8. Кудерметов Р.К. Многопоточная реализация четырехточечного блочного одношагового метода решения дифференциальных уравнений / Р.К. Кудерметов // Электротехнические и компьютерные системы : сб. науч. тр. – 2015. – № 17. – С. 110-116.

9. Соколовський Я.І. Чисельний метод дослідження неізотермічного вологоперенесення у середовищах з фрактальною структурою / Я.І. Соколовський, М.В. Левкович // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". – Сер.: Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика. – Львів : Вид-во НУ "Львівська політехніка". – 2016. – № 844. – С. 124-132.

Надійшла до редакції 7.10.2016 р.

Соколовский Я.И., Яркун В.И., Левкович М.В. **Алгоритмическое и программное обеспечение для исследования неизотермического влагопереноса в средах с фрактальной структурой**

Сформированы требования и выбран интегрированный подход к созданию алгоритмического обеспечения численного моделирования неизотермического влагопереноса в средах с фрактальной структурой, который охватывает разработку параллельного алгоритма решения систем дифференциальных уравнений в частных производных. Предложена синхронизация взаимодействия потоков для параллельных обменов между временными шарами. Разработано программное обеспечение и создан интерфейс для визуализации результатов исследования.

Ключевые слова: параллельные вычисления, потоки, дифференциальные уравнения дробного порядка, влагоперенос.

Sokolovskyy Ya.I., Yarkun V.I., Levkovych M.V. **Algorithms And Software for the Research of Unisothermal Moisture Transfer in the Environment with Fractal Structure**

The requirements are specified and the integrated approach to creating numerical simulation algorithm software for unisothermal moisture transfer in environments with fractal structure is selected, which includes the development of parallel algorithm for solving systems of differential equations in partial derivatives. Synchronization streams for parallel interaction exchanges between temporal layers are proposed. Software is developed and user interface to visualize the results of the research is created.

Keywords: parallel computing, flow, differential equations of fractional order, moisture transfer.

УДК 539.3

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ЕЛІПСОЇДАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕННЯ У ТІЛІ ВНАСЛІДОК ПОПЕРЕДНЬОГО ПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ

М.М. Стадник[1], І.Я. Горбачевський[2]

Досліджено напруження, що зберігаються у неоднорідному пружному тілі з еліпсоїдальним та сфероїдальним нежорсткими чужорідними включеннями після зняття зовнішніх сил, що призвели до попереднього пластичного деформування, у місцях їх найбільшої концентрації. Задачу розв'язано наближено з урахуванням тонкості включення. За тестову взято задачу для пружного стального тіла з нікелевим та мідним сфероїдальним включеннями, коли попередньо композитові надали 8 % залишкової деформації. Показано, що величина залишкових напружень є істотною, і може позначитися на майбутній експлуатації такого композита.

Ключові слова: включення, концентрація напружень, залишкові деформації.

[1] проф. М.М. Стадник, д-р техн. наук – НЛТУ України, м. Львів;
[2] доц. І.Я. Горбачевський, канд. техн. наук – НЛТУ України, м. Львів

Модельне представлення задачі. Розглянемо безмежне тривимірне тіло із пружним ($0 \le E_1/E \le 1$, E_1, E – модулі пружності включення і матриці, відповідно) включенням, обмеженим деякою гладкою поверхнею Σ, симетричною відносно серединної площини S.

Систему прямокутних декартових координат $Oxyz$ виберемо так, щоб область S лежала в площині xOy, а поверхня Σ описувалася функцією $|z| = h(x,y)$, $(x,y)\in S$. При цьому вважаємо, що висота включення $2h(x,y)$ і радіуси кривини $\rho(x,y,0)$ контурів його поперечних перерізів площинами, які проходять через вісь Oz, є малими, порівняно з іншими лінійними розмірами включення. Нехай тіло із включенням спочатку піддають дії зовнішніх рівномірно розподілених навантажень, що паралельні до осі Oz і симетричні відносно площини $z=0$, поза границю пружності, а опісля тіло повністю звільняють від дії зусиль. Оскільки в загальному випадку механічні характеристики матриці і включення різні, у тілі виникають внутрішні залишкові напруження. Мета цього дослідження – визначити концентрацію залишкових нормальних напружень $\sigma_{zz}^{(з)}$ у тілі (матриці) при $z=0$ в околі контуру L включення, що обмежує область S.

У праці **[1]** запропоновано моделювати задачу як суперпозицію двох задач: задачі (1) для тіла з порожниною, яка має конфігурацію включення Σ, до берегів якої прикладені невідомі контактні напруження $\sigma_{zz}^{(k)}$; та задачі (2) для тіла з включенням, на яке діють ті ж самі контактні напруження. За припущення, що при розвантаженні виконується закон Гука, і розриви у тілі відсутні, для визначення $\sigma_{zz}^{(k)}$ запропоновано таку умову, що зв'язує деформації у тілі та у включенні

$$u_z^{(1)}(x,y) + u_z^{(2)}(x,y) = (e - e_1)h(x,y),\ (x,y)\in S, \tag{1}$$

де: e і e_1 – середні залишкові пластичні деформації матриці й включення; $u_z^{(1)}(x,y)$ – компонента пружних зміщень точок поверхні порожнини в матриці, що має конфігурацію включення Σ, до берегів якої прикладені нормальні напруження $\sigma_{zz}^{(k)}$; $u_z^{(2)}(x,y)$ – компонента пружних зміщень точок поверхні включення за дії цих же напружень. Враховуючи тонкість включення і симетричність напружено-деформованого стану відносно площини $z=0$, для задачі (2) зміщення $u_z^{(2)}(x,y)$ можна обчислювати так:

$$u_z^{(2)}(x,y) = \frac{\sigma_{zz}^{(k)}}{2G_1 d_5} h(x,y), \tag{2}$$

де: G_1 – модуль зсуву; μ_1 – коефіцієнт Пуассона матеріалу включення. Тут і далі для стислості введені позначення: $d_1 = 1-\mu$, $d_3 = 1-2\mu$, $d_4 = 1-\mu_1$, $d_5 = 1+\mu_1$, $d_6 = 1-2\mu_1$.

Для наближеного визначення зміщень $u_z^{(1)}(x,y)$, $(x,y)\in S$ задачу (1) моделюємо задачею математичної теорії тріщин. Відтак, граничні умови зносимо на серединну площину xOy і приходимо до крайової задачі для півпростору $z \ge 0$:

$$\sigma_{zz}(x,y)=\sigma_{zz}^{(k)}(x,y),\ (x,y)\in S,\ z=0;$$
$$u_z^{(1)}(x,y)=0,\ (x,y)\in \bar{S},\ z=0; \qquad (3)$$
$$\sigma_{xz}(x,y)=\sigma_{yz}(x,y)=0,\quad z=0,$$

де $\bar{S}$ – частина площини $z=0$ поза областю S.

Після того як з рівняння (1) з урахуванням (2) і (3) будуть виражені напруження $\sigma_{zz}^{(k)}(x,y)$, підставляємо їх у крайову задачу (3) і знаходимо зміщення $u_z^{(1)}(x,y)$, $(x,y)\in S$ чи нормальні напруження $\sigma_{zz}(x,y)$, $(x,y)\in \bar{S}$ поза областю S. Далі визначаємо концентрацію залишкових напружень у матриці $\sigma_{zz}^{(з)}$ за формулою

$$\sigma_{zz}^{(з)}(x,y)\Big|_{(x,y)\in L}=2K_I/\sqrt{\pi\rho(x,y)}, \qquad (4)$$

де: $\rho(x,y)$ – радіус кривини у вершині включення; K_I – коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) у точках контуру L, що виражається через $u_z^{(1)}(x,y)$.

Залишкові напруження біля еліпсоїдального включення. Розглянемо випадок необмеженого тіла із включенням у вигляді еліпсоїда. Вважаємо, що центр включення збігається з початком координат $Oxyz$, а найменша піввісь c ($c<<a,b$) напрямлена вздовж осі Oz, тобто $h(x,y)=c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}$. Крайова задача (3) зведеться до інтегрального рівняння **[**2**]**

$$\Delta\iint\limits_S\frac{\left[u_z^{(1)}\right]_* d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}=-\frac{4\pi d_1 d_4}{d_5(Gd_6-G_1\mu_1 d_3)}\sigma_{zz}^{(k)},\ (x,y)\in S \qquad (5)$$

відносно стрибків зміщень $\left[u_z^{(1)}\right]_*$, де S – еліптична область, $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$. Під стрибком функції розуміють різницю її значень при $z=+h(x,y)$ та $z=-h(x,y)$.

У цій задачі $\sigma_{zz}^{(k)}=const$ (теорема Ешелбі), тому розв'язок рівняння (5) буде таким:

$$\left[u_z^{(1)}\right]_*=H_1\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}};\ H_1=\frac{2bd_1d_4\sigma_{zz}^{(k)}}{d_5E(k)(Gd_6-G_1\mu_1d_3)}, \qquad (6)$$

де: $E(k)$ – еліптичний інтеграл 2-го роду; $k=\sqrt{1-b^2/a^2}$. Підставивши (2) і (6) у рівняння (1), знайдемо

$$\sigma_{zz}^{(k)}=\frac{2d_5G_1E(k)(Gd_6-G_1\mu_1d_3)(e-e_1)}{E(k)(Gd_6-G_1\mu_1d_3)+2bd_1d_4G_1/c}. \qquad (7)$$

КІН для податливих включень знаходять за формулою

$$K_I=-\lim_{n\to -0}\sqrt{-2\pi n}\cdot\frac{G}{2d_1}\cdot\left[u_z^{(1)}\right]_*',\ n \text{ – нормаль до контуру } L.$$

На основі формул (6), (7) і виразу для КІН отримали

$$K_I=\frac{2d_4bG_1G(e_1-e)\sqrt{\pi f(\varphi)}}{\sqrt{ab}\left[E(k)(Gd_6-G_1\mu_1d_3)+2bd_1d_4G_1/c\right]}, \qquad (8)$$

де: $f(\phi)=\sqrt{a^2\sin^2\phi+b^2\cos^2\phi}$, φ – кут, що визначає параметричні координати точки на еліпсі $x^2/a^2+y^2/b^2=1$.

Тепер можна знайти концентрацію залишкових напружень $\sigma_{zz}^{(з)}$ у тілі біля еліпсоїдального включення

$$\sigma_{zz}^{(з)}=\frac{4bd_4G_1G(e_1-e)}{c\left[E(k)(Gd_6-G_1\mu_1d_3)+2bd_1d_4G_1/c\right]};\ \rho=\frac{c^2f(\varphi)}{ab}. \qquad (9)$$

Залишкові напруження біля сфероїдального включення. Для інженерних розрахунків зручно моделювати дефект структури сфероїдальним включенням. Відтак, підставивши у вираз (9) $b=a$, отримає розв'язок задачі для сфероїдального включення

$$\sigma_{zz}^{(з)}=\frac{8ad_4G_1G(e_1-e)/c}{\pi(Gd_6-G_1\mu_1d_3)+4ad_1d_4G_1/c}. \qquad (10)$$

Щоб дати оцінку впливові попереднього пластичного деформування на майбутню працездатність композита, взято: тіло – сталь 30ХГСНА, гартування і відпуск за 600^0C, $E=210\,ГПа$, $\mu=0{,}3$, $\sigma_T=932\,МПа$, $\sigma_b=1010\,МПа$; у тілі – тонке ($a/c=10$) нікелеве ($E=201\,ГПа$, $\mu_1=0{,}33$, $\sigma_{0.2}^{(1)}=216\,МПа$, $\sigma_b^{(1)}=400\,МПа$) або мідне ($E=128\,ГПа$, $\mu_1=0{,}34$, $\sigma_{0.2}^{(1)}=150\,МПа$, $\sigma_b^{(1)}=226\,МПа$) сфероїдальне включення. Механічні характеристики взято у праці **[**3**]**. Якщо використати діаграми розтягу матеріалів, отримані у ФМІ НАН України ім. Г.В. Карпенка, і припустити, що неоднорідне тіло зазнало розтягу зовнішніми зусиллями, які перевищили границю текучості сталі $\sigma_T=932\,МПа$ і викликали відносну деформацію 8 %, а потім відбулося розвантаження, то, як видно з діаграми, середні залишкові деформації будуть відповідно наближено рівню $e=0{,}0750$, $e_1^{(1)}=0{,}0780$ і $e_1^{(2)}=0{,}0785$ (рис.).

За формулою (10) визначаємо: концентрація залишкових напружень у матриці біля нікелевого включення становить $\sigma_{zz}^{(з)}\Big|_{x=\pm a\pm 0}\approx 646\,МПа$, а біля мідного – $\sigma_{zz}^{(з)}\Big|_{x=\pm a\pm 0}\approx 691\,МПа$, що відповідно становить приблизно 64 і 68 % від границі міцності гетерогенного тіла.

Контактні напруження $\sigma_{zz}^{(k)}$ у включеннях з нікелю чи міді (7) є стискальними, тобто $\sigma_{zz}^{(k)}\approx -20{,}5\,МПа$ і $\sigma_{zz}^{(k)}\approx -25{,}6\,МПа$, що відповідно становить 5 чи 11 % від границі їх міцності.

Формулу (10) отримано з урахуванням тонкості включення. Однак, при $b=c=a$ можна з неї отримати результат для концентрації залишкових напружень у тілі з пружним сферичним включенням радіусом $R=a$

$$\sigma_{zz}^{(3)} = \frac{8d_4 G_1 G \cdot (e_1 - e)}{\pi (G d_6 - G_1 \mu_1 d_3) + 4 d_1 d_4 G_1}. \qquad (11)$$

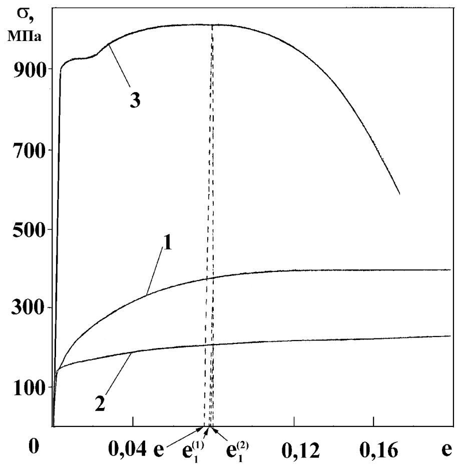

Рис. Діаграма розтягу матеріалів

Література

1. Андрейків О.Є. Залишкові напруження в металах біля включень після пластичного деформування / О.Є. Андрейків, М.М. Стадник, І.Я. Горбачевський // Доповіді АН УРСР. – Сер.: А. – 1981. – № 2. – С. 42-44.

2. Стадник М.М. Термопружний стан та міцність тіл з тонкими включеннями довільної жорсткості. – Львів : Вид-во НЛТУ України; "Дослідно-видавничий центр Наукового товариства ім. Т.Г. Шевченка", 2015. – 316 с.

3. Прокопенко Г.И. Структура и свойства металлов и сплавов : справочник / Г.И. Прокопенко, В.А. Рафаловский. – К. : Изд-во "Наук. думка", 1985-1986.

4. Тихонов Л.В. Механические свойства металлов и сплавов / Л.В. Тихонов, В.А. Кононенко, Г.И. Прокопенко, В.А. Рафаловский, 1986. – 568 с.

Надійшла до редакції 11.10.2016 р.

***Стадник М.М., Горбачевский И.Я.* Концентрация напряжений возле эллипсоидального включения в теле вследствие предварительного пластического деформирования**

Исследованы напряжения, что сохраняются в неоднородном упругом теле с эллипсоидальным и сфероидальным нежесткими инородными включениями после снятия внешних усилий, приводящих к предварительному пластическому деформированию, в местах наибольшей концентрации. Задача решается приближенно с учетом тонкости включения. В качестве тестовой выбрана задача для упругого тела из стали со сфероидальным включением из никеля или меди при условии, что предварительная деформация составила 8 %. Показано, что остаточные напряжения достигают существенных значений, и это может сказаться в будущем на эксплуатации такого композита.

Ключевые слова: включение, концентрация напряжений, остаточные деформации.

***Stadnyk M.M., Horbachevskyy I.Ya.* Stress Concentration Near the Ellipsoidal Inclusion in the Body as a Result of the Preliminary Plastic Deformation**

This paper deals with the investigation of stresses in nonhomogeneous elastic body with ellipsoidal and spheroidal non-rigid inclusions after the removal of external forces, leading to a preliminary plastic deformation. The problem is solved approximately taking into account an inclusion subtlety. As a test it is considered a problem for elastic body of steel with spheroidal inclusion from nickel or copper provided that preliminary deformation was made 8 %. It was shown that the residual stress values are weighty, and can affect the operation of the future composite.

Keywords: inclusion, stress concentration, residual deformations.

УДК 539.3

ПОПЕРЕЧНО-КУТОВІ КОЛИВАННЯ ОДНОВІСНОГО ПРИЧЕПА ІЗ ДОДАТКОВИМ СТАБІЛІЗАЦІЙНИМ ПРУЖНИМ ЕЛЕМЕНТОМ

Б.І. Сокіл[1], А.А. Звонко[2], Р.А. Нанівський[3], А.О. Дзюба[4]

Для одновісного причепа розглянуто задачу про вплив геометричних розмірів, силових характеристик системи підресорювання та модернізованого пружного з'єднання тягача і причепа на поперечно-кутові коливання та стійкість руху причепа вздовж горизонтальної криволінійної ділянки шляху. Прийнято, що причеп рухається вздовж криволінійної ділянки шляху зі сталою за величиною швидкістю; відновлювальна сила пружних амортизаторів і пружного з'єднання тягача та причепа описуються лінійними залежностями деформацій відповідних пружних елементів. На основі отриманого закону поперечно-кутових коливань підресореної частини причепа та рівнянь кінетостатики механічної системи підресорена-непідресорена частини причепа отримано критичне значення швидкості стійкого руху як функцію геометричних, кінематичних та силових параметрів досліджуваної системи. Показано, що використання модернізованого пружного з'єднання причепа та тягача значною мірою підвищує стійкість на перекидування причепа.

Ключові слова: стійкість руху, коливання підресореної частини, амплітуда, частота коливань, критична швидкість руху.

Актуальність тематики дослідження. Одновісні причепи широко використовують для перевезення різних видів вантажів, апаратури, спеціального обладнання. Вибір у таких причепах за базову систему підвіски із ресорними чи пружинними елементами не завжди забезпечує належні умови їх експлуатації [1, 2]. Це насамперед стосується віброчутливих вантажів або апаратури, яка стаціонарно встановлена на причепі. Система підресорювання таких спеціалізованих причепів потребує модернізації чи встановлення на них додаткового віброзахисного обладнання. Зокрема, у [3] для транспортування вибухонебезпечних об'єктів у контейнерах на причепі, запропоновано використовувати додаткову систему підпружинення контейнерів – систему квазінульової жорсткості [4]. Вона ефективно захищає вантажі відносно невеликих мас.

Використовувати її для стаціонарно встановленого обладнання на одновісний причеп за умови, що геометричні розміри обладнання значні, є задачею проблематичною. Крім цього, якщо центр ваги стаціонарно розміщеного обладнання знаходиться на значній віддалі від непідресореної частини причепа, то динаміка останньої значною мірою впливає на його стійкість руху вздовж криволінійних ділянок шляху чи шляху із нерівностями [5, 6]. Саме часткове вирі-

[1] проф. Б.І. Сокіл, д-р техн. наук – Національна академія сухопутних військ ім. гетьмана П. Сагайдачного;
[2] ст. викл. А.А. Звонко, канд. техн. наук – Національна академія сухопутних військ ім. гетьмана П. Сагайдачного;
[3] ст. викл. Р.А. Нанівський, канд. техн. наук – Національна академія сухопутних військ ім. гетьмана П. Сагайдачного;
[4] зас. нач. факультету РВіА А.О. Дзюба – Національна академія сухопутних військ ім. гетьмана П. Сагайдачного