцесорних систем.

Література

1. He X. Lattice Boltzmann model for the incompressible Navier-Stokes equations / X. He, L.S. Luo, J. Stat. Phys. 2005. – Pp. 927-944.
2. Owens J.D. GPU computing / J.D. Owens, M. Houston, D. Luebke, S. Green // Proceedings of the IEEE, 96(5), 2008. – Pp. 879-899.
3. Bastien Chopard. How to improve the accuracy of Lattice Boltzmann calculations / Chopard Bastien. Technical report, LBMMethod.org, 2008. – Pp.
4. Fredrickson C.K. Macro-to-micro interfaces for micro fluidic. devices / C.K. Fredrickson and Z.H. Fan, Lab Chip, 4, 2004. – 526 p.
5. Minhang B. Analysis and Design Principles of MEMS Devices / B. Minhang. – 1st edition: Elsevier Science, 2005. – 328 p.

Дмитришин Б.Б. Метод решеток Больцмана для моделирования потока жидкости в микропоточковых системах

Сделано описание применения метода решеток Больцмана (Lattice Boltzmann Methods, LBM) для моделирования микропоточков в жидкостных микроэлектромеханических системах (МЭМС), приведена вычислительная схема на примере двухмерной системы D2Q9 и разработан новый алгоритм LBM, который позволяет реализовать более эффективную схему вычислений и обеспечить возможность параллелизации вычислений на многоядерных и многопроцессорных системах. Предложенный метод решеток Больцмана и его алгоритм для создания прикладного программного обеспечения позволяет ускорить время выполнения вычислений и увеличить точность полученных результатов. Кроме этого, алгоритм можно легко интерпретировать в аппаратной части современных многопроцессорных систем.

Ключевые слова: метод решеток Больцмана, МЭМС, алгоритм, микро поток, моделирование.

Dmytryshyn B.B. Lattice boltzmann method for simulation of fluid flow in microfluidic systems

This paper describes the Lattice Boltzmann Methods (LBM) for simulation of liquid microflows in microelectromechanical systems (MEMS) and the computational scheme for D2Q9. New algorithm for LBM, which allows to get more efficient computation scheme and enable parallelization computations on multicore and multiprocessor systems, was developed. Proposed Lattice Boltzmann method and its algorithm for creating software application allows to reduce runtime process and increase the accuracy of the results. In addition, the algorithm can be easily interpreted on the hardware of modern multiprocessor systems.

Keywords: Lattice Boltzmann Method, MEMS, algorithm, microflow, simulation.

УДК 65.050.12

Доц. В.С. Лучик, д-р екон. наук; аспір. М.В. Лучик¹ –
Подільський державний аграрно-технічний університет

ПОБУДОВА МОДЕЛІ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ РІВНЯ ЕКОНОМІЧНОЇ БЕЗПЕКИ АГРАРНОЇ ГАЛУЗІ

Для оцінювання рівня економічної безпеки аграрної галузі запропоновано використовувати такі функціональні компоненти: фінансову, інвестиційну, інноваційну, виробничо-технологічну, екологічну, маркетингову, політико-правову, соціальну, інтелек-

туально-кадрову, зовнішньоекономічну, інфраструктурну. Для вирішення цієї задачі побудовано модель у вигляді задачі математичного програмування, знаходження оптимального розв'язку якої здійснено градієнтним методом.

Ключові слова: економічна безпека аграрної галузі, оцінка рівня економічної безпеки, моделювання економічної безпеки, задача математичного програмування.

Постановка проблеми. Теоретичні та методологічні аспекти створення механізму забезпечення економічної безпеки аграрної галузі, в основі якого лежить комплексна оцінка складових підсистем (фінансова, інвестиційна, інноваційна, виробничо-технологічна, екологічна, маркетингова, політико-правова, соціальна, інтелектуально-кадрова, зовнішньоекономічна, інфраструктурна), моніторинг та оперативний контроль рівня економічної безпеки АПК, потребують подальшого дослідження. Рішення цієї проблеми має важливе значення з позиції як поточного стану справ в аграрній галузі, так і подальшого розвитку за рахунок забезпечення конкурентних переваг аграрної продукції.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В умовах глобалізації економіки питання економічної безпеки є вирішальними в дискусіях щодо вибору альтернативних напрямів розвитку національної економіки, що відображено в працях Л. Абалкіна, О. Барановського, О. Власюка, В. Гапоненко, В. Геєця, М. Скрипниченко, Л. Уткіна, А. Татаркіна та ін. Значний внесок у теорію економічної безпеки агропромислового комплексу зробили М. Кропивко, М. Кузубова, Н. Кулагіна, М.В. Месель-Веселяк, Б. Пасхавер, П. Саблук, А. Светлаков та ін. Незважаючи на це, задачі моделювання економічної безпеки аграрної галузі і на цій основі прогнозування стійкості розвитку аграрної галузі та економіки держави загалом залишаються повністю не дослідженими і тому потребують більш детального розгляду.

Постановка цілей. Метою дослідження є побудова моделі оцінювання рівня економічної безпеки аграрної галузі.

Виклад основного матеріалу дослідження. Головним критерієм забезпечення економічної безпеки галузі є захист інтересів галузі від різного роду загроз та створення умов для її функціонування та розвитку. Такий підхід до визначення економічної безпеки галузі є наближенням до формулювання економічної безпеки держави і національної безпеки загалом. Інтереси галузі становлять частину широкого спектра об'єктів національної безпеки, причому суб'єктивно виділяються і динамічно пов'язані з реалізацією державою економічної та соціальної політики. Загрози і ризики можна віднести до численних деструктивних факторів безпеки, які мають широкий діапазон негативних проявів, зокрема небезпека, конфлікт, криза, катастрофа, деформаційні процеси тощо. Загрози в контексті економічної безпеки постійно трансформуються і протягом короткого часу вони можуть перетворюватися з реальних в потенційно деструктивні й навпаки. Захист або захищеність реалізується у вигляді заходів, пов'язаних із забезпеченням стабільного і нормального розвитку галузі та економіки країни загалом. З певним припущенням можна стверджувати, що будь-які механізми та інструменти, орієнтовані на забезпечення сталого розвитку економіки, можна розглядати як заходи із захисту економічної безпеки.

Основною проблемою під час оцінювання рівня економічної безпеки аграрної галузі є системне виділення тих показників, порівняння яких з порогови-

¹ Наук. керівник: проф. К.Б. Волошук, д-р екон. наук