5. ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ГАЛУЗІ

УДК 517.95+534.1 *Доц. П.Я. Пукач, д-р техн. наук – НУ "Львівська політехніка"*

КОЛИВАННЯ У ДЕЯКИХ СИЛЬНО НЕЛІНІЙНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМАХ ІЗ БАГАТЬМА СТУПЕНЯМИ ВІЛЬНОСТІ

Аналітичні методи для нелінійних систем з одним ступенем вільності узагальнено на певний клас нелінійних систем зі скінченним числом ступенів вільності. Застосування аналітичних підходів на базі поєднання класичних методів нелінійної механіки та хвильової теорії руху дає змогу зробити загальні висновки щодо важливих питань аналізу динамічних процесів. Висновки, отримані за допомогою апарату спеціальних функцій, дають змогу отримати характеристики динаміки сильно нелінійних систем з багатьма ступенями вільності, які випливають з аналізу розв'язків відповідних диференціальних рівнянь.

Ключові слова: нелінійні коливання, сильно нелінійна система, резонанс, спеціальні функції, амплітудно-частотна характеристика.

Вступ. Актуальність теми та огляд літератури. Проблема розроблення ефективних аналітичних методів, які дають змогу отримати оптимальні інженерні рішення за рахунок вибору параметрів коливальної системи, тісно зв'язана з проблемою побудови і дослідження розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, що описують рухи механічних систем. Цей факт випливає з аналізу публікацій, які стосуються аналітичних досліджень коливальних процесів систем із зосередженими масами [1-3] та ін. Класичні аналітичні методи для нелінійних систем з одним ступенем вільності [4] узагальнені на системи зі скінченним числом ступенів вільності [5, 6]. Однак зростання кількості ступенів вільності системи призводить до значного ускладнення аналітичних розрахунків і не приводить до точніших результатів. Застосування ж чисельних методів у багатьох випадках не дає змоги зробити загальні висновки щодо важливих питань динаміки: стійкість руху, прогнозування резонансних явищ, добір раціональних параметрів систем на стадії проектування з метою забезпечення заданих законів руху, певних амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) тощо.

Ефективні загальні висновки щодо характеристик динамічних процесів можна зробити тільки за наявності адекватних математичних моделей шляхом детального аналізу розв'язків відповідних диференціальних рівнянь. Найбільш цілісну і завершену структуру дослідження нелінійних коливальних систем з малим параметром отримано в [7], де так званий асимптотичний метод КБМ узагальнений на випадок неавтономних систем та систем із багатьма ступенями вільності. Асимптотичний метод КБМ розвинув В.М. Волосов і на випадок складніших систем [8]. Динамічні процеси, які відбуваються у системах зі скінченним числом ступенів вільності, описуються системами звичайних диференціальних рівнянь другого порядку [1, 9-12]. Кількість рівнянь такої системи залежить від числа ступенів вільності. Для опису динамічних процесів у системах з розподіленими параметрами використовують диференціальні рівняння з частинними похідними. Наявність навіть "малих нелінійностей" у вказаних системах стає причиною значних труднощів їх аналітичного дослідження. Однак наявність у реальних механічних системах дисипативних і зовнішніх збурювальних сил у багатьох випадках призводить до швидкого затухання коливань з вищими частотами і встановлення у них динамічних процесів з частотою, яка близька до одного зі спектра основних частот (у більшості випадків до першої основної частоти чи частоти вимушеного збурення).

Врахування зазначеної вище властивості нелінійних динамічних систем при побудові наближених розв'язків диференціальних рівнянь, які описують коливальні процеси систем, істотно спрощує застосування математичного апарату (асимптотичних методів нелінійної механіки зокрема). Одночастотний метод побудови двопараметричної множини розв'язків є ефективним у дослідженні складних коливальних систем. Для деяких класів механічних систем (сильно нелінійних з n ступенями вільності, нелінійних систем з розподіленими параметрами) цей метод є станом на цей час єдиним можливим аналітичним методом дослідження.

Нормальні коливання деяких класів консервативних систем із зосередженими масами. Аналітичне дослідження динамічних процесів сильно нелінійних систем із багатьма ступенями вільності набагато складніше, ніж для квазілінійних їх аналогів чи навіть сильно нелінійних систем із одним ступенем вільності. Це зв'язано із тим, що для сильно нелінійних коливальних систем не має місця принцип суперпозиції коливань, а отже, аналіз динамічного процесу можна проводити тільки на базі частинних розв'язків або застосування чисельних методів інтегрування відповідних диференціальних рівнянь. Прикладами сильно нелінійних систем, для яких вдається застосувати аналітичні методи побудови розв'язків відповідних математичних моделей процесу, можуть бути системи, потенціальна енергія яких визначається відповідно до залежностей

$$\mathrm{P}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum c_{r_1 r_2 \ldots r_n} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_n^{\nu_n} \qquad (1)$$

або

$$\mathrm{P} = \sum_{i,\, j=0} c_{ij} \left(x_i - x_j\right)^{\nu+2}. \qquad (2)$$

У співвідношеннях (1) та (2) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – узагальнені координати, $c_{r_1 r_2 \ldots r_n}$, c_{ij}, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \nu$ – сталі, причому $\sum_{j\in n} \nu_j = \nu + 2$, а $\nu + 1 = \frac{2p+1}{2q+1}$ ($p, q = 0, 1, 2, \ldots$). Потенціальна енергія у обох випадках є однорідною функцією узагальнених координат. Беручи до уваги, що кінетична енергія, як функція узагальнених швидкостей, визначається залежністю

$$\mathrm{T}\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2,$$

де m_i – маса i-тої точки, диференціальні рівняння, які описують динамічний процес незбуреного руху набувають відповідно вигляду

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \nu_i \sum c_{r_1 r_2 \ldots r_n} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_{i-1}^{\nu_{i-1}} x_i^{\nu_i - 1} x_{i+1}^{\nu_{i+1}} \ldots x_n^{\nu_n} = 0 \qquad (3)$$

або
$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} + (\nu+1)\sum_{j=0} c_{ij}(x_i - x_j)^{\nu+1} = 0 .$$

Розглянемо спочатку рівняння (3). Покажемо, що, незважаючи на його сильну нелінійність, динамічний процес у відповідній йому механічній системі можна описати за допомогою періодичних Ateb-функцій. Для цього формально вважатимемо, що фазові координати зв'язані співвідношеннями:
$$x_i = b_i x_1,\ i = 2,3,...,n , \tag{4}$$
де b_i – невідомі сталі, а співвідношення для зв'язку між ними будуть встановлені нижче. Фізичний зміст останнього такий: у механічній системі відбуваються нелінійні коливання, які за формою збігаються із формою першої узагальненою координати. Наведені вище залежності трансформують вихідні рівняння до вигляду:
$$m_1 \frac{d^2x}{dt^2} + x^{\nu+1}\nu_1 \sum c_{r_1r_2...r_n}1\left(b_2\right)^{\nu_2}...\left(b_n\right)^{\nu_n} = 0 ,$$
$$b_2 m_2 \frac{d^2x}{dt^2} + \nu_2 x^{\nu+1} \sum c_{r_1r_2...r_n}1\left(b_2\right)^{\nu_2-1}\left(b_3\right)^{\nu_3}...\left(b_n\right)^{\nu_n} = 0 ,$$
$$b_3 m_3 + m_3^{-1}\nu_3 x^{\nu+1} \sum c_{r_1r_2...r_n}1\left(b_2\right)^{\nu_2}\left(b_3\right)^{\nu_3-1}\left(b_4\right)^{\nu_4}....\left(b_n\right)^{\nu_n} = 0 , \tag{5}$$
…………………………………………………….
$$b_n m_n \frac{d^2x}{dt^2} + \nu_n x^{\nu+1} \sum c_{r_1r_2...r_n}1\left(b_2\right)^{\nu_2}\left(b_3\right)^{\nu_3}...\left(b_{n-1}\right)^{\nu_{n-1}}\left(b_n\right)^{\nu_n-1} = 0 .$$

Вище у рівняннях (5) індекс, який вказує на "моду" базової координати, опущений, а самі диференціальні рівняння відрізняються тільки коефіцієнтами при шуканій функції та при її другій похідній. Це дає змогу записати вказані рівняння у вигляді
$$m_i \frac{d^2x}{dt^2} + b_i^0 x^{\nu+1} = 0 , \tag{6}$$
де: $b_1^0 = \nu_1 \sum c_{r_1r_2...r_n}1\left(b_2\right)^{\nu_2}...\left(b_n\right)^{\nu_n}$,
$$b_2^0 = (b_2)^{-1}\nu_2 \sum c_{r_1r_2...r_n}1\left(b_2\right)^{\nu_2-1}\left(b_3\right)^{\nu_3}...\left(b_n\right)^{\nu_n} ,$$
$$b_3^0 = (b_3)^{-2}\nu_3 \sum c_{r_1r_2...r_n}1\left(b_2\right)^{\nu_2}\left(b_3\right)^{\nu_3-1}\left(b_4\right)^{\nu_4}....\left(b_n\right)^{\nu_n} ,$$
…………………………………………………
$$b_n^0 = (b_n)^{-1}\nu_n \sum c_{r_1r_2...r_n}1\left(b_2\right)^{\nu_2}\left(b_3\right)^{\nu_3}...\left(b_{n-1}\right)^{\nu_{n-1}}\left(b_n\right)^{\nu_n-1} .$$

Як випливає із наведеного вище, коефіцієнти b_i^0 у диференціальному рівнянні (6) виражаються через сталі b_i, а тому залишаються невідомими. З іншого боку, узагальнена сила, яка відповідає i-й узагальненій координаті, визначається відповідно до виразу
$$\frac{\partial \mathrm{P}(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} = b_i \frac{\partial \mathrm{P}(x, b_2x, ..., b_nx)}{\partial x}. \tag{7}$$

На базі виразу (7) отримуємо такі алгебричні рівняння відносно невідомих b_i:

$$b_i \sum \nu_1 c_{r_1r_2...r_n}1\left(b_2\right)^{\nu_2}\left(b_3\right)^{\nu_3}...\left(b_n\right)^{\nu_n} =$$
$$= \sum \nu_i c_{r_1r_2...r_n}1\left(b_2\right)^{\nu_2}\left(b_3\right)^{\nu_3}...(b_{i-1})^{\nu_{i-1}}(b_i)^{\nu_i-1}(b_{i+1})^{\nu_{i+1}}...\left(b_n\right)^{\nu_n} . \tag{8}$$

Отже, питання про правомірність існування формальної заміни змінних (4) рівнозначне до питання про існування дійсних коренів системи алгебричних рівнянь (8). У роботі **[13]** показано, що у випадку, коли $\mathrm{P}(x_1, x_2, ..., x_n)$ – однорідна парна функція, то система алгебричних рівнянь (8) має розв'язки, до того ж їх не менше ніж n. Із питанням існування декількох дійсних розв'язків системи рівнянь (8) пов'язане явище "перескоків", а також стійкість нормальних мод коливань. Існування декількох дійсних розв'язків вказаної системи свідчить про принципову різницю між нормальними коливаннями сильно нелінійних систем із багатьма ступенями вільності та лінійними коливаннями систем із такою ж кількістю ступенів вільності: якщо у лінійних системах існує одна форма коливань, то у сильно нелінійних їх кількість визначається числом дійсних коренів системи рівнянь (8). Отже, нормальні форми коливань сильно нелінійних автономних консервативних систем, потенціальна енергія яких визначається (1), описуються за допомогою періодичних Ateb-функцій у вигляді:
$$x = a\,ca\left(\nu,1,\omega(a)t+\theta\right), \quad x_i = ab_i\,ca\left(\nu,1,\omega\ (a)t+\theta\right),\ (i = 2,3,...,n). \tag{9}$$
Параметри a та θ у (9) є сталими величинами, а частота
$$\omega(a) = \sqrt{\frac{b_0^1(\nu+2)}{2m_1}a^{\frac{\nu}{2}}} , \tag{10}$$
а b_0^1 є одним із розв'язків системи алгебричних рівнянь (8).

Зауважимо, що рівняння системи (8) для визначення коефіцієнтів b_i можна трактувати і як умови рівності частот нормальних форм коливань механічної системи. Таким чином, для дослідження коливань сильно нелінійних систем як автономного, так і неавтономного типів розвивається принцип, відомий у **[14]** як принцип одночастотності коливань у нелінійних системах. Дійсно, частота коливань довільної узагальненої координати x_i $(i = 2,3,...,n)$ розглядуваних систем визначається відповідно до залежності (10). Формально, записавши частоту для довільного рівняння із системи (5), маємо
$$\omega_i^2(a) = \nu_i \frac{\nu+2}{2b_i} a^{\nu} \sum c_{r_1r_2...r_n} b_2^{\nu_2} \cdot b_3^{\nu_3} \cdots b_{i-1}^{\nu_{i-1}} \cdot b_i^{\nu_i-1} \cdot b_{i+1}^{\nu_{i+1}} \cdots b_n^{\nu_n} .$$

Використовуючи принцип одночастотності коливань, адаптований до розглядуваного у розділі типу сильно нелінійних систем, шляхом прирівнювання частот різних мод нормальних коливань отримаємо систему алгебричних рівнянь для визначення b_i. Вона співпадає із системою алгебричних рівнянь (8), якщо за базову частоту прийняти частоту першої узагальненої координати.

Що стосується сильно нелінійних систем, потенціальна енергія яких визначається функцією (2), то заміною змінних (4) для описання "нормальних" форм коливань отримуються диференціальні рівняння
$$m_i \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\nu+1\right) x^{\nu+1} \sum_{j=0} \tilde{n}_{ij}(b_i - b_j)^{\nu+1} ,\ i = 2,3,...,n , \tag{11}$$

в яких невідомі коефіцієнти b_i визначаються із системи алгебричних рівнянь

$$b_i \sum_{j=0} c_{ji}(1-b_j)^{\nu+1} = \sum_{j=0} c_{ij}(b_i-b_j)^{\nu+1}. \qquad (12)$$

Розв'язки диференціальних рівнянь (11) виражаються за допомогою періодичних Ateb-функцій у вигляді (9) з тією тільки різницею, що для розглядуваного випадку b_i зв'язані системою алгебричних рівнянь (12).

Вплив періодичного збурення на нормальні коливання сильно нелінійних систем із багатьма ступенями вільності. Викладені вище результати є базою для дослідження впливу малого збурення неавтономного типу на системи, "близькі" до розглянутих вище. Отже, предметом розгляду роботи є динамічні системи, рух яких описується диференціальними рівняннями вигляду:

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} + \nu_i \sum c_{r_1 r_2 \ldots r_n} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_{i-1}^{\nu_{i-1}} x_i^{\nu_i - 1} x_{i+1}^{\nu_{i+1}} \ldots x_n^{\nu_n} = \varepsilon f\left(x_1, x_2 \ldots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}, \mu t\right) \qquad (13)$$

або

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} + (\nu+1) \sum_{j=0} c_{ij}(x_i - x_j)^{\nu} = \varepsilon f\left(x_1, x_2 \ldots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}, \mu t\right). \qquad (14)$$

Праві частини наведених вище диференціальних рівнянь, тобто функції $\varepsilon f\left(x_1, x_2 \ldots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}, \mu t\right)$ є аналітичними 2π-періодичними за змінною μt. У вказаних неконсервативних системах будемо розглядати коливання, які близькі до нормальних коливань відповідних незбурених консервативних систем. Підставою для вказаного твердження є той факт, що малі збурення неавтономного типу у нелінійних систем з одним чи багатьма ступенями вільності за наявності малих періодичних збурень у нерезонансних випадках спричиняють незначні зміни визначальних параметрів динамічного процесу незбуреної системи. Виявляється, що у режимах нормальних коливань сильно нелінійних систем із скінченим числом ступенів вільності вказана властивість зберігається. Тому відповідно до загальної схеми побудови асимптотичних наближень систем з малим збуренням формально можна розв'язки неконсервативних рівнянь подати у вигляді $x_i(t) = x_i^0(t) + \varepsilon u_i(t)$, де: $x_i^0(t)$ – розв'язок незбуреної системи, який визначається за отриманими вище залежностями (9), (10), $\varepsilon u_i(t)$ – відхилення розв'язку, зумовлене наявністю малих неконсервативних сил. Очевидно, що останній доданок визначається виглядом правих частин диференціальних співвідношень (13) та (14), а також незбуреним рухом, тобто залежностями (9). У випадку коливань, за формою близьких до нормальних коливань незбуреної системи $x_i^0(t) = ab_i ca(\nu+1, 1, \omega(a)t + \theta)$, $b_1 = 1$, а $b_2, b_3, \ldots, b_n$ – сталі, які визначаються із відповідної системи алгебричних рівнянь, $u_i(t)$ – обмежені аналітичні функції своїх аргументів. Отже, $x_i(t) \to x_i^0(t)$ при $\varepsilon \to 0$. Таким чином, підставляючи у (13) і (14) замість $x_i(t)$ та dx_i / dt співвідношення, які узгоджуються із (9), отримаємо нелінійні рівняння $m_i \frac{d^2x}{dt^2} + b_i^0 x^{\nu+1} = \varepsilon F_i\left(x, \frac{dx}{dt}, \mu t\right)$, де

$$\varepsilon F_i\left(x, \frac{dx}{dt}, \mu t\right) = \varepsilon f\left(x, b_1 x \ldots, b_n x, \frac{dx}{dt}, b_1 \frac{dx}{dt}, \ldots, b_n \frac{dx}{dt}, \mu t\right).$$

Висновки. У роботі розроблено методику дослідження динамічних процесів неавтономних сильно нелінійних систем із багатьма ступенями вільності. Характерною особливість розглядуваних систем є те, що: коливальний процес незбурених до них аналогів вдається описати за допомогою спеціальних періодичних Ateb-функцій; частота (період) вказаного вище процесу залежить від амплітуди. Із останнім пов'язані основні труднощі дослідження впливу на процес неконсервативних, а особливо періодичних сил. З цією метою розроблено методику асимптотичного інтегрування (побудови розв'язків) відповідних сильно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку неавтономного типу. Наведено окремі класи сильно нелінійних систем із багатьма ступенями вільності, для яких динамічний процес вдається описати за допомогою періодичних Ateb-функцій; для них отримано аналітичні залежності, які описують закони зміни визначальних параметрів незбуреного руху вказаних систем; для близьких до вказаного вище типу неавтономних неконсервативних систем отримано залежності, які визначають вплив на динаміку процесу малих за величиною збурень. Розроблена методика дослідження коливальних процесів сильно нелінійних систем із зосередженими масами дає змогу розв'язати не тільки задачі аналізу, але і не менш важливі задачі синтезу коливних систем ще на стадії проектування, вибрати такі пружні характеристик динамічних систем, які унеможливлюють у них резонансні явища.

Література

1. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний : учебник [для студ. ВУЗов] по спец. "Динамика и прочность машин" / В.Л. Бидерман. – М. : Изд-во "Высш. шк.", 1980. – 408 с.
2. Кузмак Г.Е. Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами / Г.Е. Кузмак // ПММ. – 1959. – 23, № 3. – С. 515-526.
3. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк. – К. : Изд-во Киев. ун-та, 1980. – 80 с.
4. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко. – М. : Изд-во : Изд-во "Наука", 1991. – 651 с.
5. Ловейкин В.С. Проектирование и оптимизация режимов движения грубых нелинейных механических систем / В.С. Ловейкин, Ю.В. Човнюк, М.Г. Диктерук // Вібрації в техніці та технологіях : зб. наук. праць. – Дніпропетровськ. – 2007. – № 3(48). – С. 68-71.
6. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах : пер. с англ. Б.А. Болдова и Г.Г. Гусева / под ред. В.Е. Боголюбова / Тихиро Хаяси. – М. : Изд-во Мир, 1968. – 268 с.
7. Митропольский Ю.А. Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения / Ю.А. Митропольский. – К. : Вид-во Ін-ту математики НАН України, 1994. – 231 с.
8. Волосов В.М. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем / В.М. Волосов, Б.И. Моргунов. – М. : Изд-во МГУ. – 1971. – 507 с.
9. Андронов А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М. : Издво "Наука", 1981. – 568 с.
10. Бабаков И.М. Теория колебаний / И.М. Бабаков. – М. : Изд-во "Наука", 1965. – 560 с.
11. Филлипов А.П. Колебания деформируемых систем / А.П. Филлипов. – М. : Изд-во "Машиностроение", 1970. – 736 с.
12. Флоров К.В. Вибрация в механизмах и машинах / К.В. Флоров, В.А. Никонорова. – М. : Изд-во МВТУ, 1988. – 69 с.
13. Бондарь Н.Г. Нелинейные стационарные колебания / Н.Г. Бондарь. – К. : Вид-во "Наук. думка", 1974. – 212 с.
14. Митропольский Ю.А. Асимптотические решения уравнений в частных производных / Ю.А. Митропольский, Б.И. Мосеенков. – К. : Изд-во "Вища шк.", 1976. – 596 с.

***Пукач П.Я.* Колебания в некоторых сильно нелинейных механических системах с многими степенями свободы**

Аналитические методы для нелинейных систем с одной степенью свободы обобщены на определенный класс нелинейных систем с конечным числом степеней свободы. Применение аналитических подходов на базе сочетания классических методов нелинейной механики и волновой теории движения дает возможность сделать выводы по важным вопросам анализа динамических процессов. Выводы, полученные с помощью аппарата специальных функций, позволяют получить характеристики динамики сильно нелинейных систем со многими степенями свободы, вытекающими из анализа решений соответствующих дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: нелинейные колебания, сильно нелинейная система, резонанс, специальные функции, амплитудно-частотная характеристика.

***Pukach P.Ya.* Oscillations in Some Strongly Nonlinear Mechanical Systems with Many Degrees of Freedom**

Analytical methods for nonlinear systems with one degree of freedom generalized to a class of nonlinear systems with finite number of degrees of freedom are generalised. The application of analytical approaches based on the combination of classical methods of nonlinear mechanics and the wave theory of motion allows drawing general conclusions on important issues analysis of dynamic processes. Conclusions obtained using the apparatus of special features yield characteristics of the dynamics of strongly nonlinear systems with many degrees of freedom arising from the analysis of the solutions of the corresponding differential equations.

Key words: nonlinear oscillations, strong nonlinear system, resonance, special functions, amplitude-frequency characteristic.

УДК 519.711 Доц. А.І. Головатий, канд. техн. наук – Тернопільський НТУ ім. Івана Пулюя; проф. В.М. Теслюк, д-р техн. наук; асист. А.Я. Зелінський, канд. техн. наук – НУ "Львівська політехніка"

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ П'ЄЗОРЕЗИСТИВНОГО МІКРОДАВАЧА ТИСКУ ДЛЯ КОМПОНЕНТНОГО РІВНЯ ПРОЕКТУВАННЯ[1]

Розроблено математичну модель п'єзорезистивного МЕМС давача тиску. Змодельовано реакцію мікродавача, спричинену дією прикладеного тиску, а саме механічні напруження в його діафрагмі, її максимальний прогин, зміну опорів вимірювальних п'єзорезисторів, вихідну напругу мостової схеми Вітстона. Досліджено вплив геометричної форми і конструктивних розмірів діафрагми на її максимальний прогин і чутливість мікродавача від прикладеного тиску. Побудована модель мікродавача тиску може бути використана для аналізу його вихідних параметрів на компонентному рівні проектування.

Ключові слова: мікроелектромеханічні системи (МЕМС), п'єзорезистивний МЕМС давач тиску, модель, автоматизоване проектування

Вступ. Технології МЕМС дають змогу виготовляти пристрої, в яких мініатюрні механічні структури інтегровані з мікроелектронними компонентами. Мікромеханічні давачі тиску були одними з найперших пристроїв, виготовлених за мікромашинною технологією [1]. Мікродавачі тиску використовуються в медицині, автомобільній промисловості, як барометр у смартфонах, планшетних комп'ютерах, спортивних годинниках, метеостанціях, як висотомір для визначення рівні місця знаходження, військова і цивільна аерокосмічні галузі (вимірювальні модулі до двигунів, тиск у кабіні, інструментарій контролю польоту, гідравлічні системи) та в інших областях [2-4].

[1] **Acknowledgement**. This research was supported by the FP7-PEOPLE "Marie Curie Actions (IRSES)" Project, entitled "Developing Multidomain MEMS Models for Educational Purposes", acronym: EduMEMS, Number: 269295.

Важливе значення під час проектування таких складних гетерогенних систем як МЕМС мають системи автоматизованого проектування [5], які дають змогу скоротити термін розроблення інтегральних пристроїв і зменшити їх вартість. Проведений аналіз відкритих літературних джерел та інтернет-ресурсів у сфері проектування та моделювання МЕМС дає змогу стверджувати, що створення якісно нових математичних і комп'ютерних поведінкових моделей [6, 7] інтегральних мікроелектромеханічних давачів для оптимізації їх конструктивних параметрів з технічними характеристиками і покращення ефективності проектування є актуальним завданням сьогодення [4].

Принцип дії та математична модель п'єзорезистивного МЕМС давача тиску. На рис. 1 схематично зображено конструкцію МЕМС п'єзорезистивного давача тиску [3]. Мікродавач складається з діафрагми (мембрани) і чотирьох тензодавчів (п'єзорезисторів) напилених по центру країв діафрагми, таке розміщення обумовлене тим, що в цих місцях діафрагма піддається максимальному навантаженню за дії зовнішнього тиску. Розміщення п'єзорезисторів у місцях з максимальною деформацією дає змогу отримати максимальну чутливість, оскільки зміна питомого опору п'єзорезистивного матеріалу є прямо пропорційною до прикладеного навантаження [4, 8-10].

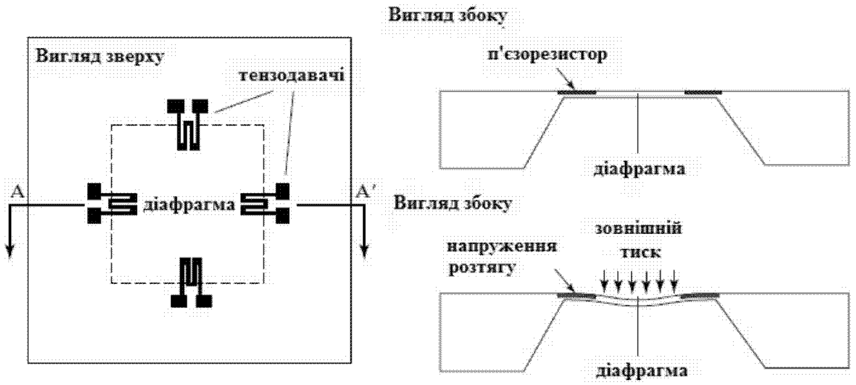

Рис. 1. Схематичне зображення п'єзорезистивного МЕМС давача тиску

Варто зазначити, що максимальний прогин відбувається в центрі діафрагми. Максимальне напруження виникає у центральних точках двох протилежних країв і в центрі мембрани (діафрагми). Напруження вздовж краю і центру мають різні знаки. Положення з максимальними значеннями напруження є найбільш придатні для розміщення п'єзорезистивних давачів і реєстрації деформації мембрани. Аналіз деформації мембрани є складнішим, ніж консольної балки, оскільки мембрана є двовимірною по природі. Тому прогин діафрагми (мембрани) п'єзорезистивного МЕМС давача тиску, спричиненого дією прикладеного тиску P, розпочнемо з такого диференціального рівняння [11, 12]: