УДК 004.94

АЛГОРИТМ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ДРОБОВО-ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИХ ЯДЕР ПОВЗУЧОСТІ ЗА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИМИ ДАНИМИ

М.В. Левкович[1,2]

Розглянуто одновимірні математичні моделі деформаційно-релаксаційних процесів у середовищах з фрактальною структурою, для яких характерні ефекти пам'яті, просторової нелокальності та самоорганізації. Враховуючи, що дробові параметри фрактальних моделей дають змогу повніше описувати деформаційно-релаксаційні процеси порівняно із традиційними методами, запропоновано оптимальний метод апроксимації – метод Проні. Цей метод дає змогу звести задачу відшукання дробових параметрів, які входять у структуру ядер повзучості та релаксації, до пошуку розв'язків систем лінійних рівнянь.

Наведено алгоритм параметричної ідентифікації та визначено для моделей Максвелла, Фойгта та Кельвіна дробово-експоненціальні ядра повзучості за експериментальними даними.

Ключові слова: похідні дробового порядку, метод Проні, ядра повзучості та релаксації, функція Міттаг-Леффлера.

Постановка задачі. Одновимірну математичну модель в'язко-пружного деформування у середовищах з фрактальною структурою можна записати за допомогою інтегрального рівняння Больцмана-Вольтерра [3]

$$\varepsilon(t)=\sigma_0 G(t)+\int_0^t \Pi(t-z,T,U)\,D_z^{\alpha}\sigma(z)\,dz,$$

$$\sigma(t)=\varepsilon_0 G'(t)+\int_0^t R(t-z,T,U)\,D_z^{\beta}\varepsilon(z)\,dz, \qquad (1)$$

де: t – час; $\alpha=\alpha(T,U), \beta=\beta(T,U)$ – дробові показники похідної, залежні від температури T та вологовмісту U; $\varepsilon(t)$ – деформація; $\sigma(t)$ – напруження; ε_0,σ_0 – значення деформації та напруження відповідно в початковий момент часу t_0; $G(t), G'(t)$ – функції залежні від часу t; $\Pi(t-z,T,U), R(t-z,T,U)$ – ядра повзучості та релаксації (функції пам'яті); $D_z^{\alpha}, D_z^{\beta}$ – дробові похідні по змінній z з порядком відповідно α,β $(0\le\alpha,\beta\le 1)$.

Загальний вигляд ядра повзучості для дробово-диференціальних реологічних моделей матиме вигляд [8]

$$\Pi(t)=\frac{1}{E\tau^{\beta}}t^{\beta-1}E_{\psi_1,\psi_2}(\phi), \qquad (2)$$

де: E – модуль пружності; t – час; $\tau=\eta/E$ (η – в'язкість); $E_{\psi_1,\psi_2}(\phi)$ – функція Міттаг-Леффлера; $(\psi_1=\psi_1(\alpha,\beta),\psi_2=\psi_2(\alpha,\beta),\phi=\phi(t,\alpha,\beta))$.

Алгоритм апроксимації з використанням методу Проні. Оскільки для ідентифікації даних повзучості у роботі буде використано метод апроксимації Проні, який справедливий для лінійної комбінації експоненціальних функцій [5], проведемо такі перетворення співвідношення (2).

Двопараметрична функція Міттаг-Леффлера задається формулою [2]

$$E_{\alpha,\beta}(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{\Gamma(\alpha j+\beta)}. \qquad (3)$$

Враховуючи (3) та відповідні заміни, вигляд ядра повзучості (2) перепишемо у такому вигляді:

$$\Pi(s)=\sum_{i=0}^{n}A_i e^{-\lambda_i s}, \qquad (4)$$

де $A_i=A_i(\alpha,\beta)$, $\lambda_i=\lambda_i(\alpha,\beta)$ – амплітуди та показники, що залежні від дробових параметрів α,β, $s=\ln t$, $(t=e^s)$.

У роботі [4] зазначено, що для функцій такого вигляду як $\Pi(s)$ існує деяка визначена лінійна залежність між її $(n+1)$ рівновіддаленими значеннями

$$\sum_{i=0}^{n}c_i\Pi(s+ih)=0, \qquad (5)$$

де: c_i – шукані постійні числа $(c_n=1)$; h – інтервал часу більше, ніж між двома послідовними значеннями. Оскільки (4) є розв'язком рівняння (5), то показники λ_i можуть бути знайдені за допомогою такого методу [5].

Нехай $e^{-\lambda_i h}=\xi_i$, тоді для визначення кожної величини ξ_i потрібно розв'язати алгебраїчне рівняння

$$c_0+\sum_{i=1}^{n}c_i\xi^i=0. \qquad (6)$$

Для визначення c_i потрібно розв'язати таку систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases}\Pi_1^*c_0+\Pi_2^*c_1+\ldots+\Pi_n^*c_{n-1}+\Pi_{n+1}^*=0,\\ \Pi_2^*c_0+\Pi_3^*c_1+\ldots+\Pi_{n+1}^*c_{n-1}+\Pi_{n+2}^*=0,\\ \ldots\\ \Pi_n^*c_0+\Pi_{n+1}^*c_1+\ldots+\Pi_{2n-1}^*c_{n-1}+\Pi_{2n}^*=0,\end{cases} \qquad (7)$$

де $\Pi_1^*,\Pi_2^*,\ldots,\Pi_{2n}^*$ – ординати. Знайшовши із (6) n розв'язків $\xi=\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$, можемо знайти показники λ_i

$$\lambda_i=-\frac{\ln\xi_i}{h}. \qquad (8)$$

Для визначення амплітуд A_i потрібно визначити n ординат – $\Pi_1^*,\Pi_2^*,\ldots,\Pi_n^*$, а також знайти розв'язок наступної системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases}A_1'+A_2'+\ldots+A_m'=\Pi_1^*,\\ A_1'p_1+A_2'p_2+\ldots+A_m'p_m=\Pi_2^*,\\ \ldots\\ A_1'p_1^{n-1}+A_2'p_2^{n-1}+\ldots+A_m'p_n^{n-1}=\Pi_n^*,\end{cases} \qquad (9)$$

---

[1] аспір. М.В. Левкович – НЛТУ України, м. Львів;
[2] наук. керівник: проф. Я.І. Соколовський, д-р техн. наук

де: $p_i = e^{-\lambda_i h}$; $A_i' = \dfrac{A_i e^{-\lambda_i s_0}}{\lambda_i}$; $\left(i = \overline{1,n}\right)$; s_0 – початковий момент часу.

Реалізація алгоритму за експериментальними даними. Ідентифікуємо дробово-експоненціальні ядра повзучості за такими експериментальними даними [9], що наведено в табл. 1.

Табл. 1. Експериментальні дані повзучості

k	Π_k, мм	k	Π_k, мм	k	Π_k, мм	k	Π_k, мм
1	2,2	7	2,82	13	2,93	19	0,88
2	2,31	8	2,85	14	2,94	20	0,86
3	2,61	9	2,87	15	1	21	0,84
4	2,68	10	2,9	16	0,9	22	0,79
5	2,73	11	2,91	17	0,85	23	0,77
6	2,75	12	2,93	18	0,87	24	0,74

Для визначення параметрів α та β достатньо для кожної реологічної моделі виділити дві показникові функції, тобто співвідношення (4) розглянемо для випадку $n = 2$. Відповідно для пошуку показників λ_i потрібно $2n$ ординат. Для цього розіб'ємо експериментальні дані на 4 групи, у кожній просумувавши по шість ординат. Внаслідок обчислень отримаємо, що $\Pi_1^* = 15,28$; $\Pi_2^* = 17,28$; $\Pi_3^* = 9,49$; $\Pi_4^* = 4,88$. Система лінійних рівнянь (7) матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} 15,28c_0 + 17,28c_1 + 9,49 = 0, \\ 17,28c_0 + 9,49c_1 + 4,88 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Звідки $c_0 = 0,0373$, $c_1 = -0,5822$. Алгебраїчне рівняння (6) матиме вигляд

$$\xi^2 - 0.5822\xi + 0,0373 = 0, \tag{11}$$

корені якого дорівнюють відповідно $\xi_1 = 0,5089$, $\xi_2 = 0,0733$.

Початковий момент часу згідно з нашими експериментальними даними $t_0 = 10^3$ (год) та крок $\Delta t = 500$ (год). Враховуючи відповідну заміну змінних, значення h у формулі (8) буде дорівнювати $37,2876$.

Показники λ_i матимуть значення: $\lambda_1 = 0,0181$; $\lambda_2 = 0,0701$.

Наведемо визначені ядра повзучості для дробово-диференціальних моделей Максвелла, Фойгта та Кельвіна [8]:

$$\Pi_M(t) = \frac{1}{E\tau^\beta}\left(\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} + \frac{\tau^\alpha t^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}\right),\ 0 \le \alpha < \beta \le 1, \tag{12}$$

$$\Pi_F(t) = \frac{1}{E\tau^\beta} t^{\beta-1} E_{\beta-\alpha,\beta}\left(-\frac{t^{\beta-\alpha}}{\tau^{\beta-\alpha}}\right),\ 0 \le \alpha < \beta \le 1, \tag{13}$$

$$\Pi_K(t) = \frac{t^{\beta-1}}{E\tau^\beta} E_{\beta,\beta}\left(-\frac{t^{\beta-\alpha}}{\tau^{\beta-\alpha}}\right),\ 0 \le \alpha \le 1,\ 0 < \beta \le 1. \tag{14}$$

Відповідно для моделі Максвелла показники визначатимуться із співвідношень: $\lambda_1 = 1-\beta$, $\lambda_2 = 1+\alpha-\beta$. Звідки знайдемо, що дробово-диференціальні параметри дорівнюють: $\alpha = 0,0520$, $\beta = 0,9819$.

Використавши формулу (3), знайдемо показники λ_1, λ_2 для моделей Фойгта та Кельвіна, які відповідно матимуть вигляд: $\lambda_1 = 1+\alpha-2\beta$, $\lambda_2 = 1-\beta$. Дробово-диференціальні параметри матимуть значення: $\alpha = 0,8779$, $\beta = 0,9299$.

Параметри α та β, що описують ядра повзучості, є функціонально залежні від вологості та температури середовища. Наведені експериментальні дані повзучості досліджено за температури $T = 23°C$, вологості $U = 65\%$ та модуля пружності $E = 13800 \text{МП}a$.

У виразах, що описують ядра повзучості, невідомим залишається ще параметр τ, $(\tau = \eta / E)$, де η – в'язкість. Знайдемо його відшукавши амплітуди A_i. Для цього розв'яжемо систему лінійних рівнянь (9):

$$\begin{cases} A_1' + A_2' = 15,28; \\ A_1' p_1 + A_2' p_2 = 9,49; \end{cases} \tag{15}$$

де: $p_1 = e^{-0,6749}$, $p_2 = e^{-2,6139}$.

Знайшовши $A_1' = 19,2008$ та $A_2' = -3,9208$, за $s_0 = 6,9078$ отримаємо такі значення амплітуд: $A_1 = 0,3938$, $A_2 = -0,4460$.

Оскільки A_2 не входить в область значень амплітуди, то значення параметра τ знайдемо із A_1, $\left(A_1 = \tau^{-\beta} / E\Gamma(\beta)\right)$. Для моделей Максвелла та Фойгта параметр $\tau_{M,F} = 0,155 \cdot 10^{-3}$, для Кельвіна – $\tau_K = 0,975 \cdot 10^{-2}$.

Висновок. Враховуючи двопараметричну функцію Міттаг-Леффлера та відповідні заміни, загальний вигляд вихідної задачі зведений до стандартного вигляду лінійної комбінації експоненційних функцій, що дає змогу використати метод Проні. Ідентифіковано параметри дробово-диференціального типу для математичних моделей в'язко-пружного деформування Максвелла, Кельвіна та Фойгта за експериментальними кривими ядер повзучості. При апроксимації параметрів враховано та проаналізовано властивості дробових показників α, β для кожної математичної моделі деформування у в'язкопружних фрактальних середовищах, а також інші умови, що повинні бути виконані в разі застосування описаного вище методу Проні.

Отримані результати можуть бути використані для подальшого дослідження математичних моделей процесів в'язко-пружного деформування та тепломасоперенесення у середовищах із фрактальною структурою.

Література

1. Podlubny I. Fractional Differential Equations / I. Podlubny. – Vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, Calif, USA, 1999. – 340 s.
2. Васильев В.В. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем / В.В. Васильев, Л.А. Симак. – К. : Изд-во НАН Украины, 2008. – 256 с.
3. Победря Б.Е. Модели линейной теории вязко-упругости / Б.Е. Победря // МТТ : сб. науч. тр. – 2005. – № 6. – С. 121-134.
4. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа / К. Ланцош. – М. : Изд-во ГИФМЛ, 1961. – 524 с.
5. Хрисанов Н.Н. Интегральный метод апроксимации экспериментальных данных экспоненциальными функциями / Н.Н. Хрисанов // Вестник Самарского государственного технического ун-та : сб. науч. тр. – Сер.: Физ.-мат. науки. – 2001. – Вып. 12. – С. 195-199.

6. Сергиенко М.П. Применение метода Прони для идентификации переходных характеристик средств измерительной техники колебательного типа / М.П. Сергиенко // Системи обробки інформації. – 2011. – Вип. 6 (96). – С. 102-106.
7. Шиманський В.М. Апроксимація експериментальних даних повзучості деревини з використанням дробово-експоненціального оператора / В.М. Шиманський // Науковий вісник НЛТУ України : зб. наук.-техн. праць. – Львів : РВВ НЛТУ України. – 2015. – Вип. 25.1. – С. 397-402.
8. Соколовський Я.І. Математичне моделювання деформаційно-релаксаційних процесів з використанням похідних дробового порядку / Я.І. Соколовський, М.В. Москвітіна // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". – Сер.: Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів : Вид-во НУ "Львівська політехніка". – 2015. – № 826. – С. 175-184.
9. Tong Liu. Creep of wood under a large span of loads in constant and varying environments / Liu Tong // Pt. 1: Experimental observations and analysis // Holz als Roh- und Werkstoff. – 1993. – Vol. 51. – Pp. 400-405.

Надіслано до редакції 22.02.2016 р.

***Левкович М.В.* Алгоритм идентификации дробно-экспоненциальных ядер ползучести по экспериментальным данным**

Рассмотрены одномерные математические модели деформационно-релаксационных процессов в средах с фрактальной структурой, для которых характерны эффекты памяти, пространственной нелокальности и самоорганизации. Учитывая, что дробные параметры фрактальных моделей позволяют полнее описывать деформационно-релаксационные процессы по сравнению с традиционными методами, предложен оптимальный метод аппроксимации – метод Прони. Этот метод позволяет свести задачу отыскания дробных параметров, входящих в структуру ядер ползучести и релаксации, к поиску решений систем линейных уравнений.

Приведен алгоритм параметрической идентификации и определены для моделей Максвелла, Фойгта и Кельвина дробно-экспоненциальные ядра ползучести по экспериментальным данным.

Ключевые слова: производные дробного порядка, метод Прони, ядра ползучести и релаксации, функция Миттаг-Леффлера.

***Levkovych M.V.* The Algorithm of Identification of Fractional Exponential Creep Cores on Experimental Data**

One-dimensional mathematical models for deformation and relaxation processes in environments with fractal structure, which are characterized by memory effect, spatial nonlocality and self-organization, are studied. Considering the fractional parameters of fractal models allow describing the deformation and relaxation processes in comparison with traditional methods, the work presents the best approximation method such as a Prone method. This method reduces the problem of finding fractional parameters that are included in the structure of creep cores and relaxation, to finding solutions of systems of linear equations. The algorithm of parametric identification and identified for models of Maxwell, Voigt and Kelvin, fractional exponential creep cores on experimental data is suggested.

Keywords: derivatives of fractional order, Prone method, creep and relaxation core, Mittag-Leffler function.

5. ОСВІТЯНСЬКІ ПРОБЛЕМИ ВИЩОЇ ШКОЛИ

УДК 378.1:630.97

ДОСВІД ПІДГОТОВКИ ФАХІВЦІВ ЛІСОВОЇ ГАЛУЗІ В УНІВЕРСИТЕТІ СТАЛОГО РОЗВИТКУ ЕБЕРСВАЛЬДЕ (ФРН)

В.В. Лавний[1], Петер Шпатгельф[2]

Викладено історію створення та розвитку університету Еберсвальде, описано структуру та зміст навчального плану підготовки бакалаврів лісового господарства. Тривалість навчання становить тільки 6 семестрів, з яких один семестр – виробнича практика на лісогосподарському підприємстві. Наведено короткий опис факультетів і напрямів підготовки фахівців. Провідними тенденціями розвитку університету є висока якість та екологізація освіти, її інтернаціоналізація, впровадження положень Болонської конвенції та забезпечення сталого розвитку.

Ключові слова: система вищої освіти, університет сталого розвитку Еберсвальде, навчальний процес, німецький досвід, міжнародна співпраця.

Для підвищення якості освіти і науки в НЛТУ України важливе значення має поглиблення міжнародної співпраці з відомими навчальними закладами світу. Вона сприятиме повноцінній інтеграції України у глобальний освітньо-науковий простір. Недавно стартував спільний навчально-науковий проект між НЛТУ України та університетом сталого розвитку Еберсвальде, тому коротко представимо нашого німецького партнера.

Історія розвитку університету. Університет сталого розвитку Еберсвальде (УСР Еберсвальде) було засновано ще в 1830 р. Він розташований на північному сході Німеччини у федеральній землі Бранденбург, за 40 км від Берліна. В оригіналі на німецькій мові має таку назву: Hochschule für nachhaltige Entwicklung Eberswalde, скорочено HNEE. Логотип університету зображено на рис. 1.

HNE Eberswalde
Hochschule für nachhaltige Entwicklung

Рис. 1. Логотип УСР Еберсвальде [3]

Свої витоки теперішній УСР Еберсвальде бере з Берліна. Основоположником лісової освіти в цьому місті був Георг-Людвіг Ґартіг, на вимогу якого в Берлінському університеті в 1821 р. було створено Вищу лісову школу. Першим директором цього освітнього закладу в Берліні було призначено Вільгельма Пфайля (Friedrich Wilhelm Leopold Pfeil, 1783-1859). Основним завданням

[1] доц. В.В. Лавний, д-р с.-г. наук – НЛТУ України, м. Львів;
[2] проф., д-р Петер Шпатгельф – УСР Еберсвальде