УДК 536.21

РОЗРАХУНОК ДВОВИМІРНИХ СТАТИЧНИХ БЕЗВИХРОВИХ ТЕПЛОВИХ ПОЛІВ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

***Н.І. Дмитрусь*[1], *В.П. Карашецький*[2]**

Виведено основні формули методу скінченних елементів для крайової задачі розрахунку двовимірних статичних безвихрових теплових полів в областях, заповнених нелінійними безгістерезисними анізотропними середовищами з використанням лагранжевих трикутників 1-4 порядків, кубатурних формул чисельного інтегрування та з урахуванням граничних умов Неймана і Дирихле. Розглянуто алгоритм визначення внеску кожного скінченного елемента у вектор нев'язок та матрицю Якобі нелінійної системи рівнянь, що розв'язується методом Ньютона.

Ключові слова: безвихрове теплове поле, теплопровідність, лагранжевий трикутник, метод скінченних елементів, кубатурна формула, граничні умови.

Для крайової задачі розрахунку статичного безвихрового теплового поля, що описується рівняннями:

$$div\bar{B}(\bar{H})=0, \tag{1}$$

$$\bar{H}=-gradU, \tag{2}$$

у плоскій області D функціонал F представлено у вигляді

$$F=\int_S WdS, \tag{3}$$

де:

$$W=\int_0^{\bar{B}} \bar{H}d\bar{B}; \tag{4}$$

U – температура; $\bar{H}$, $\bar{B}$ – розміщені у площині D вектори напруженості теплового поля та густини теплового потоку; S – площа області D.

Розподіл температури U всередині області D, що мінімізує функціонал F, забезпечує розв'язання крайової задачі. Умова мінімуму функціонала (3) набуває вигляду

$$\frac{dF}{dU}=0. \tag{5}$$

Для побудови скінченно-елементної моделі заповнимо область розрахунку D сукупністю лагранжевих трикутників n-го порядку [2].

Нехай внаслідок тріангуляції двовимірної області розрахунку D отримуємо M лагранжевих скінченних елементів (СЕ). Кожному з них присвоїмо порядковий номер m ($m=\overline{1,M}$) і локальну нумерацію вузлів, згідно з якою i-му вузлу m -го СЕ відповідає номер mi. Для всієї області розрахунку встановимо сіткову (наскрізну) нумерацію R внутрішніх вузлів і G граничних вузлів. Поточні значення порядкових номерів внутрішніх вузлів позначимо r.

Для скінченно-елементної області функціонал F з урахуванням (3), (4) набуде вигляду:

---

[1] аспір. Н.І. Дмитрусь – НЛТУ України, м. Львів;
[2] доц. В.П. Карашецький, канд. техн. наук – НЛТУ України, м. Львів

$$F=\sum_{m=1}^{M}F_m=\sum_{m=1}^{M}W_m, \tag{6}$$

де

$$W_m=\int_{S_m} WdS; \tag{7}$$

S_m – площа m-го СЕ, що визначається через координати його вершин у прямокутній системі координат за формулою

$$S_m=\frac{1}{2}\det\begin{Vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{Vmatrix}. \tag{8}$$

Утворимо R-мірний вектор-рядок і вектор-стовпець температури U у внутрішніх вузлах:

$$\vec{U}=(U_1,\dots,U_R);\ \vec{U}_*=(U_1,\dots,U_R)_*. \tag{9}$$

Умова мінімуму функціонала F з урахуванням (5) рівносильна нелінійній системі алгебраїчних рівнянь

$$\vec{\phi}_*[\vec{U}_*]=\frac{dF}{d\vec{U}_*}=0. \tag{10}$$

Застосуємо для (7) кубатурні формули чисельного інтегрування за площею лагранжевого трикутника [2]. Наприклад, у випадку використання лагранжевих трикутників другого порядку (n=2), кількість вузлів у яких p=6, отримаємо

$$F_m=\frac{1}{3}S_m\sum_{i=4}^{6}W_{mi}, \tag{11}$$

де

$$W_{mi}=\int_0^{\bar{B}_{mi}}\bar{H}d\bar{B}. \tag{12}$$

Подамо залежність температури U в межах m-го СЕ повним поліномом другого степеня

$$U=\vec{U}_m k_m^{-1}\vec{k}_*=\vec{k}k_{m*}^{-1}\vec{U}_{m*}, \tag{13}$$

де

$$\vec{U}_m=(U_{m1},\dots,U_{m6}) \tag{14}$$

вектор-рядок значень температури U у вузлах m-го СЕ;

$$\vec{k}=(1,x,y,xy,x^2,y^2) \tag{15}$$

координатний вектор-рядок поточної точки з координатами x, y;

$$k_{m*}=\begin{Vmatrix}1 & x_{m1} & y_{m1} & x_{m1}y_{m1} & x_{m1}^2 & y_{m1}^2\\ 1 & x_{m2} & y_{m2} & x_{m2}y_{m2} & x_{m2}^2 & y_{m2}^2\\ 1 & x_{m3} & y_{m3} & x_{m3}y_{m3} & x_{m3}^2 & y_{m3}^2\\ 1 & x_{m4} & y_{m4} & x_{m4}y_{m4} & x_{m4}^2 & x_{m4}^2\\ 1 & x_{m5} & y_{m5} & x_{m5}y_{m5} & x_{m5}^2 & y_{m5}^2\\ 1 & x_{m6} & y_{m6} & x_{m6}y_{m6} & x_{m6}^2 & y_{m6}^2\end{Vmatrix} \tag{16}$$

координатна матриця, рядки якої є координатними векторами вигляду (15) у вузлах m-го СЕ; $\vec{U}_{m*}$, $\vec{k}_*$, k_m – відповідно вектори-стовпці і матриця, транспоновані відносно $\vec{U}_m$, $\vec{k}$, k_{m*}.

У локальній прямокутній системі координат вектор $\bar{H}$ напруженості теплового поля пов'язаний із температурою U співвідношенням

$$\bar{H} = -gradU = -\frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j}. \tag{17}$$

Проекції H_x, H_y вектора $\bar{H}$ в mi-му вузлі з врахуванням (13) і (17) набувають вигляду:

$$H_{xmi} = -\frac{\partial U}{\partial x}\Big|x_{mi}, y_{mi} = -\vec{U}_m\vec{K}^{(x)}_{mi*} = -\vec{K}^{(x)}_{mi}\vec{U}_{m*}; \tag{18}$$

$$H_{ymi} = -\frac{\partial U}{\partial y}\Big|x_{mi}, y_{mi} = -\vec{U}_m\vec{K}^{(y)}_{mi*} = -\vec{K}^{(y)}_{mi}\vec{U}_{m*}, \tag{19}$$

де:

$$\vec{K}^{(x)}_{mi} = \vec{k}^{(x)}_{mi}k^{-1}_{m*};\ \vec{K}^{(y)}_{mi} = \vec{k}^{(y)}_{mi}k^{-1}_{m*}; \tag{20}$$

$$\vec{K}^{(x)}_{mi*} = k^{-1}_m\vec{k}^{(x)}_{mi*};\ \vec{K}^{(y)}_{mi*} = k^{-1}_m\vec{k}^{(y)}_{mi*}; \tag{21}$$

$$\vec{k}^{(x)}_{mi} = \frac{\partial\vec{k}}{\partial x}\Big|x_{mi}, y_{mi} = (0,1,0,y_{mi},2x_{mi},0); \tag{22}$$

$$\vec{k}^{(y)}_{mi} = \frac{\partial\vec{k}}{\partial y}\Big|x_{mi}, y_{mi} = (0,0,1,x_{mi},0,2y_{mi}); \tag{23}$$

$\vec{k}^{(x)}_{mi*}$, $\vec{k}^{(y)}_{mi*}$ – стовпці, отримані транспонуванням рядків (22), (23).

Диференціюючи вираз (12) по вектору $\vec{U}_m$ і враховуючи (18), (19), отримаємо

$$\vec{\phi}_{m*} = \frac{dF_m}{d\vec{U}_m} = \frac{1}{3}S_m\sum_{i=4}^{6}\frac{d}{d\vec{U}_m}\int_0^{\bar{H}_{mi}}(d\bar{H})\bar{B} = \frac{1}{3}S_m\sum_{i=4}^{6}\frac{d\bar{H}_{mi}}{d\vec{U}_m}\bar{B}_{mi} =$$

$$= \frac{1}{3}S_m\sum_{i=4}^{6}\left(\frac{dH_{xmi}}{d\vec{U}_m}B_{xmi} + \frac{dH_{ymi}}{d\vec{U}_m}B_{ymi}\right) = = -\frac{1}{3}S_m\sum_{i=4}^{6}(\vec{K}^{(x)}_{mi*}B_{xmi} + \vec{K}^{(y)}_{mi*}B_{ymi}), \tag{24}$$

де $\bar{B}_{mi}$, B_{xmi}, B_{ymi} – відповідно вектор густини теплового потоку і його складові в mi-му вузлі, які визначаються за значеннями проекцій (18), (19) вектора напруженості і характеристикою теплопровідності нелінійного безгістерезисного середовища, що виражається векторним рівнянням або трьома скалярними рівняннями:

$$\bar{B} = \bar{B}[\bar{H}], \tag{25}$$

$$B_x = B_x[H_x, H_y];\ B_y = B_y[H_x, H_y]. \tag{26}$$

Нелінійна система рівнянь (10) розв'язується, як правило, ітераційним методом Ньютона.

Для визначення внеску m-го СЕ в систему рівнянь (10) потрібно:

- знайти вектор $\vec{\phi}_{m*}$ на кожній ітерації за формулою (24);

- за таблицею відповідності локальної і сіткової нумерації встановити номери r вузлів, які збігаються з вузлами $m1,\ldots,mp$;
- кожний елемент вектора $\vec{\phi}_{m*}$, який відповідає r-му внутрішньому вузлу, внести відповідно в r-те рівняння системи (10).

Повну систему рівнянь (10) отримаємо, виконавши цю процедуру для всіх M елементів. У цьому випадку викладену вище процедуру використовують на етапі формування вектора нев'язок. Більш трудомісткою операцією є складання для векторної функції $\vec{\phi}_* = (\phi_1,\ldots,\phi_R)_*$ матриці Якобі φ розмірності $R\times R$. Виведемо загальні вирази, що використовуються для цієї мети.

Диференціюючи вираз (24) за вектором $\vec{U}_{m*}$, отримуємо матрицю розмірності 6×6

$$\varphi_m = \frac{d\vec{\phi}_{m*}}{d\vec{U}_{m*}} = -\frac{1}{3}S_m\sum_{i=4}^{6}\left(\vec{K}^{(x)}_{mi*}\frac{dB_{xmi}}{d\vec{U}_{m*}} + \vec{K}^{(y)}_{mi*}\frac{dB_{ymi}}{d\vec{U}_{m*}}\right). \tag{27}$$

З урахуванням (18), (19), (26) і (27) маємо

$$\varphi_m = -\frac{1}{3}S_m\sum_{i=4}^{6}\left(\vec{K}^{(x)}_{mi*}\left(\lambda_{xxmi}\frac{dH_{xmi}}{d\vec{U}_{m*}} + \lambda_{xymi}\frac{dH_{ymi}}{d\vec{U}_{m*}}\right) + \vec{K}^{(y)}_{mi*}\left(\lambda_{yxmi}\frac{dH_{xmi}}{d\vec{U}_{m*}} + \lambda_{yymi}\frac{dH_{ymi}}{d\vec{U}_{m*}}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}S_m\sum_{i=4}^{6}(\vec{K}^{(x)}_{mi*}(\lambda_{xxmi}\vec{K}^{(x)}_{mi} + \lambda_{xymi}\vec{K}^{(y)}_{mi}) + \vec{K}^{(y)}_{mi*}(\lambda_{yxmi}\vec{K}^{(x)}_{mi} + \lambda_{yymi}\vec{K}^{(y)}_{mi})), \tag{28}$$

де $\lambda_{jkmi}(j,k = x,y)$ – елементи тензора диференціальної теплопровідності середовища

$$\lambda = \frac{d\bar{B}}{d\bar{H}} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial B_x}{\partial H_x} & \dfrac{\partial B_x}{\partial H_y} \\ \dfrac{\partial B_y}{\partial H_x} & \dfrac{\partial B_y}{\partial H_y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} \end{Bmatrix}, \tag{29}$$

обчислювані в i-му вузлу m-го СЕ.

Для безгістерезисного середовища на основі теореми взаємності **[3]** $\lambda_{xy} = \lambda_{yx}$, тому $\lambda_{xymi} = \lambda_{yxmi}$.

У випадку ізотропного нелінійного середовища тензор диференціальної теплопровідності визначають за формулою **[1]**

$$\lambda = \begin{Bmatrix} \lambda_\rho\cos^2\eta_x + \lambda_\tau\sin^2\eta_x & (\lambda_\rho - \lambda_\tau)\cos\eta_x\cos\eta_y \\ (\lambda_\rho - \lambda_\tau)\cos\eta_y\cos\eta_x & \lambda_\rho\cos^2\eta_y + \lambda_\tau\sin^2\eta_y \end{Bmatrix}, \tag{30}$$

де: $\lambda_\rho = \dfrac{dB}{dH}$, $\lambda_\tau = \dfrac{B}{H}$ – відповідно радіальна диференціальна і тангенціальна теплопровідність середовища; $\eta_l(l = x,y)$ – кути між вектором $\bar{H}$ або $\bar{B}[\bar{H}]$ і відповідно ортами $\bar{l}, \bar{j}$ локальної декартової системи координат.

Для лінійного ізотропного середовища $\lambda_\rho = \lambda_\tau = B/H = \lambda_s$, тому тензор диференціальної теплопровідності набуває вигляду

$$\lambda = \begin{Bmatrix} \lambda_s & 0 \\ 0 & \lambda_s \end{Bmatrix}. \tag{31}$$

Для того, щоб визначити вклад m-го СЕ в матрицю Якобі φ, потрібно обчислити матрицю φ_m на кожній ітерації за формулою (28) і підсумувати всі її елементи з відповідними елементами матриці φ, враховуючи, що елемент φ_{mij} належить ns-й клітині матриці φ, де n, s – сіткові номери вузлів з локальними номерами mi і mj.

Повну матрицю Якобі φ отримаємо, виконавши цю процедуру для кожного з M скінченних елементів області розрахунку D. У випадку використання лагранжевих трикутників 1-го, 3-го і 4-го порядків потрібно застосувати відповідні кубатурні формули чисельного інтегрування [2] і провести вивід основних залежностей за викладеною вище методикою.

Уздовж границі області D повинні бути задані граничні умови Дирихле (значення потенціалу U), або однорідні граничні умови Неймана

$$H_n = -\frac{\partial U}{\partial n} = 0, \tag{32}$$

де H_n – нормальна складова вектора $\bar{H}$ на одиничний вектор $\bar{n}$ зовнішньої нормалі до границі області D.

Для визначення внеску кожного m-го СЕ у вектор нев'язок $\vec{\phi}_*$ і матрицю Якобі φ, якщо він має один чи кілька граничних вузлів з граничними умовами Дирихле, потрібно на кожній ітерації для кожного вузла mD з граничними умовами Дирихле враховувати, що значення U_{mD} задане і постійне, тому:

$$\phi_{mD} = \frac{\partial F_m}{\partial U_{mD}} = 0; \tag{33}$$

$$\varphi_{mDp} = \frac{\partial \phi_{mD}}{\partial U_{mp}} = 0, \;\; p = \overline{1,6}; \tag{34}$$

$$\varphi_{mpD} = \frac{\partial \phi_{mp}}{\partial U_{mD}} = 0, \;\; p = \overline{1,6}. \tag{35}$$

Розглянемо визначення внеску кожного m-го СЕ у вектор нев'язок $\vec{\phi}_*$ і матрицю Якобі φ, який межує своєю стороною з границею області D і має тільки два граничних вузли з граничними умовами Неймана, оскільки для СЕ n-го порядку кількість P_N таких вузлів визначається за формулою

$$P_N = n. \tag{36}$$

Умова Неймана (32) на границі області D набуває такого вигляду:

$$H_n = \bar{H}\bar{n} = H_x n_x + H_y n_y = 0, \tag{37}$$

де n_x, n_y – проекції одиничного вектора $\bar{n}$ дотичної до границі області D.

З урахуванням (18), (19) запишемо (37) для кожного із двох вузлів з граничними умовами Неймана m-го СЕ

$$(n_x K^{(x)}_{mN*} + n_y K^{(y)}_{mN*})\vec{U}_{m*} = 0, \tag{38}$$

де:
$$K^{(x)}_{mN*} = \begin{Vmatrix} \vec{K}^{(x)}_{mN_1} \\ \vec{K}^{(x)}_{mN_2} \end{Vmatrix}; \;\; K^{(y)}_{mN*} = \begin{Vmatrix} \vec{K}^{(y)}_{mN_1} \\ \vec{K}^{(y)}_{mN_2} \end{Vmatrix} \tag{39}$$

прямокутні матриці розмірності 2×6, рядками яких є вектори-рядки, визначені за виразами (20) для вузлів з граничними умовами Неймана m-го СЕ; N_1, N_2 – відповідно початкове і кінцеве значення локальних номерів вузлів з граничними умовами Неймана m-го СЕ.

Подамо вираз (38) у вигляді

$$k_{mn}\vec{U}_{m*} = 0, \tag{40}$$

де
$$k_{mn} = n_x K^{(x)}_{mN*} + n_y K^{(y)}_{mN*} \tag{41}$$

прямокутна матриця розмірності 2×6. Утворимо вектор-стовпець значень потенціалу у вузлах m-го СЕ з умовами Неймана

$$\vec{U}_{mN*} = (U_{mN_1}, U_{mN_2})_* \tag{42}$$

і вектор-стовпець значень потенціалу у всіх інших вузлах, що не ввійшли до складу $\vec{U}_{mN*}$, (внутрішніх вузлах і вузлах з умовами Дирихле)

$$\vec{U}_{mL*} = (U_{mL_1}, ..., U_{mL_4})_*, \tag{43}$$

де L_1, L_4 – відповідно початкове і кінцеве значення локальних номерів внутрішніх вузлів і вузлів з умовами Дирихле m-го СЕ.

У виразах (42), (43) потенціали вузлів розташовуємо в порядку зростання їх локальних номерів. З урахуванням (42) і (43) вираз (40) можна подати як

$$k_{mL}\vec{U}_{mL*} + k_{mN}\vec{U}_{mN*} = 0, \tag{44}$$

де: k_{mL} – прямокутна матриця розмірності 2×4, утворена із тих стовпців матриці k_{mn}, номери яких збігаються з локальними номерами елементів вектора $\vec{U}_{mL*}$; k_{mN} – квадратна матриця розмірності 2×2, утворена із тих стовпців матриці k_{mn}, номери яких збігаються з локальними номерами елементів вектора $\vec{U}_{mN*}$.

З рівняння (44) визначаємо

$$\vec{U}_{mN*} = -k^{-1}_{mN} k_{mL} \vec{U}_{mL*} = -G_m \vec{U}_{mL*}, \tag{45}$$

де
$$G_m = k^{-1}_{mN} k_{mL} \tag{46}$$

прямокутна матриця розмірності 2 × 4, що зв'язує значення потенціалу у вузлах з граничними умовами Неймана з його значеннями в інших вузлах m-го СЕ.

Виконавши транспонування у виразі (45), одержимо

$$\vec{U}_{mN} = -\vec{U}_{mL} G_{m*}. \tag{47}$$

Вектор-стовпець $\vec{U}_{m*}$ значень потенціалу у вузлах m-го СЕ визначається через вектори-стовпці $\vec{U}_{mL*}$, $\vec{U}_{mN*}$ у вигляді

$$\vec{U}_{m*} = G_{mN}\vec{U}_{mN*} + G_{mL}\vec{U}_{mL*} \tag{48}$$

або у випадку транспонованих векторів

$$\vec{U}_m = \vec{U}_{mN} G_{mN*} + \vec{U}_{mL} G_{mL*}, \tag{49}$$

де: G_{mN}, G_{mL} – прямокутні матриці розмірності відповідно 6×2 і 6×4, елементами яких є постійні числа 0 або 1; G_{mN*}, G_{mL*} – матриці, транспоновані відносно матриць G_{mN}, G_{mL}.

Представляючи функціонал m-го СЕ у вигляді складної функції $F_m = F_m[\vec{U}_m]$ або $F_m = F_m[\vec{U}_{mN}, \vec{U}_{mL}]$ і враховуючи (47), (49), отримаємо

$$\vec{\phi}_{mL*} = \frac{dF_m}{d\vec{U}_{mL}} = \frac{\partial \vec{U}_m}{\partial \vec{U}_{mL}} \frac{dF_m}{d\vec{U}_m} + \frac{d\vec{U}_{mN}}{d\vec{U}_{mL}} \frac{\partial \vec{U}_m}{\partial \vec{U}_{mN}} \frac{dF_m}{d\vec{U}_m} = G_{mL*} \frac{dF_m}{d\vec{U}_m} - G_{m*} G_{mN*} \frac{dF_m}{d\vec{U}_m} =$$

$$= (G_{mL*} - G_{m*} G_{mN*}) \frac{dF_m}{d\vec{U}_m} = Q_m \frac{dF_m}{d\vec{U}_m} = Q_m \vec{\phi}_{m*}, \quad (50)$$

де

$$Q_m = G_{mL*} - G_{m*} G_{mN*} \quad (51)$$

прямокутна матриця розмірності 4×6, що забезпечує виконання умов Неймана при переході від вектора-стовпця $\vec{\phi}_{m*}$ до вектора-стовпця $\vec{\phi}_{mL*}$ розмірності 4.

Аналогічно, представляючи вектор-стовпець $\vec{\phi}_{m*}$ у вигляді $\vec{\phi}_{m*} = \vec{\phi}_{m*}[\vec{U}_{m*}]$ або $\vec{\phi}_{m*} = \vec{\phi}_{m*}[\vec{U}_{mN*}, \vec{U}_{mL*}]$ і враховуючи (45), (48), (50), одержимо квадратну матрицю розмірності 4×4 вигляду

$$\varphi_{mL} = \frac{d\vec{\phi}_{mL*}}{d\vec{U}_{mL*}} = \frac{d(Q_m \vec{\phi}_{m*})}{d\vec{U}_{mL*}} = Q_m \frac{d\vec{\phi}_{m*}}{d\vec{U}_{mL*}} = Q_m \frac{d\vec{\phi}_{m*}}{d\vec{U}_{m*}} \frac{\partial \vec{U}_{m*}}{\partial \vec{U}_{mL*}} + Q_m \frac{d\vec{\phi}_{m*}}{d\vec{U}_{m*}} \frac{\partial \vec{U}_{m*}}{\partial \vec{U}_{mN*}} \frac{d\vec{U}_{mN*}}{d\vec{U}_{mL*}} =$$

$$= Q_m \frac{d\vec{\phi}_{m*}}{d\vec{U}_{m*}} G_{mL} - Q_m \frac{d\vec{\phi}_{m*}}{d\vec{U}_{m*}} G_{mN} G_m = Q_m \frac{d\vec{\phi}_{m*}}{d\vec{U}_{m*}} (G_{mL} - G_{mN} G_m) = Q_m \varphi_m Q_{m*}, \quad (52)$$

де

$$Q_{m*} = G_{mL} - G_{mN} G_m \quad (53)$$

матриця, транспонована відносно матриці Q_m.

Матриці Q_m, Q_{m*} у виразі (52) забезпечують виконання граничних умов Неймана при переході від матриці φ_m до матриці φ_{mL} при наявності в m-му СЕ вузлів з граничними умовами Неймана. Оскільки матриця φ_m симетрична, то, згідно з (52), матриця φ_{mL} також симетрична.

Внесок кожного m-го СЕ, який має вузли з граничними умовами Неймана, у вектор нев'язок $\vec{\phi}_*$ і матрицю Якобі φ на кожній ітерації визначається відповідно з $\vec{\phi}_{mL*}$ і φ_{mL} за правилами, встановленими раніше для внутрішніх СЕ.

Література

1. Дышовый Р.В. Расчет статического магнитного поля в неявнополюсных электрических машинах дифференциальным сеточным методом : автореф. дисс. на соискание учен. степени канд. техн. наук / Р.В. Дышовый. – Львов, 1983. – 18 с.
2. Карашецький В.П. Кубатурні формули чисельного інтегрування за площею трикутника на основі інтерполяційних повних поліномів // Науковий вісник НЛТУ України : зб. наук.-техн. праць. – Львів : РВВ НЛТУ України. – 2007. – Вип. 17.7. – С. 275-280.
3. Silvester P. Efficient techniques for finite element analysis of electric machines / P. Silvester, H.S. Cabayan, B.T. Browne // JEEE Trans. PAS. – 1973. – Vol. 92, № 4. – Pp. 1274-1281.

Надійшла до редакції 30.06.2016 р.

Дмитрусь М.И., Карашецкий В.П. **Расчет двумерных статических безвихревых тепловых полей методом конечных элементов**

Выведены основные формулы метода конечных элементов для краевой задачи расчета двумерных статических безвихревых тепловых полей в областях, заполненных нелинейными безгистерезисными анизотропными средами с использованием лагранжевых треугольников 1-4 порядков, кубатурных формул численного интегрирования и с учетом граничных условий Неймана и Дирихле. Рассмотрен алгоритм определения вклада каждого конечного элемента в вектор невязок и матрицу Якоби нелинейной системы уравнений, которая решается методом Ньютона.

Ключевые слова: безвихревое тепловое поле, теплопроводность, лагранжевый треугольник, метод конечных элементов, кубатурные формулы, граничные условия, метод Ньютона.

Dmytrus M.I., Karashetskyy V.P. **Calculation of Two-dimensional Static Non-eddy Thermal Fields of the Finite Element Method**

The results of our research provide basic formulas of the finite element method for boundary value problem calculating of two-dimensional static non-eddy thermal fields filled with nonlinear without hysteresis anisotropic environments using Lagrangian triangles 1-4 order, cubature formulas of numerical integration and with considering of boundary conditions of Neumann. Dirichlet was obtained. The algorithm determining the contribution of each finite element in the vector of residuals and matrix Jacobi nonlinear system of equations solved by Newton's method was considered.

Keywords: non-eddy thermal field, thermal conductivity, Lagrangian triangle, finite element method, cubature formula, boundary conditions, Newton's method.

УДК 621.325:669.539.43

ТРИВИМІРНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ З ВИКОРИСТАННЯМ ЇХ ФРАКТАЛЬНИХ РОЗМІРНОСТЕЙ

І.М. Журавель[1], В.М. Максимович[2]

Оптичні мікроскопи вже давно набули застосування у різних галузях – від медицини і біології до неруйнівного контролю на виробництві. Доступність цифрових відеокамер призвела до появи нового класу задач, пов'язаних з оптичними мікроскопами. Насамперед потрібно виділити завдання автоматичного аналізу мікрозображень. Розвиток комп'ютерної техніки призвів до можливості вирішення одного з найважливіших завдань автоматичного аналізу – побудови тривимірних моделей об'єктів за їх зображенням. Запропоновано підхід до побудови тривимірних зображень шляхом використання фрактальних розмірностей. Основною перевагою запропонованого методу є те, що для побудови рельєфу поверхні використовують тільки одне зображення.

Ключові слова: оброблення зображень, 3D моделювання, фрактальна розмірність, морфометрична карта.

Вступ. Різноманітні дослідження в галузях матеріалознавства, медицини, архітектури, побудова систем "віртуальної реальності", наприклад тренажерів транспортних засобів, потребують об'ємного представлення тривимірних об'єктів. Звичайно, що таке тривимірне представлення є уявним, оскільки реалізується, здебільшого, на двовимірній площині дисплея монітора. Але, незважаючи на це, воно є більш зручним для сприйняття людиною та дає змогу виявити такі особливості об'єкта, які невидимі при його двовимірному представленні. Зважаючи на зазначене вище, можна стверджувати, що задача тривимірного представлення об'єктів є актуальною.

Аналіз відомих підходів та постановка задачі. Підходів до вирішення цієї задачі є багато. Серед них виділимо найвідоміші – метод побудови триви-

[1] ст. наук. співроб. І.М. Журавель, канд. техн. наук – НУ "Львівська політехніка";
[2] проф. В.М. Максимович, д-р техн. наук – НУ "Львівська політехніка"