УДК 004.056.5:517.[3+4+51]

ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ТАБЛИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ З ВИКОРИСТАННЯМ МНОГОЧЛЕНА ТЕЙЛОРА

***Ю.І. Грицюк*[1]*, Я.П. Драґан*[2]**

Обґрунтовано можливість чисельного інтегрування табличних функції для однієї змінної з використанням многочлена Тейлора. Встановлено, що у багатьох практичних задачах не завжди вдається виразити первісну від підінтегральної функції через елементарні функції. Розроблено метод чисельного інтегрування табличної функції для однієї змінної з використанням многочлена Тейлора. Розроблено алгоритм обчислення площі плоскої фігури, заданої двома табличними функціями для однієї змінної з використанням многочлена Тейлора, а також розроблено алгоритм обчислення довжини дуги плоскої кривої, заданої табличною функцією для однієї змінної. Наведено конкретні приклади обчислення інтегралів – неозначеного і означеного, а також обчислення площі та довжини дуги плоскої фігури.

Ключові слова: таблична функція для однієї змінної; чисельне інтегрування табличних функцій; многочлен Тейлора; інтерполяційний многочлен; обчислення площі плоскої фігури; обчислення довжини дуги плоскої кривої.

Вступ. При вирішенні проблем програмної інженерії існує багато прикладних задач, у математичному формулюванні яких виникає потреба обчислення інтегралів – неозначених і означених, одинарних, подвійних і потрійних, криволінійних і за поверхнею та ін. Найважливіші з таких задач полягають в обчисленні: площі та довжини дуги плоскої фігури; об'єму тіла за відомими площами поперечних перерізів чи тіла обертання; площі поверхні будь-якого тіла чи тіла обертання; статичних моментів і моментів інерції плоских дуг і фігур; координат центра ваги; роботи і тиску [1]. В таких задачах деяка підінтегральна функція у процесі виконання інженерних розрахунків часто подається у вигляді таблиці. При цьому незалежні змінні, що відповідають за її площу, об'єм чи ін., визначаються з системи рівнянь, яку можна отримати шляхом прирівнювання до нуля частинних похідних функції мети за цими змінними.

Дуже часто потреба обчислення інтегралу табличної функції є проміжним етапом у процесі розв'язання тої чи іншої інженерної задачі. Так, нелінійна модель стану об'єкта (який описується системою нелінійних алгебричних рівнянь) може містити одну або декілька функцій, які задано в табличному вигляді. Наприклад, якщо елементом об'єкта є спресована деревина з характеристикою $P = \varphi[x]$ (x – величина деформації деревини; P – сила, що викликає цю деформацію), яку задано у вигляді таблиці від однієї змінної, то рівняння $P = \varphi[x] = 0$ буде одним з рівнянь нелінійної системи стану цього об'єкта. Застосування методу Ньютона для розв'язання цієї системи рівнянь вимагатиме обчислення такого інтегралу $\int f[x]dx$.

Свого часу було розроблено значну кількість методів і алгоритмів чисельного інтегрування як аналітичних, так і табличних функцій для однієї, двох і трьох змінних з використання різних квадратурних формул [2, ст. 355]. Однак

[1] проф. Ю.І. Грицюк , д-р техн. наук – НУ "Львівська політехніка";
[2] проф. Я.П. Драґан, д-р фіз.-мат. наук – НУ "Львівська політехніка"

спробуємо дещо удосконалити методику чисельного інтегрування табличних функцій, особливо її матричні алгоритми, позаяк вона має ще багато прихованих можливостей. Тому розроблення надійної матричної системи чисельного інтегрування табличних функцій для однієї, двох і трьох змінних з використанням многочлена Тейлора є актуальним науковим завданням, результати реалізації якого продемонстровано в цій роботі.

Об'єкт дослідження – чисельне інтегрування табличних функцій з використанням многочлена Тейлора.

Предмет дослідження – методи і алгоритми чисельного інтегрування табличних функцій для однієї змінної з використанням многочлена Тейлора, яка дасть змогу обчислити площу та довжину дуги плоскої фігури.

Мета роботи полягає в розробленні надійної матричної системи чисельного інтегрування табличних функцій для однієї змінної з використанням многочлена Тейлора, що загалом дасть змогу обчислити як неозначені та означені інтеграли, а також визначити площу та довжину дуги плоскої фігури.

Для реалізації зазначеної мети потрібно виконати такі основні завдання:

1) навести постановки задач чисельного інтегрування табличних функцій, які використовуються для обчислення неозначених і означених інтегралів;
2) розробити метод чисельного інтегрування табличної функції для однієї незалежної змінної, який дасть змогу обчислити як неозначений, так і означений інтеграл;
3) розробити алгоритм обчислення площі плоскої фігури, заданої двома табличними функціями для однієї змінної з використанням многочлена Тейлора;
4) розробити алгоритм обчислення довжини дуги плоскої кривої, заданої табличною функцією для однієї змінної з використанням многочлена Тейлора;
5) зробити відповідні висновки та надати рекомендації щодо використання.

1. Постановки задач чисельного інтегрування табличних функцій

Нехай необхідно обчислити інтеграл

$$I = \int_a^b f[x]dx. \tag{1}$$

З курсу вищої математики [1, ст. 261; 2, ст. 349] відомо, що для функції $f[x]$, неперервної на відрізку $[a, b]$, інтеграл (1) існує та визначається за формулою Ньютона-Лейбніца

$$I = \int_a^b f[x]dx = F[x]\Big|_a^b = F[b] - F[a], \tag{2}$$

де $F[x]$ – первісна для функції $f[x]$. Однак для більшості практичних задач первісну $F[x]$ не завжди вдається виразити через елементарні функції. В інженерних розрахунках функція $f[x]$ часто задається як аналітично, так і у вигляді таблиці її значень для певних значень аргумента. Все це створює можливість використання наближених методів обчислення інтеграла (1), які умовно поділяються на аналітичні та числові. *Аналітичні методи*, за своєю сутністю, полягають у точній чи наближеній побудові первісної $F[x]$ та подальшому використанні формули (2). *Числові методи* ж дають змогу безпосередньо знайти числове значення інтеграла, базуючись на відомих значеннях підінтегральної функції (а інколи і на її похідних) у заданих точках, які називають *вузлами*. Тут розглядатимемо тільки числові методи інтегрування табличних функцій. Сам процес числового визначення інтеграла називається *квадратурою*, а відповідні формули – *квадратурними формулами*.

Постановки задач чисельного інтегрування табличних функцій з однією, двома чи трьома незалежними змінними загалом формулюються в одному з таких двох варіантів [2, ст. 349].

Задача 1. Для табличної функції $Y = Y[\overline{X}]$ з однією, двома чи трьома змінними $\overline{X} = [x_i,\ i = \overline{1,3}]$ потрібно у довільній точці простору незалежних змінних, заданої координатами $\overline{X} = \overline{X}' \Rightarrow [x_i = x_i',\ i = \overline{1,3}]$, обчислити неозначені інтеграли $\int f[x_1]dx_1$, $\int f[x_1,x_2]dx_1x_2$ чи $\int f[x_1,x_2,x_3]dx_1x_2x_3$.

У загальному випадку функцію $Y = Y[\overline{X}]$ можна подати у вигляді табл. 1, під інтегралом якої потрібно розуміти аналітичний вираз її інтерполянти [4].

Табл. 1. Загальний вигляд табличної функції для багатьох незалежних змінних

№ вузла	0	1	…	i	…	p
$\overline{X}_1$	$x_{1,0}$	$x_{1,1}$	…	$x_{1,i}$	…	$x_{1,p}$
$\overline{X}_2$	$x_{2,0}$	$x_{2,1}$	…	$x_{2,i}$	…	$x_{2,p}$
$\overline{X}_3$	$x_{3,0}$	$x_{3,1}$	…	$x_{3,i}$	…	$x_{3,p}$
$\overline{Y}$	y_0	y_1	…	y_i	…	y_p

де: $\overline{\overline{X}} = [x_{k,i},\ i = \overline{1,p};\ k = \overline{1,m}]$, $\overline{Y} = [y_i, i = \overline{1,p}]$ – відомі числа; p – кількість вузлів інтерполянти; m=3 – кількість змінних.

Задача 2. Функція $Y = Y[\overline{X}]$ з незалежними змінними $\overline{X} = [x_i,\ i = \overline{1,3}]$ задана у вигляді табл. 1. Потрібно обчислити значення означених інтегралів $\int\limits_O f[x_1]dx_1$, $\iint\limits_D f[x_1,x_2]dx_1x_2$ чи $\iiint\limits_T f[x_1,x_2,x_3]dx_1x_2x_3$ для заданих меж інтегрування.

Очевидно, постановка задачі 2 є окремим випадком задачі 1, однак її переважно розглядають як окрему задачу, оскільки в ній обчислення відповідних інтегралів вимагає застосування дещо складніших формул. Їх називають *формулами чисельного інтегрування*, а процедуру обчислення інтегралу за цими формулами називають *числовим інтегруванням табличної функції*.

Один з можливих способів розв'язання сформульованих задач базується на використанні різних квадратурних формул приблизно такого вигляду:

$$I \equiv \int\limits_a^b f[x]dx \approx (b-a)\sum_{i=1}^{n} A_i f[x_i] \equiv I_n \qquad (3)$$

з відомим залишковим членом $R_n(f[x]) = I - I_n$ або його оцінкою. Загалом як вузлові точки x_i, так і вагові множники A_i завчасно є невідомими і підлягають визначенню при виведенні кожної конкретної квадратурної формули (3) на підставі вимог, пред'явлених до неї.

Практично, задача чисельного інтегрування табличних функцій є еквівалентною оцінюванню середнього значення функції, яке на відрізку [a, b] визначається таким виразом:

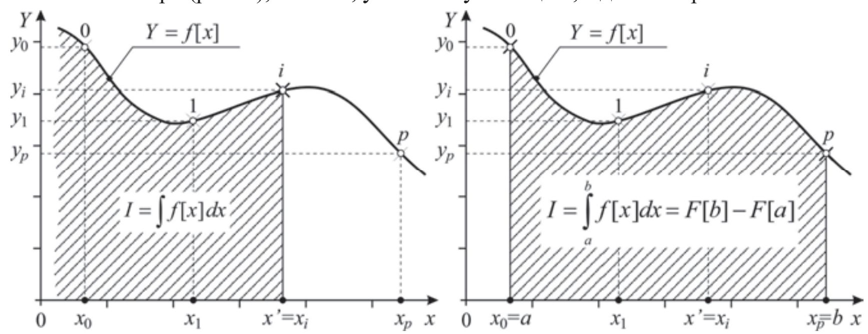
$$f[x]_{cp} = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f[x]dx \Rightarrow \int\limits_a^b f[x]dx = (b-a)\cdot f[x]_{cp}. \qquad (4)$$

Водночас, визначення середнього значення функції – це статистична задача, яка містить у собі проблеми послідовної вибірки і планування експерименту. Через складність такої постановки задачі тут обмежимось тільки класичними методами чисельного інтегрування, що базуються на попередньому визначенні як вузлових точок, у яких має задаватися інформація про інтегровану функцію, так і самою цією інформацією.

Використовувані нижче в алгоритмах чисельного інтегрування табличних функцій квадратурні формули будуються, як вже було зазначено вище, на основі тих чи інших критеріїв, що визначають положення вузлових точок і величини вагових множників. Такими критеріями можуть бути: 1) подання інтегралу у вигляді інтегральної суми; 2) інтерполяція підінтегральної функції (наприклад, многочленом Тейлора [3]) і подальше інтегрування інтерполяційної функції; 3) вимога, щоби формула (3) була абсолютно точною для визначеного класу функцій, і т.д.

2. Чисельне інтегрування табличної функції для однієї незалежної змінної

Розглянемо алгоритм розв'язування задач 1 і 2 спочатку стосовно неперіодичної табличної функції для однієї незалежної змінної з використанням многочлена Тейлора (рис. 1), а потім, у інших публікаціях, з двома і трьома змінними.



а) б)

Рис. 1. Схема обчислення неозначеного (а) та означеного (б) одинарних інтегралів від табличної функції для однієї змінної

Табл. 2. Загальний вигляд табличної функції для однієї незалежної змінної

№ вузла	0	1	…	i	…	p
$\overline{X}$	x_0	x_1	…	x_i	…	x_p
$\overline{Y}$	y_0	y_1	…	y_i	…	y_p

Загалом функцію $Y = Y[\bar{X}]$, яку задано табл. 2, можна подати аналітично її інтерполянтою у вигляді многочлена Тейлора *n*-го степеня [4]:

$$Y = c_0 + c_1\frac{x}{1!} + c_2\frac{x^2}{2!} + \ldots + c_p\frac{x^n}{n!} = \bar{T}[x]\times\bar{C}^{\text{т}}, \tag{5}$$

де: $\bar{T}[x]$ – рядок Тейлора *n*-го степеня; $\bar{C}^{\text{т}}$ – транспонований рядок (стовпець) коефіцієнтів інтерполянти. Для знаходження значень стовпця $\bar{C}^{\text{т}}$ потрібно сформувати таку лінійну систему рівнянь:

$$\begin{cases} c_0 + c_1\frac{x_0}{1!} + \ldots + c_p\frac{x_0^n}{n!} = y_0; \\ c_0 + c_1\frac{x_1}{1!} + \ldots + c_p\frac{x_1^n}{n!} = y_1; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots; \\ c_0 + c_1\frac{x_p}{1!} + \ldots + c_p\frac{x_p^n}{n!} = y_p; \end{cases} \Rightarrow \bar{\bar{T}}[\bar{X}]\times\bar{C}^{\text{т}} = \bar{Y}^{\text{т}}, \tag{6}$$

звідки

$$\bar{\bar{T}}[\bar{X}]^{-1}\times\bar{Y}^{\text{т}} = \bar{C}^{\text{т}}, \tag{7}$$

де: $\bar{\bar{T}}[\bar{X}]$ – матриця Тейлора, яка обчислюється за координатами вузлів $\bar{X}$ інтерполяції; $\bar{\bar{T}}[\bar{X}]^{-1}$ – обернена матриця за відношенням до матриці Тейлора; $\bar{Y}^{\text{т}}$ – транспонований рядок (стовпець) вузлів інтерполяції.

Неозначений одинарний інтеграл від многочлена (5) (рис. 1,*а*), з урахуванням (6), визначається за такою формулою:

$$\int f[x]dx = c_0\frac{x}{1!} + c_1\frac{x^2}{2!} + \ldots + c_p\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \bar{T}^{\text{i}}[x]\Big|_{x=x'}\times\bar{\bar{Ix}}\times\bar{C}^{\text{т}}, \tag{8}$$

а ***означений одинарний інтеграл*** від многочлена (5) (рис. 1,*б*), з урахуванням (6), – за такою формулою:

$$\int_a^b f[x]dx = c_0\frac{x}{1!} + c_1\frac{x^2}{2!} + \ldots + c_p\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\Bigg|_{x=a}^{x=b} = \bar{T}^{\text{i}}[x]\Big|_{x=x'}\times\bar{\bar{Ix}}\times\bar{C}^{\text{т}}\Big|_{x=a}^{x=b} =$$
$$= \bar{T}^{\text{i}}[x]\Big|_{x=a}^{x=b}\times\bar{\bar{Ix}}\times\bar{C}^{\text{т}} = \left(\bar{T}^{\text{i}}[x]\Big|_{x=b} - \bar{T}^{\text{i}}[x]\Big|_{x=a}\right)\times\bar{\bar{Ix}}\times\bar{C}^{\text{т}}, \tag{9}$$

де: $\bar{T}^{\text{i}}[x]$ – інтегрований рядок Тейлора $(n+1)$-го степеня; $\bar{\bar{Ix}}$ – матриця інтегрування рядка Тейлора.

Отже, під час обчислення одинарних інтегралів від функції, заданої табл. 2, потрібно виконати такі дії:

- за даними таблиці сформувати матричне рівняння (6) та розв'язати його;
- сформувати інтегрований рядок Тейлора $\bar{T}^{\text{i}}[x]$ і матрицю його інтегрування $\bar{\bar{Ix}}$;
- для *неозначеного інтеграла* – підставити у формулу (8) отриманий корінь $\bar{C}^{\text{т}}$ рівняння (6) та числове значення $x = x'$ і виконати операції множення матриць, вказані у виразі (8);
- для *означеного інтеграла* – підставити у формулу (9) корінь $\bar{C}^{\text{т}}$ рівняння (6) та числові значення $x = a$ і $x = b$, а потім виконати операції множення матриць, вказані у виразі (9).

Приклад 1. Нехай від функції $Y = Y[\bar{X}]$, заданої табл. 3, потрібно обчислити значення неозначеного інтеграла при $x = x' = 1.1$ та означеного – при $x = a = 0.9$ і $x = b = 1.5$ (рис. 2).

Табл. 3. Значення табличної функції для однієї змінної

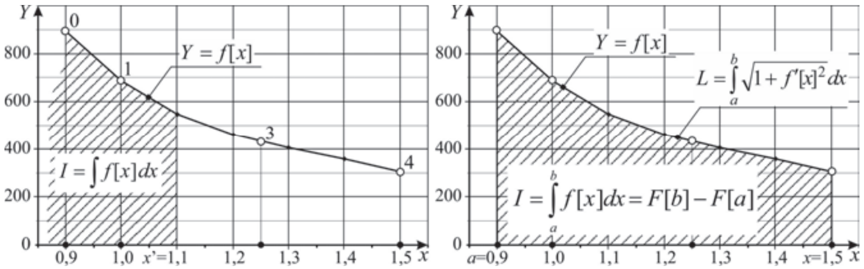
№ вузла	0	1	2	3
$\bar{X}$	0,90	1.00	1.25	1.50
$\bar{Y}$	893	686	430	304

Аналітичний вираз інтерполянти 3-го степеня для цієї табличної функції має такий вигляд

$$Y = c_0 + c_1\frac{x}{1!} + c_2\frac{x^2}{2!} + c_3\frac{x^3}{3!} = \bar{T}[x]\times\bar{C}^{\text{т}}, \tag{10}$$

а розв'язком матричного рівняння (7) є такий вектор:

$$\bar{C}^{\text{т}} \Rightarrow \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9099.29 \\ -18384.24 \\ 26437.14 \\ -19485.71 \end{vmatrix}. \tag{11}$$



а) б)

Рис. 2. Схема обчислення неозначеного (а) та означеного (б) одинарних інтегралів від функції, заданої табл. 3

Значення *неозначеного одинарного інтегралу* від функції $Y = Y[x]$ при $x = x' = 1.1$ знаходимо за формулою (8) (рис. 2,*а*), внаслідок чого отримаємо:

$$\int f[x]dx = \bar{T}^{\text{i}}[x']\Big|_{x'=1.1}\times\bar{\bar{Ix}}\times\bar{C}^{\text{т}} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{x'}{1!} & \frac{(x')^2}{2!} & \frac{(x')^3}{3!} & \frac{(x')^4}{4!} \end{vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1.1 & 0.605 & 0.2218 & 0.0610 \end{vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} 9099.29 \\ -18384.24 \\ 26437.14 \\ -19485.71 \end{vmatrix} = 3562.68. \tag{12}$$

Значення *означеного одинарного інтегралу* від функції $Y = Y[x]$ при $x = a$ і $x = b$ знаходимо за формулою (9) (рис. 2,*б*), внаслідок чого отримаємо такий розрахунковий вираз:

$$\int_a^b f[x]dx = \left(\overline{T}^{\text{i}}[x]\Big|_{x=b} - \overline{T}^{\text{i}}[x]\Big|_{x=a}\right)\times\overline{\overline{Ix}}\times\overline{C}^{\text{т}} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix}1 & \frac{b}{1!} & \frac{b^2}{2!} & \frac{b^3}{3!} & \frac{b^4}{4!}\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & \frac{a}{1!} & \frac{a^2}{2!} & \frac{a^3}{3!} & \frac{a^4}{4!}\end{vmatrix}\right)\times\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1}\end{Vmatrix}\times\begin{vmatrix}\mathrm{c}_0\\ \mathrm{c}_1\\ \mathrm{c}_2\\ \mathrm{c}_3\end{vmatrix}. \qquad (13)$$

Інтегрований рядок Тейлора n-го степеня при $x = a = 0.9$ і $x = b = 1.5$ матиме такі значення елементів

$$\overline{T}^{\text{i}}[x]\Big|_{x=1.5} - \overline{T}^{\text{i}}[x]\Big|_{x=0.9} = \begin{vmatrix}1 & \frac{1.5}{1!} & \frac{1.5^2}{2!} & \frac{1.5^3}{3!} & \frac{1.5^4}{4!}\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & \frac{0.9}{1!} & \frac{0.9^2}{2!} & \frac{0.9^3}{3!} & \frac{0.9^4}{4!}\end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix}0 & 0.6 & 0.720 & 0.4410 & 0.1836\end{vmatrix},$$

а означений інтеграл – таке значення

$$\int_{0.9}^{1.5} f[x]dx = \begin{vmatrix}0 & 0.6 & 0.720 & 0.4410 & 0.1836\end{vmatrix}\times\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1}\end{Vmatrix}\times\begin{vmatrix}9099.29\\ -18384.24\\ 26437.14\\ -19485.71\end{vmatrix} = 304.12. \qquad (14)$$

3. Обчислення площі плоскої фігури

Площа плоскої фігури, яка обмежена кривими $y_1 = f_1[x]$ і $y_2 = f_2[x]$ ($f_1[x] \le f_2[x]$), прямими $x = a$ і $x = b$, визначається за такою формулою:

$$S = \int_a^b \left(f_2[x] - f_1[x]\right)dx. \qquad (15)$$

Табл. 4. Загальний вигляд двох табличних функцій для однієї змінної, які описують криві плоскої фігури

№ вузла	0	1	…	i	…	p
$\overline{X}$	$x_{1,0}$	$x_{1,1}$	…	$x_{1,i}$	…	$x_{1,p}$
$\overline{Y}_1$	$y_{1,0}$	$y_{1,1}$	…	$y_{2,i}$	…	$y_{1,p}$
$\overline{Y}_2$	$y_{2,0}$	$y_{3,1}$	…	$y_{2,i}$	…	$y_{2,p}$

де: $\overline{X} = [x_i, i = \overline{1,p}]$, $\overline{\overline{Y}} = \left[\overline{Y}_k = [y_{k,i}, i = \overline{1,p}];\ k = \overline{1,m}\right]$ – відомі числа; p – кількість вузлів інтерполянти.

Загалом функцію $Y_k = Y_k[x], k = \overline{1,2}$, яку задано табл. 4, можна подати аналітично її інтерполянтою у вигляді многочлена Тейлора n-го степеня:

$$Y_k = c_{k,0} + c_{k,1}\frac{x}{1!} + c_{k,2}\frac{x^2}{2!} + \ldots + c_{k,p}\frac{x^n}{n!} = \overline{T}[x]\times\overline{C}_k^{\text{т}}, k = \overline{1,2}, \qquad (16)$$

де: $\overline{T}[x]$ – рядок Тейлора n-го степеня; $\overline{C}_k^{\text{т}}, k = \overline{1,2}$ – транспонований рядок (стовпець) коефіцієнтів k-ої інтерполянти. Аналогічно до виразу (6) k-ий стовпець $\overline{C}_k^{\text{т}}$ є коренем лінійного матричного рівняння:

$$\overline{\overline{T}}[\overline{X}]\times\overline{C}_k^{\text{т}} = \overline{Y}_k^{\text{т}}, k = \overline{1,2} \Rightarrow \overline{\overline{T}}[\overline{X}]^{-1}\times\overline{Y}_k^{\text{т}} = \overline{C}_k^{\text{т}}, k = \overline{1,2}, \qquad (17)$$

де: $\overline{Y}_k^{\text{т}}, k = \overline{1,2}$ – транспонований рядок (стовпець) вузлів k-ої інтерполянти.

Площа плоскої фігури, обмеженої кривими у вигляді многочлена (16), з урахуванням виразу (17), у скалярному записі визначається за такою формулою:

$$S = \int_a^b \left(f_2[x] - f_1[x]\right)dx =$$
$$= \left(c_{2,0}\frac{x}{1!} + c_{2,1}\frac{x^2}{2!} + \ldots + c_{2,p}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\Bigg|_{x=a}^{x=b}\right) - \left(c_{1,0}\frac{x}{1!} + c_{1,1}\frac{x^2}{2!} + \ldots + c_{1,p}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\Bigg|_{x=a}^{x=b}\right), \qquad (18)$$

а у матричному записі – за такою формулою:

$$S = \overline{T}^{\text{i}}[x]\Big|_{x=x'}\times\overline{\overline{Ix}}\times\overline{C}_2^{\text{т}}\Big|_{x=a}^{x=b} - \overline{T}^{\text{i}}[x]\Big|_{x=x'}\times\overline{\overline{Ix}}\times\overline{C}_1^{\text{т}}\Big|_{x=a}^{x=b} =$$
$$= \overline{T}^{\text{i}}[x]\Big|_{x=a}^{x=b}\times\overline{\overline{Ix}}\times\left(\overline{C}_2^{\text{т}} - \overline{C}_1^{\text{т}}\right) = \left(\overline{T}^{\text{i}}[x]\Big|_{x=b} - \overline{T}^{\text{i}}[x]\Big|_{x=a}\right)\times\overline{\overline{Ix}}\times\left(\overline{C}_2^{\text{т}} - \overline{C}_1^{\text{т}}\right), \qquad (19)$$

де: $\overline{T}^{\text{i}}[x]$ – інтегрований рядок Тейлора (n+1)-го степеня; $\overline{\overline{Ix}}$ – матриця інтегрування рядка Тейлора.

Отже, під час обчислення площі плоскої фігури від функції, заданої табл. 4, потрібно виконати такі дії:

- за даними таблиці сформувати два матричні рівняння (17) та розв'язати їх;
- сформувати інтегрований рядок Тейлора $\overline{T}^{\text{i}}[x]$ і матрицю його інтегрування $\overline{\overline{Ix}}$;
- підставити у формулу (19) отримані корені $\overline{C}_k^{\text{т}}$ рівняння (17) та числові значення $x = a$ і $x = b$, а потім виконати відповідні операції множення матриць.

Приклад 2. Нехай від функцій $Y_k = Y_k[x], k = \overline{1,2}$, заданих табл. 5, потрібно обчислити площу плоскої фігури при $x = a = 0.9$ і $x = b = 1.5$.

Табл. 5. Значення двох табличних функцій для однієї змінної, які описують криві плоскої фігури

№ вузла	0	1	2	3
$\overline{X}$	0,90	1.00	1.25	1.50
$\overline{Y}_1$	427	364	190	156
$\overline{Y}_2$	893	686	430	304

Розв'язком матричного рівняння (17) для двох табличних функцій є такі два вектори-стовпці:

$$\overline{C}_1^{\text{т}} = \begin{vmatrix}\mathrm{c}_{1,0}\\ \mathrm{c}_{1,1}\\ \mathrm{c}_{1,2}\\ \mathrm{c}_{1,3}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-1629.29\\ 6870.90\\ -14117.14\\ 13085.71\end{vmatrix};\ \overline{C}_2^{\text{т}} = \begin{vmatrix}\mathrm{c}_{2,0}\\ \mathrm{c}_{2,1}\\ \mathrm{c}_{2,2}\\ \mathrm{c}_{2,3}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}9099.29\\ -18384.24\\ 26437.14\\ -19485.71\end{vmatrix}. \qquad (20)$$

Значення площі плоскої фігури (рис. 3), обмеженої кривими у вигляді двох функцій $Y_k = Y_k[x], k = \overline{1,2}$ при $x = a = 0.9$ і $x = b = 1.5$, записуємо за формулою (19) спочатку у буквеному вигляді:

$$S=\int_a^b\left(f_2[x]-f_1[x]\right)dx=\left(\bar{T}^{\mathrm{I}}[x]\Big|_{x=b}-\bar{T}^{\mathrm{I}}[x]\Big|_{x=a}\right)\times\overline{\overline{Ix}}\times\left(\bar{C}_2^{\mathrm{T}}-\bar{C}_1^{\mathrm{T}}\right)=$$

$$=\left(\begin{vmatrix}1 & \frac{b}{1!} & \frac{b^2}{2!} & \frac{b^3}{3!} & \frac{b^4}{4!}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & \frac{a}{1!} & \frac{a^2}{2!} & \frac{a^3}{3!} & \frac{a^4}{4!}\end{vmatrix}\right)\times\begin{Vmatrix}0&0&0&0\\ \mathbf{1}&0&0&0\\ 0&\mathbf{1}&0&0\\ 0&0&\mathbf{1}&0\\ 0&0&0&\mathbf{1}\end{Vmatrix}\times\left(\begin{vmatrix}c_{2,0}\\ c_{2,1}\\ c_{2,2}\\ c_{2,3}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}c_{1,0}\\ c_{1,1}\\ c_{1,2}\\ c_{1,3}\end{vmatrix}\right) \qquad (21)$$

а потім – у числовому вигляді:

$$\bar{T}^{\mathrm{I}}[x]\Big|_{x=1.5}-\bar{T}^{\mathrm{I}}[x]\Big|_{x=0.9}=\begin{vmatrix}0 & 0.6 & 0.720 & 0.4410 & 0.1836\end{vmatrix};$$

$$\Delta\bar{C}^{\mathrm{T}}=\bar{C}_2^{\mathrm{T}}-\bar{C}_1^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}9099.29\\ -18384.24\\ 26437.14\\ -19485.71\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-1629.29\\ 6870.90\\ -14117.14\\ 13085.71\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10728.57\\ -25255.14\\ 40554.29\\ -32271.43\end{vmatrix} \qquad (22)$$

$$S=\begin{vmatrix}0 & 0.6 & 0.720 & 0.4410 & 0.1836\end{vmatrix}\times\begin{Vmatrix}0&0&0&0\\ \mathbf{1}&0&0&0\\ 0&\mathbf{1}&0&0\\ 0&0&\mathbf{1}&0\\ 0&0&0&\mathbf{1}\end{Vmatrix}\times\begin{vmatrix}10728.57\\ -25255.14\\ 40554.29\\ -32271.43\end{vmatrix}=157.77.$$

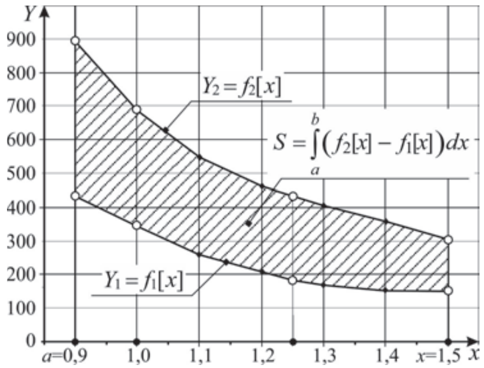


Рис. 3. Схема обчислення площі плоскої фігури, обмеженої кривими у вигляді двох функцій, заданої табл. 5

4. Обчислення довжини дуги плоскої кривої

Якщо крива $y=f[x]$ ($f[x]\geq 0$) на відрізку $[a,\ b]$ – гладка (тобто, похідна $y'=f'[x]$), то довжина відповідної дуги цієї кривої (рис. 2,*б*) обчислюється за такою формулою:

$$L=\int_a^b\sqrt{1+f'[x]^2}\,dx. \qquad (23)$$

Загалом функцію $Y=Y[\bar{X}]$, яку задано табл. 2, можна подати аналітично її інтерполянтою (5) у вигляді многочлена Тейлора n-го степеня.

Довжину дуги плоскої кривої, заданої у вигляді многочлена Тейлора n-го степеня, можна обчислити за такою формулою:

$$L=c_0\frac{x}{1!}+c_1\frac{x^2}{2!}+\ldots+c_p\frac{x^n}{n!}\Bigg|_{x=a}^{x=b}=\bar{T}[x]\Big|_{x=x'}\times\bar{C}^{\mathrm{T}}\Big|_{x=a}^{x=b}=$$
$$=\bar{T}[x]\Big|_{x=a}^{x=b}\times\bar{C}^{\mathrm{T}}=\left(\bar{T}[x]\Big|_{x=a}-\bar{T}[x]\Big|_{x=b}\right)\times\bar{C}^{\mathrm{T}}, \qquad (24)$$

де: $\bar{T}[x]$ – рядок Тейлора n-го степеня.

Отже, під час обчислення довжини дуги плоскої кривої від функції, заданої табл. 2, потрібно виконати такі дії:

- за даними таблиці сформувати матричне рівняння (6) та розв'язати його;
- для довжини дуги плоскої кривої – підставити у формулу (25) отриманий корінь $\bar{C}^{\mathrm{T}}$ рівняння (6) та числові значення $x=a$ і $x=b$, а потім виконати відповідні операції множення матриць.

Приклад 3. Нехай від функції $Y=Y[\bar{X}]$, заданої табл. 3, потрібно обчислити значення довжини дуги плоскої кривої при $x=a=0.9$ і $x=b=1.5$.

Рівняння (6) для цієї табличної функції має вигляд, який подано виразом інтерполянти (10), а його розв'язком є вектор-стовпець (11). Значення довжини дуги плоскої кривої (рис. 2,*б*) від функції $Y=Y[x]$ при $x=a=0.9$ і $x=b=1.5$ знаходимо за формулою (25) спочатку у буквеному вигляді:

$$L=\left(\bar{T}[x]\Big|_{x=a}-\bar{T}[x]\Big|_{x=b}\right)\times\bar{C}^{\mathrm{T}}=\left(\begin{vmatrix}1 & \frac{a}{1!} & \frac{a^2}{2!} & \frac{a^3}{3!}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & \frac{b}{1!} & \frac{b^2}{2!} & \frac{b^3}{3!}\end{vmatrix}\right)\times\begin{vmatrix}c_0\\ c_1\\ c_2\\ c_3\end{vmatrix}, \qquad (25)$$

а потім – у числовому вигляді:

$$\bar{T}[x]\Big|_{x=0.9}-\bar{T}[x]\Big|_{x=1.5}=\begin{vmatrix}1 & \frac{0.9}{1!} & \frac{0.9^2}{2!} & \frac{0.9^3}{3!}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & \frac{1.5}{1!} & \frac{1.5^2}{2!} & \frac{1.5^3}{3!}\end{vmatrix}=$$
$$=\begin{vmatrix}1 & 0{,}9 & 0{,}405 & 0{,}1215\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 1{,}5 & 1{,}125 & 0{,}5625\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -0{,}6 & -0{,}72 & -0{,}441\end{vmatrix}; \qquad (26)$$

$$L=\begin{vmatrix}0 & -0{,}6 & -0{,}72 & -0{,}441\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}9099.29\\ -18384.24\\ 26437.14\\ -19485.71\end{vmatrix}=589.00.$$

Висновки

1. Встановлено, що для більшості практичних задач обчислення інтегралів не завжди вдається первісну від підінтегральної функції виразити через елементарні функції. В інженерних розрахунках підінтегральна функція часто задається таблицею її значень для певних значень аргумента.

2. Розроблено метод чисельного інтегрування табличної функції для однієї змінної з використанням многочлена Тейлора. Для обчислення *неозначеного інтеграла* потрібно помножити інтегрований рядок Тейлора на матрицю інтегрування та на стовпець коефіцієнтів інтерполянти. Обчислення ж *означеного інтеграла* зводиться до множення виразу, який є різницею між інтегрованими рядками Тейлора в заданих межах (кінцевій та початковій), на матрицю інтегрування та на стовпець коефіцієнтів інтерполянти.

3. Розроблено алгоритм обчислення площі плоскої фігури, заданої табличними функціями для однієї змінної з використанням многочлена Тейлора. Для обчислення площі фігури потрібно помножити інтегрований рядок Тейлора на матрицю інтегрування та на вираз, який є різницю між стовпцями коефіцієнтів інтерполянт (верхньої та нижньої), які описують криві плоскої фігури.

4. Розроблено алгоритм обчислення довжини дуги плоскої кривої, заданої табличною функцією для однієї змінної з використанням многочлена Тейлора. Обчислення довжини дуги кривої зводиться до множення виразу, який є різницею між звичайними рядками Тейлора в заданих межах (початковій та кінцевій), на стовпець коефіцієнтів інтерполянти.

Література

1. Данко П.Е. Вычислительная математика в упражнениях и задачах : учеб. пособ. [для студ. ВТУЗов] / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – Ч. I. – Изд. 3-е, [перераб. и доп.]. – М. : Изд-во "Высш. шк.", 1980. – 320 с.
2. Данилина Н.И. Вычислительная математика : учебн. пособ. / Н.И. Данилина, Н.С. Дубровская, О.П. Кваша, Г.Л. Смирнов. – М. : Изд-во "Высш. шк.", 1985. – 472 с.
3. Фильц Р.В. Алгоритм вычисления на ЭВМ многочлена Тейлора и его производных / Р.В. Фильц, М.В. Коцюба, Ю.И. Грицюк // Электромеханика : Изв. вузов. – 1991. – № 5. – С. 5-10.
4. Фільц Р.В. Наближення таблично заданих функцій (інтерполяція та апроксимація). Конспект лекцій з предмету "Математичні задачі електромеханіки" для студ. спец. 1801 "Електромеханіка" / Р.В. Фільц. – Львів : Вид-во ДУ ЛП, 1995. – 59 с.

Надійшла до редакції 24.03.2016 р.

Грыцюк Ю.И., Драган Я.П. **Численное интегрирование табличных функций для одной переменной с использованием многочлена Тейлора**

Обоснована возможность численного интегрирования табличных функций с использованием многочлена Тейлора. Установлено, что во многих практических задачах первообразную от подынтегральной функции не всегда удается выразить через элементарные функции. Разработан метод численного интегрирования табличной функции для одной переменной с использованием многочлена Тейлора. Разработан алгоритм вычисления площади плоской фигуры, заданной двумя табличными функциями для одной переменной с использованием многочлена Тейлора, а также разработан алгоритм вычисления длины дуги плоской кривой, заданной табличной функцией для одной переменной. Приведены конкретные примеры вычисления интегралов – неопределенного и определенного, а также вычисления площади и длины дуги плоской фигуры.

Ключевые слова: табличная функция для одной переменной; численное интегрирование табличных функций; многочлен Тейлора; интерполяционный многочлен; вычисления площади плоской фигуры; вычисление длины дуги плоской кривой.

Gryciuk Yu.I., Dragan Ya.P. **Numerical integration of table functions to one variable using Taylor polynomial**

Has been substantiated the possibility numerical integration of table functions using polynomial Taylor. Found that many practical problems of the original integrand cannot always be expressed in terms of elementary functions. Has been designed the method of numerical integration of table functions to one variable using Taylor polynomial. Has been designed the algorithm of calculating the area of a plane figure given two table functions to one variable using Taylor polynomial, and designed the algorithm of calculating arc length of a plane curve given table function for a single variable. Showed the specific examples of computing integrals – definite and indefinite, and calculating the area of a plane figure and flat arc length figure.

Keywords: table function for one variable; numerical integration of table functions; Taylor polynomial; polynomial interpolation, calculating the area of a plane figure, calculating arc length of a plane curve.

УДК 004.383.3

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ РОЗПІЗНАВАННЯ БАГАТОМІРНИХ ОБРАЗІВ У ХЕММІНГОВОМУ ПРОСТОРІ

Б.Б. Круліковський[1], А.І. Сидор[2], О.М. Заставний[3], Я.М. Николайчук[4]

Викладено теоретичні основи розпізнавання образів у двовимірному Хеммінговому просторі. Обгрунтовано перспективу застосування оцінки зваженої модульної Хеммінгової віддалі розпізнавання образів шляхом сигнальних решітчастих моделей у двовимірному Хеммінговому просторі. Показано недоліки та функціональні обмеження відомих методів у задачах оцінки Хеммінгової віддалі багатомірних образів. Запропоновано метод опрацювання сигналів двомірного Хеммінгового простору, у вузлах якого існують багатовимірні об'єкти, на основі кодування решітчастих даних у теоретико-числовому базисі Крестерсона.

Ключові слова: Хеммінговий простір, розпізнавання, образи, сигнали.

Вступ. Теорія розпізнавання образів є важливим інструментом інформаційної технології опрацювання сигналів та ідентифікації станів складних об'єктів управління. Серед різних підходів побудови алгоритмів розпізнавання образів широкого застосування набули методи розпізнавання одномірних образів у Хеммінговому просторі (ХП). Перспективним напрямком розвитку теорії та вдосконалення методів розпізнавання образів у ХП є кодування багатомірних об'єктів у його вузлах та розширення теоретичних засад шляхом вдосконалення методів кодування багатомірних даних на основі різних теоретико-числових базисів.

У сучасних моніторингових системах розподілених об'єктів управління, до яких належить, наприклад, моніторинг водних ресурсів певного географічного регіону, постає задача діагностування моніторингових даних у неабстрактних вузлах ХП [1]. Поняття неабстрактного ХП під час моніторингового сканування географічної території полягає в тому, що віддалі між вузлами не є однаковими і не відображаються у вигляді квадратів. Отже, цей ХП математично трансформується в абстрактний ХП, який видається у вигляді двомірної решітчастої функції без ідентифікації різних віддалей між вузлами, що спрощує математику задач розпізнавання образів у ХП згідно з класичною теорією матриць.

Водночас, існуючі методи формалізації ХП практично не дають змоги розв'язувати задачі розпізнавання багатомірних образів. Успішне вирішення цієї задачі також ускладнюється обмеженою швидкодією процесорних засобів, які, як правило, реалізують арифметику двійкової системи числення теоретико-числового базису Радемахера. Отже, вирішення науково-технічних задач розробки технічних засобів та процесорів розпізнавання багатовимірних образів у ХП є актуальною науково-прикладною задачею.

Теоретичні основи методів розпізнавання образів. Розпізнавання образів (об'єктів, сигналів, процесів, ситуацій чи явищ) – це задача ідентифікації об'єкта або визначення його властивостей за зображенням (оптичне розпізна-

[1] доц. Б.Б. Круліковський, канд. техн. наук – Тернопільський НЕУ;
[2] аспір. А.І. Сидор – Тернопільський НЕУ;
[3] викл. О.М. Заставний, канд. техн. наук – Тернопільський НЕУ;
[4] проф. Я.М. Николайчук, д-р техн. наук – Тернопільський НЕУ