Науковий вісник НЛТУ України
Scientific Bulletin of UNFU

http://nv.nltu.edu.ua

https://doi.org/10.15421/40270527

Article received 22.06.2017 р.
Article accepted 29.06.2017 р.

УДК 536.21

ISSN 1994-7836 (print)
ISSN 2519-2477 (online)

@ ✉ Correspondence author
V. P. Karashetskyy
volodymyr10@gmail.com

М. І. Дмитрусь, В. П. Карашецький

Національний лісотехнічний університет України, м. Львів, Україна

РОЗРАХУНОК ДВОВИМІРНИХ СТАЦІОНАРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ ЗА НАЯВНОСТІ ВНУТРІШНІХ ДЖЕРЕЛ ТЕПЛА МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Сформульовано краєву задачу розрахунку стаціонарного температурного поля за наявності внутрішніх джерел тепла, що описується диференціальними рівняннями. Для побудови скінченно-елементної моделі розрахунку розподілу температури всередині двовимірної області, заповненої нелінійними безгістерезисними анізотропними середовищами, врахування заданих вздовж її границі граничних умов Дирихле та однорідних граничних умов Неймана, використано лагранжеві трикутники n-го порядку. Застосовано кубатурну формулу чисельного інтегрування по площі трикутника на основі інтерполяційного повного поліному для лагражевого трикутника другого порядку. З умови мінімуму функціонала отримано рівносильну нелінійну систему алгебраїчних рівнянь, яка розв'язується, як правило, ітераційним методом Ньютона. Подано алгоритм визначення внеску кожного внутрішнього скінченного елемента (СЕ) у вектор нев'язок і матрицю Якобі системи рівнянь з використанням елементів тензора диференціальної теплопровідності середовища. Наведено також алгоритм визначення внеску кожного граничного СЕ у вектор нев'язок і матрицю Якобі, якщо він має тільки один чи кілька граничних вузлів із граничними умовами Дирихле або має два граничних вузли з однорідними граничними умовами Неймана і один граничний вузол із граничними умовами Дирихле.

Ключові слова: стаціонарне температурне поле; внутрішні джерела тепла; теплопровідність; лагранжевий трикутник; метод скінченних елементів; кубатурні формули; метод Ньютона; тензор диференціальної теплопровідності; граничні умови.

Вступ. З інтенсивним розвитком комп'ютерних технологій особливого значення набуває в наш час математичне моделювання різних фізичних процесів. Для розв'язання задачі стаціонарної теплопровідності у двовимірній області використовують різні чисельні методи, серед яких найбільший розвиток отримав метод скінченних елементів (МСЕ).

Не зважаючи на велику кількість публікацій з МСЕ, у них відсутній опис алгоритму формування системи алгебраїчних рівнянь з умови мінімуму функціонала для розрахунку розподілу температури всередині двовимірної області, заповненої нелінійними безгістерезисними анізотропними середовищами при наявності внутрішніх джерел тепла, та урахування заданих вздовж її границі граничних умов Дирихле і однорідних граничних умов Неймана.

Актуальним завданням залишається також використання в якості скінченних елементів лагранжевих трикутників 2-го порядку з метою підвищення точності розрахунків.

Мета роботи полягає в розробленні методики розрахунку двовимірних стаціонарних температурних полів за наявності внутрішніх джерел тепла методом скінченних елементів, яка б дала змогу враховувати розподіл температури всередині двовимірної області, заповненої нелінійними безгістерезисними анізотропними середовищами.

Виклад основного матеріалу. Для краєвої задачі розрахунку стаціонарного температурного поля за наявності внутрішніх джерел тепла, що описується диференціальними рівняннями (Yushko, Borshch, & Yushko, 2011):

$$div\bar{B}(\bar{H}) = J\,, \tag{1}$$

$$\bar{H} = -gradU\,, \tag{2}$$

у плоскій області D функціонал F набуває вигляду

$$F = \int_S (W - C)dS\,, \tag{3}$$

де:
$$W = \int_0^{\bar{H}} \bar{B}d\bar{H}\,; \tag{4}$$

$$C = UJ\,; \tag{5}$$

де: $\bar{H}$, $\bar{B}$ – розміщені у площині D вектори напруженості температурного поля та густини теплового потоку; U – температура в будь-якій точці області D; J – нормальна до площини D проекція вектора густини теплового потоку внутрішніх джерел тепла; S – площа області D.

Інформація про авторів:

Дмитрусь Мирослав Іванович, аспірант кафедри інформаційних технологій. **Email:** myroslavdm@gmail.com
Карашецький Володимир Петрович, канд. техн. наук, доцент. **Email:** volodymyr10@gmail.com

Цитування за ДСТУ: Дмитрусь М. І., Карашецький В. П. Розрахунок двовимірних стаціонарних температурних полів за наявності внутрішніх джерел тепла методом скінченних елементів. Науковий вісник НЛТУ України. 2017. Вип. 27(5). С. 134–138.
Citation APA: Dmytrus, M. I., & Karashetskyy, V. P. (2017). Calculation of two-dimensional stationary thermal fields with internal heat sources of the finite element method. Scientific Bulletin of UNFU, 27(5), 134–138. https://doi.org/10.15421/40270527

Розподіл температури U всередині області D, що мінімізує функціонал F, забезпечує розв'язання краєвої задачі. Умова мінімуму функціонала (3) набуває такого вигляду

$$\frac{dF}{dU} = 0 . \tag{6}$$

Для побудови скінченно-елементної моделі заповнимо область розрахунку D сукупністю лагранжевих трикутників n-го порядку (Karashetskyi, 2007).

Нехай внаслідок тріангуляції двовимірної області розрахунку D отримуємо M лагранжевих скінченних елементів (СЕ). Кожному з них присвоїмо порядковий номер m ($m = \overline{1, M}$) і локальну нумерацію вузлів, згідно з якою i-му вузлу m-го СЕ відповідає номер mi. Для всієї області розрахунку встановимо сіткову (наскрізну) нумерацію R внутрішніх вузлів і G граничних вузлів. Поточні значення порядкових номерів внутрішніх вузлів позначимо r.

Для скінченно-елементної області функціонал F з урахуванням (3)–(5) набуде вигляду

$$F = \sum_{m=1}^{M} F_m = \sum_{m=1}^{M} (W_m - C_m) , \tag{7}$$

де:

$$W_m = \int_{S_m} W dS ; \tag{8}$$

$$C_m = \int_{S_m} C dS ; \tag{9}$$

де: S_m – площа m-го СЕ, що визначається через координати його вершин у прямокутній системі координат за формулою

$$S_m = \frac{1}{2} \det \begin{Vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{Vmatrix} . \tag{10}$$

Утворимо R-мірний вектор-рядок і вектор-стовпець температури U у внутрішніх вузлах:

$$\vec{U} = (U_1, ..., U_R) ; \; \vec{U}_* = (U_1, ..., U_R)_* . \tag{11}$$

Умова мінімуму функціонала F з урахуванням (6) рівносильна нелінійній системі алгебраїчних рівнянь

$$\vec{\phi}_*[\vec{U}_*] = \frac{dF}{d\vec{U}_*} = 0 . \tag{12}$$

Застосуємо для (8), (9) кубатурну формулу чисельного інтегрування за площею лагранжевого трикутника (Karashetskyi, 2007). Наприклад, у разі використання лагранжевих трикутників другого порядку (n =2), кількість вузлів у яких p=6, отримаємо

$$F_m = \frac{1}{3} S_m \sum_{i=4}^{6} (W_{mi} - C_{mi}) , \tag{13}$$

де:

$$W_{mi} = \int_{0}^{\bar{H}_{mi}} \bar{B} d\bar{H} ; \tag{14}$$

$$C_{mi} = U_{mi} J_{mi} . \tag{15}$$

Представимо залежність температури U в межах m-го СЕ повним поліномом другого степеня

$$U = \vec{U}_m k_m^{-1} \vec{k}_* = \vec{k} k_{m*}^{-1} \vec{U}_{m*} , \tag{16}$$

де:

$$\vec{U}_m = (U_{m1}, ..., U_{m6}) \tag{17}$$

- вектор-рядок значень температури U у вузлах m-го СЕ;

$$\vec{k} = (1, x, y, xy, x^2, y^2) \tag{18}$$

- координатний вектор-рядок поточної точки з координатами x, y;

$$k_{m*} = \begin{Vmatrix} 1 & x_{m1} & y_{m1} & x_{m1} y_{m1} & x_{m1}^2 & y_{m1}^2 \\ 1 & x_{m2} & y_{m2} & x_{m2} y_{m2} & x_{m2}^2 & y_{m2}^2 \\ 1 & x_{m3} & y_{m3} & x_{m3} y_{m3} & x_{m3}^2 & y_{m3}^2 \\ 1 & x_{m4} & y_{m4} & x_{m4} y_{m4} & x_{m4}^2 & x_{m4}^2 \\ 1 & x_{m5} & y_{m5} & x_{m5} y_{m5} & x_{m5}^2 & y_{m5}^2 \\ 1 & x_{m6} & y_{m6} & x_{m6} y_{m6} & x_{m6}^2 & y_{m6}^2 \end{Vmatrix} \tag{19}$$

- координатна матриця, рядки якої є координатними векторами вигляду (18) у вузлах m-го СЕ; $\vec{U}_{m*}$, $\vec{k}_*$, k_m – відповідно вектори-стовпці і матриця, транспоновані відносно $\vec{U}_m$, $\vec{k}$, k_{m*}.

У локальній прямокутній системі координат вектор $\bar{H}$ напруженості температурного поля пов'язаний із температурою U співвідношенням

$$\bar{H} = -gradU = -\frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} . \tag{20}$$

Проекції H_x, H_y вектора $\bar{H}$ у mi-му вузлі з урахуванням (16) і (20) набувають вигляду:

$$H_{xmi} = -\frac{\partial U}{\partial x} \Big| x_{mi}, y_{mi} = -\vec{U}_m \vec{K}_{mi*}^{(x)} = -\vec{K}_{mi}^{(x)} \vec{U}_{m*} ; \tag{21}$$

$$H_{ymi} = -\frac{\partial U}{\partial y} \Big| x_{mi}, y_{mi} = -\vec{U}_m \vec{K}_{mi*}^{(y)} = -\vec{K}_{mi}^{(y)} \vec{U}_{m*} ; \tag{22}$$

де:

$$\vec{K}_{mi}^{(x)} = \vec{k}_{mi}^{(x)} k_{m*}^{-1} ; \; \vec{K}_{mi}^{(y)} = \vec{k}_{mi}^{(y)} k_{m*}^{-1} ; \tag{23}$$

$$\vec{K}_{mi*}^{(x)} = k_m^{-1} \vec{k}_{mi*}^{(x)} ; \; \vec{K}_{mi*}^{(y)} = k_m^{-1} \vec{k}_{mi*}^{(y)} ; \tag{24}$$

$$\vec{k}_{mi}^{(x)} = \frac{\partial \vec{k}}{\partial x} \Big| x_{mi}, y_{mi} = (0, 1, 0, y_{mi}, 2x_{mi}, 0) ; \tag{25}$$

$$\vec{k}_{mi}^{(y)} = \frac{\partial \vec{k}}{\partial y} \Big| x_{mi}, y_{mi} = (0, 0, 1, x_{mi}, 0, 2y_{mi}) ; \tag{26}$$

$\vec{k}_{mi*}^{(x)}$, $\vec{k}_{mi*}^{(y)}$ – стовпці, отримані транспонуванням рядків (25), (26).

Диференціюючи вираз (13) по вектору $\vec{U}_m$ і враховуючи (21), (22), отримуємо

$$\begin{aligned} \vec{\phi}_{m*} = \frac{dF_m}{d\vec{U}_m} &= \frac{1}{3} S_m \sum_{i=4}^{6} \frac{d}{d\vec{U}_m} \int_{0}^{\bar{H}_{mi}} \left((d\bar{H})\bar{B} - U_{mi} J_{mi} \right) = \\ &= \frac{1}{3} S_m \sum_{i=4}^{6} \left(\frac{d\bar{H}_{mi}}{d\vec{U}_m} \bar{B}_{mi} - J_{mi} \frac{dU_{mi}}{d\vec{U}_m} \right) = \\ &= \frac{1}{3} S_m \sum_{i=4}^{6} \left(\frac{dH_{xmi}}{d\vec{U}_m} B_{xmi} + \frac{dH_{ymi}}{d\vec{U}_m} B_{ymi} - J_{mi} \frac{dU_{mi}}{d\vec{U}_m} \right) = \\ &= -\frac{1}{3} S_m \sum_{i=4}^{6} (\vec{K}_{mi*}^{(x)} B_{xmi} + \vec{K}_{mi*}^{(y)} B_{ymi}) - \frac{1}{3} S_m \vec{J}_{m*} , \end{aligned} \tag{27}$$

де:

$$\vec{J}_{m*} = (J_{m1}, ..., J_{m3})_* \tag{28}$$

– вектор-стовпець заданих значень J у вузлах m-го СЕ; $\bar{B}_{mi}$, B_{xmi}, B_{ymi} – відповідно вектор густини теплового потоку і його складові в mi-ому вузлі, які визначаються за значеннями проекцій (21), (22) вектора напруженості і характеристикою теплопровідності нелінійного безгістерезисного середовища, що виражається векторним рівнянням або двома скалярними рівняннями:

$$\bar{B} = \bar{B}[\bar{H}] ; \tag{29}$$

$$B_x = B_x[H_x, H_y] ; \; B_y = B_y[H_x, H_y] . \tag{30}$$

Нелінійну систему рівнянь (12) розв'язують, як правило, ітераційним методом Ньютона.

Для визначення внеску m-го СЕ у систему рівнянь (12) потрібно:

- знайти вектор $\vec{\phi}_{m*}$ на кожній ітерації за формулою (27);
- за таблицею відповідності локальної і сіткової нумерації встановити номери r вузлів, які збігаються з вузлами $m1,...,mp$;
- кожний елемент вектора $\vec{\phi}_{m*}$, який відповідає r-му внутрішньому вузлу, внести відповідно в r-те рівняння системи (12).

Повну систему рівнянь (12) отримаємо, виконавши цю процедуру для всіх M елементів. У цьому разі викладена вище процедура використовується на етапі формування вектора нев'язок. Дещо трудомісткішою операцією є складання для векторної функції $\vec{\phi}_* = (\phi_1,...,\phi_R)_*$ матриці Якобі φ розмірності R x R. Виведемо загальні вирази, що використовуються для цієї мети.

Диференціюючи вираз (27) за вектором $\vec{U}_{m*}$, отримуємо матрицю розмірності 6×6

$$\varphi_m = \frac{d\vec{\phi}_{m*}}{d\vec{U}_{m*}} = -\frac{1}{3}S_m\sum_{i=4}^{6}(\vec{K}_{mi*}^{(x)}\frac{dB_{xmi}}{d\vec{U}_{m*}} + \vec{K}_{mi*}^{(y)}\frac{dB_{ymi}}{d\vec{U}_{m*}}). \quad (31)$$

З урахуванням (21), (22), (30) і (31) маємо

$$\varphi_m = -\frac{1}{3}S_m\sum_{i=4}^{6}(\vec{K}_{mi*}^{(x)}(\lambda_{xxmi}\vec{K}_{mi}^{(x)} + \lambda_{xymi}\vec{K}_{mi}^{(y)}) + \\ +\vec{K}_{mi*}^{(y)}(\lambda_{yxmi}\vec{K}_{mi}^{(x)} + \lambda_{yymi}\vec{K}_{mi}^{(y)})) \quad (32)$$

де: $\vec{K}_{mi}^{(x)} = \frac{dH_{xmi}}{d\vec{U}_{m*}}, \vec{K}_{mi}^{(y)} = \frac{dH_{ymi}}{d\vec{U}_{m*}}$; $\lambda_{jkmi}(j,k=x,y)$ – елементи тензора диференціальної теплопровідності середовища

$$\lambda = \frac{d\bar{B}}{d\bar{H}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial H_x} & \frac{\partial B_x}{\partial H_y} \\ \frac{\partial B_y}{\partial H_x} & \frac{\partial B_y}{\partial H_y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} \end{Bmatrix}, \quad (33)$$

обчислювані в i-ому вузлу m-го СЕ.

Для безгістерезисного середовища на основі теореми взаємності (Silvester, Cabayan, & Browne, 1973) $\lambda_{xy} = \lambda_{yx}$, тому $\lambda_{xymi} = \lambda_{yxmi}$.

У разі ізотропного нелінійного середовища тензор диференціальної теплопровідності визначається за формулою (Dyshovyj, 1983).

$$\lambda = \begin{Bmatrix} \lambda_\rho\cos^2\eta_x + \lambda_\tau\sin^2\eta_x & (\lambda_\rho - \lambda_\tau)\cos\eta_x\cos\eta_y \\ (\lambda_\rho - \lambda_\tau)\cos\eta_y\cos\eta_x & \lambda_\rho\cos^2\eta_y + \lambda_\tau\sin^2\eta_y \end{Bmatrix}, \quad (34)$$

де: $\lambda_\rho = \frac{dB}{dH}$, $\lambda_\tau = \frac{B}{H}$ – відповідно радіальна диференціальна і тангенціальна теплопровідність середовища; $\eta_l(l=x,y)$ – кути між вектором $\bar{H}$ або $\bar{B}[\bar{H}]$ і відповідно ортами $\bar{l},\bar{j}$ локальної декартової системи координат.

Для лінійного ізотропного середовища маємо таку рівність $\lambda_\rho = \lambda_\tau = B/H = \lambda_c$, тому тензор диференціальної теплопровідності набуває такого вигляду

$$\lambda = \begin{Bmatrix} \lambda_c & 0 \\ 0 & \lambda_c \end{Bmatrix}. \quad (35)$$

Для того, щоб визначити вклад m-го СЕ в матрицю Якобі φ, потрібно обчислити матрицю φ_m на кожній ітерації за формулою (32) і підсумувати всі її елементи з відповідними елементами матриці φ, враховуючи, що елемент φ_{mij} належить ns-й клітині матриці φ, де n, s – сіткові номери вузлів з локальними номерами mi і mj. Повну матрицю Якобі φ отримаємо, виконавши цю процедуру для кожного з M скінченних елементів області розрахунку D.

У разі використання лагранжевих трикутників 1-го, 3-го і 4-го порядків, потрібно застосувати відповідні кубатурні формули чисельного інтегрування (Karashetskyi, 2007) і провести вивід основних залежностей за викладеною вище методикою.

Уздовж границі області D повинні бути задані граничні умови Дирихле (значення потенціалу U) або однорідні граничні умови Неймана

$$H_n = -\frac{\partial U}{\partial n} = 0, \quad (36)$$

де: H_n – нормальна складова вектора $\bar{H}$ на одиничний вектор $\bar{n}$ зовнішньої нормалі до границі області D.

Для визначення внеску кожного m-го СЕ у вектор нев'язок $\vec{\phi}_*$ і матрицю Якобі φ, якщо він має один чи кілька граничних вузлів із граничними умовами Дирихле, потрібно на кожній ітерації для кожного вузла mD із граничними умовами Дирихле враховувати, що значення U_{mD} задане і постійне, тому:

$$\phi_{mD} = \frac{\partial F_m}{\partial U_{mD}} = 0; \quad (37)$$

$$\varphi_{mDp} = \frac{\partial \phi_{mD}}{\partial U_{mp}} = 0,\ p = \overline{1,6}; \quad (38)$$

$$\varphi_{mpD} = \frac{\partial \phi_{mp}}{\partial U_{mD}} = 0,\ p = \overline{1,6}. \quad (39)$$

Розглянемо визначення внеску кожного m-го СЕ у вектор нев'язок $\vec{\phi}_*$ і матрицю Якобі φ, який межує своєю стороною із границею області D і має тільки два граничних вузли з граничними умовами Неймана, оскільки для СЕ n-го порядку кількість P_N таких вузлів визначається за формулою

$$P_N = n. \quad (40)$$

Умова Неймана (36) на границі області D набуває вигляду

$$H_n = \bar{H}\bar{n} = H_x n_x + H_y n_y = 0, \quad (41)$$

де n_x, n_y – проекції одиничного вектора $\bar{n}$ дотичної до границі області D.

З урахуванням (21), (22) запишемо (41) для кожного із двох вузлів із граничними умовами Неймана m-го СЕ такий вираз

$$(n_x K_{mN*}^{(x)} + n_y K_{mN*}^{(y)})\vec{U}_{m*} = 0, \quad (42)$$

де
$$K_{mN*}^{(x)} = \begin{Vmatrix} \vec{K}_{mN_1}^{(x)} \\ \vec{K}_{mN_2}^{(x)} \end{Vmatrix};\ K_{mN*}^{(y)} = \begin{Vmatrix} \vec{K}_{mN_1}^{(y)} \\ \vec{K}_{mN_2}^{(y)} \end{Vmatrix} \quad (43)$$

прямокутні матриці розмірності 2×6, рядками яких є вектори-рядки, визначені за виразами (23) для вузлів з граничними умовами Неймана m-го СЕ; N_1, N_2 – відповідно початкове і кінцеве значення локальних номерів вузлів з граничними умовами Неймана m-го СЕ.

Представимо (42) у вигляді

$$k_{mn}\vec{U}_{m*} = 0, \quad (44)$$

де
$$k_{mn} = n_x K_{mN*}^{(x)} + n_y K_{mN*}^{(y)} \quad (45)$$

прямокутна матриця розмірності 2×6.

Утворимо вектор-стовпець значень потенціалу у вузлах m -го СЕ з умовами Неймана

$$\vec{U}_{mN*} = (U_{mN_1}, U_{mN_2})_* \quad (46)$$

і вектор-стовпець значень потенціалу у всіх інших вузлах, що не ввійшли до складу $\vec{U}_{mN*}$, (внутрішніх вузлах і вузлах з умовами Дирихле)

$$\vec{U}_{mL*} = (U_{mL_1}, ..., U_{mL_4})_*, \quad (47)$$

де L_1, L_4 – відповідно початкове і кінцеве значення локальних номерів внутрішніх вузлів і вузлів з умовами Дирихле m -го СЕ.

У виразах (46), (47) потенціали вузлів розташовуємо в порядку зростання їх локальних номерів. З урахуванням (46) і (47) вираз (44) можна представити як

$$k_{mL}\vec{U}_{mL*} + k_{mN}\vec{U}_{mN*} = 0, \quad (48)$$

де: k_{mL} – прямокутна матриця розмірності 2×4, утворена із тих стовпців матриці k_{mn}, номери яких збігаються з локальними номерами елементів вектора $\vec{U}_{mL*}$; k_{mN} – квадратна матриця розмірності 2×2, утворена із тих стовпців матриці k_{mn}, номери яких збігаються з локальними номерами елементів вектора $\vec{U}_{mN*}$.

З рівняння (48) визначаємо

$$\vec{U}_{mN*} = -k_{mN}^{-1}k_{mL}\vec{U}_{mL*} = -G_m\vec{U}_{mL*}, \quad (49)$$

де

$$G_m = k_{mN}^{-1}k_{mL} \quad (50)$$

прямокутна матриця розмірності 2×4, що зв'язує значення потенціалу у вузлах з граничними умовами Неймана з його значеннями в інших вузлах m -го СЕ.

Виконавши транспонування у виразі (49), отримаємо такий вираз

$$\vec{U}_{mN} = -\vec{U}_{mL}G_{m*}. \quad (51)$$

Вектор-стовпець $\vec{U}_{m}$ значень потенціалу у вузлах m -го СЕ визначається через вектори-стовпці $\vec{U}_{mL*}$, $\vec{U}_{mN*}$ у вигляді

$$\vec{U}_{m*} = G_{mN}\vec{U}_{mN*} + G_{mL}\vec{U}_{mL*} \quad (52)$$

або у разі транспонованих векторів

$$\vec{U}_m = \vec{U}_{mN}G_{mN*} + \vec{U}_{mL}G_{mL*}, \quad (53)$$

де: G_{mN}, G_{mL} – прямокутні матриці розмірності відповідно 6×2 і 6×4, елементами яких є постійні числа 0 або 1; G_{mN*}, G_{mL*} – матриці, транспоновані відносно матриць G_{mN}, G_{mL}.

Представляючи функціонал m -го СЕ у вигляді складної функції $F_m = F_m[\vec{U}_m]$ або $F_m = F_m[\vec{U}_{mN}, \vec{U}_{mL}]$ і враховуючи (51), (53), отримаємо

$$\vec{\phi}_{mL*} = \frac{dF_m}{d\vec{U}_{mL}} = \frac{\partial\vec{U}_m}{\partial\vec{U}_{mL}}\frac{dF_m}{d\vec{U}_m} + \frac{d\vec{U}_{mN}}{d\vec{U}_{mL}}\frac{\partial\vec{U}_m}{\partial\vec{U}_{mN}}\frac{dF_m}{d\vec{U}_m} = G_{mL*}\frac{dF_m}{d\vec{U}_m} - $$
$$-G_{m*}G_{mN*}\frac{dF_m}{d\vec{U}_m} = (G_{mL*} - G_{m*}G_{mN*})\frac{dF_m}{d\vec{U}_m} = Q_m\frac{dF_m}{d\vec{U}_m} = Q_m\vec{\phi}_{m*}, \quad (54)$$

де

$$Q_m = G_{mL*} - G_{m*}G_{mN*} \quad (55)$$

прямокутна матриця розмірності 4×6, що забезпечує виконання умов Неймана при переході від вектора-стовпця $\vec{\phi}_{m*}$ до вектора-стовпця $\vec{\phi}_{mL*}$ розмірності 4.

Аналогічно, представляючи вектор-стовпець $\vec{\phi}_{m*}$ у вигляді $\vec{\phi}_{m*} = \vec{\phi}_{m*}[\vec{U}_{m*}]$ або $\vec{\phi}_{m*} = \vec{\phi}_{m*}[\vec{U}_{mN*}, \vec{U}_{mL*}]$ і враховуючи (49), (52), (54), отримаємо квадратну матрицю розмірності 4×4 вигляду

$$\varphi_{mL} = \frac{d\vec{\phi}_{mL*}}{d\vec{U}_{mL*}} = \frac{d(Q_m\vec{\phi}_{m*})}{d\vec{U}_{mL*}} = Q_m\frac{d\vec{\phi}_{m*}}{d\vec{U}_{mL*}} = Q_m\frac{d\vec{\phi}_{m*}}{d\vec{U}_{m*}}\frac{\partial\vec{U}_{m*}}{\partial\vec{U}_{mL*}} + $$
$$+Q_m\frac{d\vec{\phi}_{m*}}{d\vec{U}_{m*}}\frac{\partial\vec{U}_{m*}}{\partial\vec{U}_{mN*}}\frac{d\vec{U}_{mN*}}{d\vec{U}_{mL*}} = Q_m\frac{d\vec{\phi}_{m*}}{d\vec{U}_{m*}}G_{mL} - Q_m\frac{d\vec{\phi}_{m*}}{d\vec{U}_{m*}}G_{mN}G_m = \quad (56)$$
$$= Q_m\frac{d\vec{\phi}_{m*}}{d\vec{U}_{m*}}(G_{mL} - G_{mN}G_m) = Q_m\varphi_m Q_{m*},$$

де $Q_{m*} = G_{mL} - G_{mN}G_m$ (57) – матриця, транспонована відносно матриці Q_m.

Матриці Q_m, Q_{m*} у виразі (56) забезпечують виконання граничних умов Неймана при переході від матриці φ_m до матриці φ_{mL} за наявності в m -му СЕ вузлів із граничними умовами Неймана.

Оскільки матриця φ_m симетрична, то, згідно з (56), матриця φ_{mL} також симетрична.

Внесок кожного m -го СЕ, який має вузли із граничними умовами Неймана, у вектор нев'язок $\vec{\phi}_*$ і матрицю Якобі φ на кожній ітерації визначається відповідно з $\vec{\phi}_{mL*}$ і φ_{mL} за правилами, встановленими раніше для внутрішніх СЕ.

Висновки

1. Сформульовано краєву задачу розрахунку стаціонарного температурного поля при наявності внутрішніх джерел тепла.
2. Побудовано скінченно-елементну модель розрахунку розподілу температури всередині двовимірної області, заповненої нелінійними безгістерезисними анізотропними середовищами з урахуванням заданих вздовж її границі граничних умов Дирихле та однорідних граничних умов Неймана.
3. Застосовано кубатурну формулу чисельного інтегрування по площі трикутника на основі інтерполяційного повного поліному для лагражевого трикутника другого порядку.
4. Отримано з умови мінімуму функціонала рівносильну нелінійну систему алгебраїчних рівнянь, яка розв'язується, як правило, ітераційним методом Ньютона.
5. Подано алгоритм визначення внеску кожного внутрішнього СЕ у вектор нев'язок і матрицю Якобі системи рівнянь з використанням елементів тензора диференціальної теплопровідності середовища.
6. Наведено алгоритм визначення внеску кожного граничного СЕ у вектор нев'язок і матрицю Якобі, якщо він має тільки один чи декілька граничних вузлів з граничними умовами Дирихле або має два граничних вузла з однорідними граничними умовами Неймана і один граничний вузол з граничними умовами Дирихле.

Перелік використаних джерел

Dyshovyj, R. V. (1983). Raschet staticheskogo magnitnogo polja v nejavnopoljusnyh jelektricheskih mashinah differencialnym setochnym metodom. *Abstract of candidate dissertation for technical sciences*. Lvov, 18 p. [in Russian].

Karashetskyi, V. P. (2007). Kubaturni formuly chyselnoho intehruvannia za ploshcheiu trykutnyka na osnovi interpoliatsiinykh povnykh polinomiv. [Cubature formulas for numerical integration through triangle area with full interpolation polynomials]. *Scientific Bulletin of UNFU, 17*(7), 275–280. [in Ukrainian].

Silvester, P., Cabayan, H. S., & Browne, B. T. (1973). Efficient techniques for finite element analysis of electric machines. *JEEE Trans. PAS, 92*(4), 1274–1281.

Yushko, S. V., Borshch, O. Ye., & Yushko, M. A. (2011). Statsionarna teploprovidnist: navch. posibn. Kharkiv: НТУ "ХПІ", 80 p. [in Ukrainian].

М. И. Дмитрусь, В. П. Карашецкий

Национальный лесотехнический университет Украины, г. Львов, Украина

РАСЧЕТ ДВУМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Сформулирована краевая задача расчета стационарного температурного поля при наличии внутренних источников тепла, которая описывается дифференциальными уравнениями. Для построения конечно-элементной модели расчета распределения температуры внутри двумерной области, заполненной нелинейными безгистерезисными анизотропными средами, учета заданных вдоль ее границы граничных условий Дирихле и однородных граничных условий Неймана, использованы лагранжевые треугольники n-го порядка. Применена кубатурная формула численного интегрирования по площади треугольника на основе интерполяционного полного полинома для лагранжевого треугольника второго порядка. Из условия минимума функционала получена равносильная нелинейная система уравнений, решаемая, как правило, итерационным методом Ньютона. Представлен алгоритм определения вклада каждого внутреннего конечного элемента (КЭ) в вектор невязок и матрицу Якоби системы уравнений с использованием элементов тензора дифференциальной теплопроводности среды. Приведен также алгоритм определения вклада каждого предельного КЭ в вектор невязок и матрицу Якоби, если он имеет только один или несколько граничных узлов с граничными условиями Дирихле или имеет два граничных узла с однородными граничными условиями Неймана и один граничный узел с граничными условиями Дирихле.

Ключевые слова: стационарное температурное поле; внутренние источники тепла; теплопроводность; лагранжевый треугольник; метод конечных элементов; кубатурные формулы; метод Ньютона; тензор дифференциальной теплопроводности; граничные условия.

M. I. Dmytrus, V. P. Karashetskyy

Ukrainian National Forestry University, Lviv, Ukraine

CALCULATION OF TWO-DIMENSIONAL STATIONARY THERMAL FIELDS WITH INTERNAL HEAT SOURCES OF THE FINITE ELEMENT METHOD

The boundary value problem of calculating the stationary temperature field with internal heat sources, which is described by differential equations, is formulated. To construct a finite-element model for calculating the temperature distribution within a two-dimensional region filled with nonlinear anisotropic environments without hysteresis, considering of the Dirichlet boundary conditions and the homogeneous Neumann boundary conditions given along its boundary, were used n-order Lagrangian triangles. The cubature formula of numerical integration over the area of a triangle is used based on the interpolation complete polynomial for the Lagrangian triangle of the second order. From the condition of the minimum of the functional, an equivalent non-linear system of equations is obtained, which is solved, usually, by the iteration method of Newton. An algorithm is presented for determining the contribution of each inner finite element (FE) to the vector of discrepancies and the Jacobi matrix of the system of equations using the elements of the differential thermal conductivity tensor of the environment. An algorithm is also given for determining the contribution of each boundary FE to vector of discrepancies and the Jacobi matrix if it has only one or more boundary nodes with the Dirichlet boundary conditions or has two boundary nodes with the homogeneous Neumann boundary conditions and one boundary node with Dirichlet boundary conditions.

Keywords: stationary temperature field, internal heat sources, thermal conductivity, Lagrangian triangle, finite element method, cubature formulas, Newton's method, differential thermal conductivity tensor, boundary conditions.