



**В. І. Гавриш<sup>1</sup>, В. Б. Лоїк<sup>2</sup>, О. Д. Синельников<sup>2</sup>, Т. В. Бойко<sup>2</sup>, Р. Р. Шкраб<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна

<sup>2</sup> Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, м. Львів, Україна

## МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ АНАЛІЗУ ТЕМПЕРАТУРНИХ РЕЖИМІВ У 3D СТРУКТУРАХ ІЗ ТОНКИМИ ЧУЖОРІДНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Нерівномірне нагрівання – один із факторів, що спричиняють деформації та напруження у пружних конструкціях. Якщо з підвищенням температури ніщо не перешкоджає розширенню структури, то вона деформується і жодних напружень не виникатиме. Однак, якщо в конструкції температура зростає нерівномірно і воно неоднорідне, то внаслідок розширення формуються температурні напруження. Першим і незалежним кроком для дослідження температурних напружень є визначення температурного поля, що становить основну задачу аналітичної теорії теплопровідності. В окремих випадках визначення температурних полів є самостійною технічною задачею, розв'язання якої допомагає визначити температурні напруження. Тому розроблено лінійні математичні моделі визначення температурних режимів у 3D (просторових) середовищах із локально зосередженими тонкими теплоактивними чужорідними включеннями. Класичні методи не дають змоги розв'язувати крайові задачі математичної фізики, що відповідають таким моделям, у замкнутому вигляді. З огляду на це описано спосіб, який полягає в тому, що теплофізичні параметри для неоднорідних середовищ описують за допомогою асиметричних одиничних функцій як єдине ціле для всієї системи. Внаслідок цього отримують одне диференціальне рівняння теплопровідності з узагальненими похідними і крайовими умовами тільки на межових поверхнях цих середовищ. У класичному випадку такий процес описують системою диференціальних рівнянь теплопровідності для кожного з елементів неоднорідного середовища з умовами ідеального теплового контакту на поверхнях спряження та крайовими умовами на межових поверхнях. Враховуючи зазначене вище, запропоновано спосіб, який полягає в тому, що температуру, як функцію однієї з просторових координат, на боковій поверхні включення апроксимовано кусково-лінійною функцією. Це дало змогу застосувати інтегральне перетворення Фур'є до перетвореного диференціального рівняння теплопровідності із узагальненими похідними та крайових умов. Внаслідок отримано аналітичний розв'язок для визначення температурного поля в наведених просторових середовищах з внутрішнім та наскрізним включеннями. Із використанням отриманих аналітичних розв'язків крайових задач створено обчислювальні програми, що дають змогу отримати розподіл температури та аналізувати конструкції щодо термостійкості. Як наслідок, стає можливим її підвищити і цим самим захистити від перегрівання, яке може спричинити руйнування як окремих елементів, так і конструкції загалом.

**Ключові слова:** теплопровідність; температурне поле; внутрішні джерела тепла.

**Вступ.** У сучасній мікроелектроніці часто застосовують матеріали з чужорідними теплоактивними включеннями. Під час нагрівання наявність включень призводить до виникнення неоднорідного температурного поля, що спричиняє термофотопружний ефект, який полягає у появі двопронезаломлення у структурах. Явище термофотопружного ефекту виявлено доволі давно, але воно і досі є малодослідженим. Для вивчення цього явища використовують в експериментах як значні температурні градієнти, так і абсолютні значення температури.

У сучасній оптичній техніці важливими і критичними елементами, які визначають ефективність і на-

дійність пристроїв, є селективні оптичні фільтри, що ґрунтуються на неоднорідних структурах. З часом вимоги до цих елементів зростають: йдеться про забезпечення максимальної селективності й експлуатаційної стійкості, тобто про підвищення якості, мініятуризацію, здешевлення приладів. Тому розробляють нові структури інтерференційних фільтрів, а також алгоритми розрахунку структурних параметрів. Важливим у цих розробках є встановлення зв'язку між параметрами структурних елементів фільтрів та оптичними характеристиками. Одним із основних структурних параметрів є температура, достовірне визначення якої розрахунковим

### Інформація про авторів:

**Гавриш Василь Іванович**, д-р техн. наук, професор кафедри програмного забезпечення. Email: [gavryshvasyl@gmail.com](mailto:gavryshvasyl@gmail.com)

**Лоїк Василь Богданович**, канд. техн. наук, доцент кафедри пожежної тактики та аварійно-рятувальних робіт.

Email: [v.loik1984@gmail.com](mailto:v.loik1984@gmail.com)

**Синельников Олександр Дмитрович**, канд. техн. наук, доцент кафедри пожежної тактики та аварійно-рятувальних робіт.

Email: [o.synelnikov@gmail.com](mailto:o.synelnikov@gmail.com)

**Бойко Тарас Володимирович**, канд. техн. наук, доцент, заступник начальника інституту. Email: [boykotaras@gmail.com](mailto:boykotaras@gmail.com)

**Шкраб Роман Романович**, асистент кафедри програмного забезпечення. Email: [ikni.pz@gmail.com](mailto:ikni.pz@gmail.com)

**Цитування за ДСТУ:** Гавриш В. І., Лоїк В. Б., Синельников О. Д., Бойко Т. В., Шкраб Р. Р. Математичні моделі аналізу температурних режимів у 3D структурах із тонкими чужорідними включеннями. Науковий вісник НЛТУ України. 2018, т. 28, № 2. С. 144–149.

**Citation APA:** Havrysh, V. I., Loik, V. B., Synelnikov, O. D., Boyko, T. V., & Shkrab, R. R. (2018). Mathematical Models of the Analysis of Temperature Regimes in 3D Structures with Thin Foreign Inclusions. *Scientific Bulletin of UNFU*, 28(2), 144–149.

<https://doi.org/10.15421/40280227>

шляхом вимагає розв'язування складних крайових задач теплопровідності, оскільки експериментальні дослідження є практично неможливими.

З огляду на це виникла потреба розробити математичні моделі визначення температурних полів у просторових структурах із чужорідними тонкими включеннями, які дають змогу аналізувати температурні режими як у всій області системи, так і в області неоднорідностей.

**Аналіз літературних джерел та формулювання проблеми.** Визначення температурних режимів як в однорідних, так і неоднорідних конструкціях привертає увагу багатьох дослідників (Carpinteri & Paggi, 2008; Yangian & Daihui, 2009; Podil'chuk, & Sokolovskii, 1991a, 1991b). У роботі (Ghannad & Yaghoobi, 2015) отримано аналітично-числовий розв'язок осесиметричної задачі термопружності для товстостінного циліндра за дії теплового потоку з довільно заданими крайовими умовами. Отриманий розв'язок дає змогу проаналізувати вплив теплових і механічних навантажень на термомеханічну поведінку циліндра.

Розв'язано одновимірну стаціонарну температурну та механічну задачі і наведено співвідношення для визначення теплових і механічних навантажень у порожнистій товстостінній сфері. Розподіл температури зображено функцією від радіальної координати для заданих загальних теплових і механічних крайових умов на внутрішній і зовнішній поверхнях сфери (Jabbari, Kamrampur & Eslami, 2011).

У роботі (Bayat, Moosavi & Bayat, 2015) розв'язано нестационарну задачу теплопровідності та термопружності для функціонально-градієнтних товстостінних сфер. Теплофізичні і термопружні параметри матеріалів, за винятком коефіцієнта Пуассона, є довільними функціями радіальної координати.

Розглянуто осесиметричну стаціонарну задачу теплопровідності і термопружності для порожнистих функціонально-градієнтних сфер відносно джерела тепла. Отримано розв'язки у вигляді функцій від просторових координат для температури, компонент вектора переміщень і тензора напружень із використанням крайових умов за радіальною та кутовою координатами (Mohazab & Jabbari, 2011).

Розроблено методи розв'язування лінійних крайових задач теплопровідності для однорідних та шаруватих 2D середовищ із теплоактивними включеннями. Наведено низку побудованих математичних моделей визначення температурних полів у таких середовищах. Запропоновано способи лінеаризації нелінійних крайових задач теплопровідності у термочутливих кусково-однорідних середовищах та наведено математичні моделі аналізу температурних режимів для лінійно змінного коефіцієнта теплопровідності від температури у цих системах (Gavrysh & Fedasjuk, 2012).

Подано математичну модель визначення температурного поля, зумовленого тепловим потоком, у термочутливому 2D середовищі з наскрізним включенням (Havrysh, 2017).

Огляд основних літературних джерел показав, що малодослідженими та не розробленими залишилися моделі, які враховували б структуру конструкцій з тонкими включеннями. Оскільки конструкції піддаються температурним впливам, то у певних інтервалах температур стає відчутним вплив неоднорідностей щодо термостійкості. Це приводить до розроблення математич-

них моделей процесу теплопровідності та аналізу цих моделей для просторових середовищ із чужорідними теплоактивними включеннями. Розрахунки температурних полів у таких системах використовують у подальшому для проектування складних систем із метою термостійкості. Точність цих розрахунків впливатиме на ефективність методів, які використовують у процесі проектування.

**Мета і завдання дослідження.** Метою роботи є створення математичних моделей визначення температурних режимів у просторовому середовищі із тонкими включеннями, в області яких зосереджені внутрішні джерела тепла. Це дасть змогу підвищити точність визначення температурних полів у складних системах і ефективність методів проектування.

Для досягнення поставленої мети сформульовано такі задачі:

- отримати вихідне рівняння теплопровідності зі сингулярними коефіцієнтами з крайовими умовами та його аналітичний розв'язок для конструкції "шар-тонке включення". Цей розв'язок дає змогу розробити алгоритм і розрахункову програму для визначення температурного поля в довільній точці цієї конструкції";
- отримати вихідне рівняння теплопровідності зі сингулярними коефіцієнтами з крайовими умовами та його аналітичний розв'язок для конструкції "шар-тонке наскрізне включення". Цей розв'язок дає змогу розробити алгоритм і розрахункову програму для визначення температурного поля в довільній точці цієї конструкції.

**Результати дослідження процесу теплопровідності для кусково-однорідних середовищ.** Сформулюємо крайові задачі теплопровідності та наведемо методику розв'язування для просторових середовищ, що містять тонкі включення, в області яких діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла.

**Об'єкт дослідження та математична модель.** Розглянемо просторове середовище, описане ізотропним шаром, який містить паралелепіпедне включення з об'ємом  $V_0 = hbd$ , в області  $\Omega_0$  якого діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю  $q_0 = const$ . Наведену конструкцію віднесено до декартової прямокутної системи координат  $(x, y, z)$  із початком в центрі включення. На поверхні включення існують умови ідеального теплового контакту, а на межових поверхнях шару  $K_b, K_n$  задано умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем зі сталою температурою  $t_c = const$  (рис. 1).

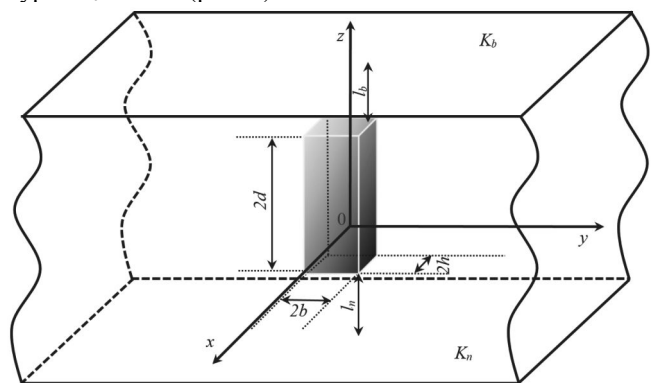


Рис. 1. Ізотропний шар із тонким включенням

Припустимо, що чужорідне включення є тонким. Для визначення температурного поля  $t(x, y, z)$  у наведеному неоднорідному середовищі скористаємось рівнянням теплопровідності (Podstrigach, Lomakin & Koljano, 1984; Koljano, 1992)

$$\operatorname{div}[\lambda(x, y, z) \operatorname{grad} \theta(x, y, z)] = -Q(x, y, z), \quad (1)$$

$$\text{де:} \quad \lambda(x, y, z) = \lambda_1 + \Lambda_0 N(z, d) \delta(x, y) \quad (2)$$

– коефіцієнт теплопровідності неоднорідного шару;  $\Lambda_0 = 4hb\lambda_0$  – зведений коефіцієнт теплопровідності включення;  $\lambda_0, \lambda_1$  – коефіцієнти теплопровідності матеріалів включення і шару відповідно;  $N(z, d) = S_-(z+d) - S_+(z-d)$ ;  $Q(x, y, z) = Q_0 N(z, d) \delta(x, y)$ ;  $Q_0 = 4hbq_0$  – зведена потужність внутрішніх джерел тепла;  $\delta(x, y)$  – дельта-функція Дірака (Korn & Korn, 1977);

$$\theta(x, y, z) = t(x, y, z) - t_c; \quad S_{\pm}(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0,5 \mp 0,5, & \zeta = 0, \\ 0, & \zeta < 0. \end{cases} \text{асимет-}$$

ричні одиничні функції (Korn & Korn, 1977).

Крайові умови запишемо у вигляді

$$\lambda_1 \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=d+l_b} = -\alpha_b \theta \Big|_{z=d+l_b}, \quad \lambda_1 \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=-d-l_n} = \alpha_n \theta \Big|_{z=-d-l_n}, \quad (3)$$

$$\theta \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = \theta \Big|_{|y| \rightarrow \infty} = 0.$$

де  $\alpha_b, \alpha_n$  – коефіцієнти тепловіддачі з країв  $K_b, K_n$  шару відповідно.

Введемо функцію

$$T = \lambda(x, y, z) \theta(x, y, z) \quad (4)$$

і продиференціюємо її за змінними  $x, y, z$  із урахуванням опису коефіцієнта теплопровідності  $\lambda(x, y, z)$  (2). Тоді отримаємо:

$$\begin{cases} \lambda(x, y, z) \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} - \Lambda_0 \theta(0, 0, z) N(z, d) \delta'_x(x, y), \\ \lambda(x, y, z) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} - \Lambda_0 \theta(0, 0, z) N(z, d) \delta'_y(x, y), \\ \lambda(x, y, z) \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} - \Lambda_0 [\theta(0, 0, -d) \delta_-(z+d) - \theta(0, 0, d) \delta_+(z-d)] \delta(x, y), \end{cases} \quad (5)$$

де  $\delta_{\pm}(\zeta) = \frac{dS_{\pm}(\zeta)}{d\zeta}$  – асиметричні дельта-функції Дірака.

Підставивши вирази (5) у співвідношення (4), приходимо до диференціального рівняння з частинними похідними із розривними та сингулярними коефіцієнтами

$$\Delta T = \Lambda_0 \left\{ \theta(0, 0, z) [\delta'_x(x, y) + \delta'_y(x, y)] N(z, d) + [\theta(0, 0, -d) \delta'_-(z+d) - \theta(0, 0, d) \delta'_+(z-d)] \delta(x, y) \right\} - Q(x, y, z). \quad (6)$$

де  $\Delta$  – оператор Лапласа в декартовій прямокутній системі координат,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

**Аналітично-числовий розв'язок.** Апроксимуємо функцію  $\theta(0, 0, z)$  у вигляді (рис. 2)

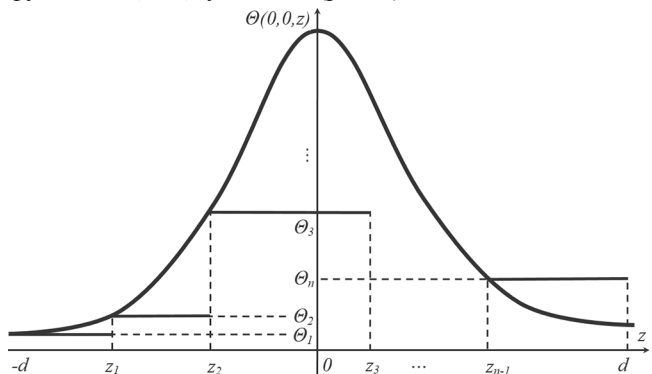


Рис. 2. Апроксимація функції  $\Theta(0, 0, z)$

$$\theta(0, 0, z) = \theta_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1} - \theta_j) S_-(z - z_j), \quad (7)$$

де  $z_j \in ]-d; d[$ ,  $-d < z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_{n-1} < d$ ;  $\theta_j (j = \overline{1, n})$  – невідомі апроксимаційні значення.

Підставивши вираз (7) у рівняння (6), отримаємо

$$\Delta T = \Lambda_0 \left\{ \left[ \theta_1 N(z, d) + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1} - \theta_j) N(z, z_j, d) \right] [\delta'_x(x, y) + \delta'_y(x, y)] + [\theta(0, 0, -d) \delta'_-(z+d) - \theta(0, 0, d) \delta'_+(z-d)] \delta(x, y) \right\} - Q(x, y, z), \quad (8)$$

де  $N(z, z_j, d) = S_-(z - z_j) - S_+(z - d)$ .

Застосувавши інтегральне перетворення Фур'є за координатами  $x$  та  $y$  до рівняння (8) та умов (3) із урахуванням співвідношення (4), приходимо до звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dz^2} - \gamma^2 \bar{T} = \frac{\Lambda_0}{2\pi} \left\{ \theta(0, 0, -d) \delta'_-(z+d) - \theta(0, 0, d) \delta'_+(z-d) - \gamma^2 \left[ \theta_1 N(z, d) + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1} - \theta_j) N(z, z_j, d) \right] \right\} - \frac{Q_0}{2\pi} N(z, d) \quad (9)$$

і крайових умов

$$\frac{d\bar{T}}{dz} \Big|_{z=d+l_b} = -\frac{\alpha_b}{\lambda_1} \bar{T} \Big|_{z=d+l_b}, \quad \frac{d\bar{T}}{dz} \Big|_{z=-d-l_n} = \frac{\alpha_n}{\lambda_1} \bar{T} \Big|_{z=-d-l_n}, \quad (10)$$

де  $\bar{T}(\xi, \eta, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} dx \int_{-\infty}^{\infty} T(x, y, z) e^{i\eta y} dy$ ;  $\gamma^2 = \xi^2 + \eta^2$ .

Загальний розв'язок рівняння (9) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{T}(\xi, \eta, z) = & c_1 e^{\gamma z} + c_2 e^{-\gamma z} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \left\{ \Lambda_0 [\theta(0, 0, -d) ch\gamma(z+d) S_-(z+d) - \theta(0, 0, d) ch\gamma(z-d) S_+(z-d) + \theta F(\gamma, z) + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1} - \theta_j) F(\gamma, z, z_j)] + \frac{Q_0}{\gamma^2} F(\gamma, z) \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

де:  $c_1, c_2$  – сталі інтегрування;

$$F(\gamma, z) = N(z, d) - ch\gamma(z+d) S_-(z+d) + ch\gamma(z-d) S_+(z-d);$$

$$F(\gamma, z, z_j) = N(z, z_j, d) - ch\gamma(z - z_j) S_-(z - z_j) + ch\gamma(z - d) S_+(z - d).$$

Використавши крайові умови (10) для визначення сталих інтегрування  $c_1, c_2$ , отримаємо частковий розв'язок задачі (9), (10)

$$\begin{aligned} \bar{T}(\xi, \eta, z) = & \frac{1}{2\pi} \left\{ \Lambda_0 \left[ \theta(0, 0, d) \left( \frac{2F_1(\gamma)}{\Delta^*} F_4(\gamma, z) - ch\gamma(z-d) S_+(z-d) \right) + \theta(0, 0, -d) \left( ch\gamma(z+d) S_-(z+d) - \frac{2F_2(\gamma)}{\Delta^*} F_6(\gamma, z) \right) \right] + \theta_1 \left( F(\gamma, z) + \frac{2F_3(\gamma)}{\Delta^*} F_6(\gamma, z) \right) + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1} - \theta_j) \left( F(\gamma, z, z_j) + \frac{2F_4(\gamma)}{\Delta^*} F_6(\gamma, z) \right) \right] + \frac{Q_0}{\gamma} \left[ \frac{F(\gamma, z)}{\gamma} + \frac{2F_5(\gamma)}{\Delta^*} F_6(\gamma, z) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

де:

$$\Delta^* = \left( \gamma + \frac{\alpha_n}{\lambda_1} \right) \left( \gamma + \frac{\alpha_b}{\lambda_1} \right) e^{\gamma(2d+l_b+l_n)} - \left( \gamma - \frac{\alpha_n}{\lambda_1} \right) \left( \gamma - \frac{\alpha_b}{\lambda_1} \right) e^{-\gamma(2d+l_b+l_n)},$$

$$F_1(\gamma) = \gamma sh\gamma l_b + \frac{\alpha_b}{\lambda_1} ch\gamma l_b; \quad F_2(\gamma) = \gamma sh\gamma(2d+l_b) + \frac{\alpha_b}{\lambda_1} ch\gamma(2d+l_b);$$

$$F_3(\gamma) = \gamma (sh\gamma(2d+l_b) - sh\gamma l_b) + \frac{\alpha_b}{\lambda_1} (ch\gamma(2d+l_b) - ch\gamma l_b);$$

$$F_4(\gamma) = \gamma (sh\gamma(d + l_b - z_i) - sh\gamma l_b) + \frac{\alpha_b}{\lambda_1} (ch\gamma(d + l_b - z_i) - ch\gamma l_b);$$

$$F_5(\gamma) = \frac{F_3(\gamma)}{\gamma}; \quad F_6(\gamma, z) = \gamma ch\gamma(z + d + l_n) + \frac{\alpha_n}{\lambda_1} sh\gamma(z + d + l_n).$$

Перейшовши у співвідношенні (12) до оригіналу, знаходимо вираз для шуканої температури

$$T(x, y, z) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \cos \xi x \cos \eta y \left[ \Lambda_0 \sum_{i=1}^4 \Theta_i + \Theta_5 \right] \right\} d\xi d\eta.$$

$$\Theta_1 = \theta(0, 0, d) \left( \frac{2F_1(\gamma)}{\Delta^*} F_6(\gamma, z) - ch\gamma(z - d) S_+(z - d) \right);$$

$$\Theta_2 = \theta(0, 0, -d) \left( ch\gamma(z + d) S_-(z + d) - \frac{2F_2(\gamma)}{\Delta^*} F_6(\gamma, z) \right);$$

$$\Theta_3 = \theta_1 \left( F(\gamma, z) + \frac{2F_3(\gamma)}{\Delta^*} F_6(\gamma, z) \right);$$

$$\Theta_4 = \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1} - \theta_j) \left( F(\gamma, z, z_j) + \frac{2F_4(\gamma)}{\Delta^*} F_6(\gamma, z) \right);$$

$$\Theta_5 = \frac{Q_0}{\gamma} \left( \frac{F(\gamma, z)}{\gamma} + \frac{2F_5(\gamma)}{\Delta^*} F_6(\gamma, z) \right).$$

Невідомі апроксимаційні значення температури  $\theta_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) та величину  $\theta(0, 0, \pm d)$  знаходимо, розв'язуючи систему  $n + 2$  лінійних алгебраїчних рівнянь, отриману із виразу (13), у такому вигляді:

$$\theta_j - \frac{1}{\pi^2 \lambda_0} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \Lambda_0 (\theta(0, 0, d) \frac{2F_1(\gamma)}{\Delta^*} F_6(\gamma, z_{j-1}) + \theta(0, 0, -d) \cdot \right.$$

$$\left. \left( ch\gamma(z_{j-1} + d) - \frac{2F_2(\gamma)}{\Delta^*} F_6(\gamma, z_{j-1}) \right) + \theta_1 \left( F(\gamma, z_{j-1}) + \frac{2F_3(\gamma)}{\Delta^*} F_6(\gamma, z_{j-1}) \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1} - \theta_j) \left( F(\gamma, z_{j-1}, z_j) + \frac{2F_4(\gamma)}{\Delta^*} F_6(\gamma, z_{j-1}) \right) \right] d\xi d\eta =$$

$$= -\frac{Q_0}{\pi^2 \lambda_0} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\gamma} \left( \frac{F(\gamma, z_{j-1})}{\gamma} + \frac{2F_5(\gamma)}{\Delta^*} F_6(\gamma, z_{j-1}) \right) d\xi d\eta, \quad j = \overline{1, n}, \quad z_0 = -d;$$

$$\theta(0, 0, d) - \frac{1}{\pi^2 \lambda_0} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \Lambda_0 (\theta(0, 0, d) \frac{2F_1(\gamma)}{\Delta^*} F_6(\gamma, d) + \theta(0, 0, -d) \right.$$

$$\left. \left( ch2\xi d - \frac{2F_2(\gamma)}{\Delta^*} F_6(\gamma, d) \right) + \theta_1 \left( F(\gamma, d) + \frac{2F_3(\gamma)}{\Delta^*} F_6(\gamma, d) \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1} - \theta_j) \left( F(\gamma, d, z_j) + \frac{2F_4(\gamma)}{\Delta^*} F_6(\gamma, d) \right) \right] d\xi d\eta =$$

$$= -\frac{Q_0}{\pi^2 \lambda_0} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\gamma} \left( \frac{F(\gamma, d)}{\gamma} + \frac{2F_5(\gamma)}{\Delta^*} F_6(\gamma, d) \right) d\xi d\eta;$$

$$\theta(0, 0, -d) - \frac{1}{\pi^2 \lambda_0} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \Lambda_0 (\theta(0, 0, -d) \frac{2F_1(\gamma)}{\Delta^*} F_6(\gamma, -d) + \right.$$

$$\left. + \theta(0, 0, -d) \left( 1 - \frac{2F_2(\gamma)}{\Delta^*} F_6(\gamma, -d) \right) + \theta_1 \left( F(\gamma, -d) + \frac{2F_3(\gamma)}{\Delta^*} F_6(\gamma, -d) \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1} - \theta_j) \left( F(\gamma, -d, z_j) + \frac{2F_4(\gamma)}{\Delta^*} F_6(\gamma, -d) \right) \right] d\xi d\eta =$$

$$= -\frac{Q_0}{\pi^2 \lambda_0} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\gamma} \left( \frac{F(\gamma, -d)}{\gamma} + \frac{2F_5(\gamma)}{\Delta^*} F_6(\gamma, -d) \right) d\xi d\eta.$$

Отже, шукане температурне поле у наведеній системі описує формула (13), з якої дістаємо значення температури в довільній точці шару та чужорідного тонкого включення.

### Шар із тонким наскрізним включенням

**Об'єкт дослідження та математична модель.** Розглянемо просторове середовище, описане ізотропним шаром, який містить паралелепіпедне тонке наскрізне

включення з об'ємом  $V_0 = 8hbd$ , в області  $\Omega_0$  якого діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю  $q_0 = const$ . Наведену конструкцію віднесено до декартової прямокутної системи координат  $(x, y, z)$  із початком в центрі включення. На поверхні включення існують умови ідеального теплового контакту, а на межових поверхнях шару  $K_b, K_n$  задано крайові умови другого роду (рис. 3).

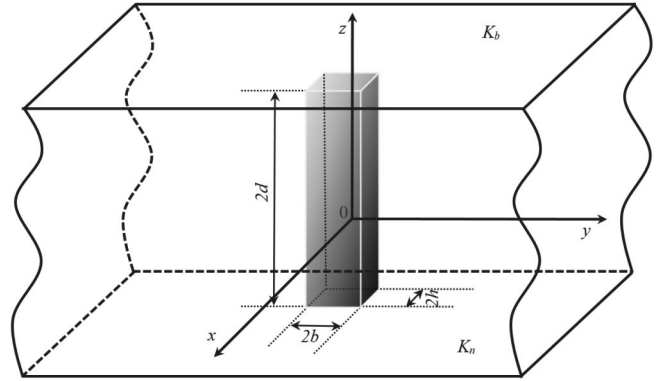


Рис. 3. Ізотропний шар із тонким наскрізним включенням

Для визначення температурного поля  $t(x, y, z)$  у наведеній системі скористаємось рівнянням теплопровідності (Podstrigach, Lomakin & Koljano, 1984; Koljano, 1992)

$$\operatorname{div}[\lambda(x, y) \operatorname{grad} \theta(x, y, z)] = -Q(x, y), \quad (14)$$

$$\text{де:} \quad \lambda(x, y) = \lambda_1 + \Lambda_0 \delta(x, y) \quad (15)$$

– коефіцієнт теплопровідності неоднорідного шару;  $\Lambda_0 = 4hb\lambda_0$  – зведений коефіцієнт теплопровідності включення;  $Q(x, y) = Q_0 \delta(x, y)$ .

Крайові умови запишемо у вигляді

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=d} = 0, \quad \theta \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = \theta \Big|_{|y| \rightarrow \infty} = 0. \quad (16)$$

Продиференціюємо функцію (4) за змінними  $x, y, z$  із урахуванням опису коефіцієнта теплопровідності  $\lambda(x, y)$  (15). Тоді отримаємо:

$$\lambda(x, y) \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} - \Lambda_0 \theta(0, 0, z) \delta_x''(x, y),$$

$$\lambda(x, y) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} - \Lambda_0 \theta(0, 0, z) \delta_y''(x, y), \quad \lambda(x, y) \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (17)$$

Підставивши вирази (17) у співвідношення (14), приходимо до диференціального рівняння з частинними похідними з сингулярними коефіцієнтами

$$\Delta T - \Lambda_0 \theta(0, 0, z) [\delta_x''(x, y) + \delta_y''(x, y)] = -Q(x, y). \quad (18)$$

**Аналітично-числовий розв'язок.** Апроксимуємо функцію  $\theta(0, 0, z)$  у вигляді (див. рис. 2)

$$\theta(0, 0, z) = \theta_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1} - \theta_j) S_-(z - z_j), \quad (19)$$

де  $z_j \in ]-d, d[$ ,  $-d < z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_{n-1} < d$ ;  $\theta_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) – невідомі апроксимаційні значення.

Підставивши вираз (19) у рівняння (18), отримаємо

$$\Delta T = \Lambda_0 \left[ \theta_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1} - \theta_j) S_-(z - z_j) \right] [\delta_x''(x, y) + \delta_y''(x, y)] - Q(x, y). \quad (20)$$

Застосувавши інтегральне перетворення Фур'є за координатами  $x$  та  $y$  до рівняння (20) та крайових умов (16) із урахуванням співвідношення (4), приходимо до

звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2\bar{T}}{dz^2} - \gamma^2\bar{T} = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \Lambda_0 \gamma^2 \left[ \theta_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1} - \theta_j) S_-(z - z_j) \right] + Q_0 \right\} \quad (21)$$

і крайових умов  $\left. \frac{d\bar{T}}{dz} \right|_{z=d} = 0. \quad (22)$

Загальний розв'язок рівняння (21) матиме вигляд:

$$\bar{T} = c_1 e^{\gamma z} + c_2 e^{-\gamma z} + \frac{1}{2\pi} \left\{ \Lambda_0 \left[ \theta_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1} - \theta_j) \cdot (1 - ch\gamma(z - z_j)) S_-(z - z_j) \right] + \frac{Q_0}{\gamma^2} \right\} \quad (23)$$

Використавши крайову умову (22), отримаємо часовий розв'язок задачі (21), (22)

$$\begin{aligned} \bar{T}(\xi, \eta, z) = & \frac{1}{\pi} \left\{ \Lambda_0 \left[ \theta_1 \left( \frac{1}{2} + \frac{sh\gamma d}{sh2\gamma d} sh\gamma z \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1} - \theta_j) \left( (1 - ch\gamma(z - z_j)) S_-(z - z_j) + \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{sh\gamma(d - z_j)}{sh2\gamma d} ch\gamma z \right) \right) \right] \right\}. \quad (24) \end{aligned}$$

Перейшовши у співвідношенні (24) до оригіналу, знаходимо вираз для шуканої температури

$$T(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cos \xi x \cos \eta y \bar{T}(\xi, \eta, z) d\xi d\eta. \quad (25)$$

Невідомі апроксимаційні значення температури  $\theta_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) знаходимо, розв'язуючи систему  $n$  лінійних алгебраїчних рівнянь, отриману із виразу (25) у вигляді

$$\begin{aligned} \theta_j - \frac{8hb}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ \theta_1 \left( \frac{1}{2} + \frac{sh\gamma d}{sh2\gamma d} sh\gamma z_{j-1} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1} - \theta_j) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left( 1 + \frac{sh\gamma(d - z_j)}{sh2\gamma d} ch\gamma z_{j-1} \right) \right] d\xi d\eta = \frac{Q_0}{2\pi^2 \lambda_0} \int_0^{\infty} \frac{d\xi d\eta}{\gamma^2}, \quad z_0 = -d. \end{aligned}$$

Отже, шукане температурне поле в неоднорідному шарі описує формула (25), з якої дістаємо значення температури в довільній точці шару та чужорідного включення.

**Обговорення результатів досліджень математичних моделей визначення температурних режимів.** У процесі розроблення та дослідження лінійної та нелінійної математичних моделей визначення температурного поля для конструкцій, які геометрично описано наведеними 3D структурами з теплоактивними включеннями, виявлено, що хоча чужорідне включення є малим, зате врахування його конструкційного матеріалу є важливим, про що стверджують числові розрахунки. Усереднення значень коефіцієнта теплопровідності для матеріалів шару та включення приводить до значної похибки результатів обчислень температурного поля. Тому у таких дослідженнях важливим є врахування локальних неоднорідностей, які містять подібні структури. Це значно ускладнює розв'язування відповідних лінійної та нелінійної крайових задач, зате розв'язки цих задач адекватніше до реального процесу описують шукані результати.

## Висновки

1. Розроблено математичну модель визначення температурного поля у просторовому середовищі з теплоактивним включенням. Отриманий аналітичний розв'язок дає змогу визначити розподіл температури в конструкції "шар-включення" і на основі цього аналізувати температурні режими у просторових середовищах, які геометрично можна описати такою конструкцією.
2. Розроблено нелінійну математичну модель визначення температурного поля в термочутливому просторовому середовищі з включенням. Застосовано перетворення Кірхгофа, яке дало змогу лінеаризувати вихідну нелінійну крайову задачу теплопровідності. Для заданих залежностей коефіцієнта теплопровідності від температури матеріалів конструкції отримано розрахункові формули для визначення температурного поля. Вони дають змогу аналізувати температурні режими у термочутливих 3D середовищах, які мають геометричну форму "шар-включення".

## Перелік використаних джерел

- Bayat, A., Moosavi, H., & Bayat, Y. (2015). Thermo-mechanical analysis of functionally graded thick spheres with linearly time-dependent temperature. *Scientia Iranica*, 22(5), 1801–1812.
- Carpinteri, A., & Paggi, M. (2008). Thermoelastic mismatch in non-homogeneous beams. *J. Eng. Math.*, 61(2–4), 371–384. <https://doi.org/10.1007/s10665-008-9212-8>
- Gavrysh, V. I., & Fedasjuk, D. V. (2012). *Modeljuvannja temperaturnyh rezhymiv u kuskovo – odnorodnyh strukturah*. Lviv: V-vo Nac. un-tu "Lvivska politehnika", 176 p. [in Ukrainian].
- Ghannad, M., & Yaghoobi, M. P. (2015). A thermoelasticity solution for thick cylinders subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions. *Int. Journal of Advanced Design & Manufacturing Technology*, 8(4), 1–12.
- Havrysh, V. I. (2017). Investigation of temperature fields in a heat-sensitive layer with through inclusion. *Materials Science*, 52(4), 514–521.
- Jabbari, M., Karampour, S., & Eslami, M. R. (2011). Radially symmetric steady state thermal and mechanical stresses of a porous FGM hollow sphere. *International Scholarly Research Network Mechanical Engineering*, 1–7. <https://doi.org/10.5402/2011/305402>
- Koljano, Ju. M. (1992). *Metody teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela*. Kyiv: Naukova dumka. 280 p. [in Russian].
- Korn, G., & Korn, T. (1977). *Spravochnik po matematike dlja nauchnyh rabotnikov i inzhenerov*. Moscow: Nauka. 720 p. [in Russian].
- Mohazzab, A. H., & Jabbari, M. (2011). Two-Dimensional Stresses in a Hollow FG Sphere with Heat Source. *Advanced Materials Research*, 264–265, 700–705. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amr.264-265.700>
- Podstrigach, Ja. S., Lomakin, V. A., & Koljano, Ju. M. (1984). *Termouprugost' tel neodnorodnoj struktury*. Moscow: Nauka. 368 p. [in Russian].
- Podil'chuk, Yu. N., & Sokolovskii, Ya. I. (1991a). Stress state of a transversely isotropic medium with an anisotropic spheroidal inclusion. Arbitrary uniform stress field at infinity. *Soviet Applied Mechanics and International Applied Mechanics*, 27(6), 551–558.
- Podil'chuk, Yu. N., & Sokolovskii, Ya. I. (1991b). Stress state of a transversely isotropic medium with an anisotropic inclusion. Arbitrary linear force field at infinity. *Soviet Applied Mechanics and International Applied Mechanics*, 27(7), 644–653.
- Yangian, Xu, & Daihui, Tu. (2009). Analysis of steady thermal stress in a ZrO<sub>2</sub>/FGM/Ti-6Al-4V composite ECBF plate with temperature-dependent material properties by NFEM. *WASE Int. Conf. on Informa. Eng.*, 2–2, 433–436.

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ АНАЛИЗА ТЕМПЕРАТУРНЫХ РЕЖИМОВ В 3D СТРУКТУРАХ С ТОНКИМИ ИНОРОДНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ**

Неравномерный нагрев – один из факторов, который вызывает деформации и напряжения в упругих конструкциях. Если с повышением температуры ничто не препятствует расширению структуры, то она деформируется и никаких напряжений не возникает. Однако, если в конструкции температура возрастает неравномерно и она неоднородная, то в результате расширения формируются температурные напряжения. Первым и независимым шагом для исследования температурных напряжений есть определение температурного поля, что составляет основную задачу аналитической теории теплопроводности. В отдельных случаях определение температурных полей является самостоятельной технической задачей, решение которой помогает определить температурные напряжения. Поэтому разработаны линейные математические модели определения температурных режимов в 3D (пространственных) средах с локально сосредоточенными тонкими теплоактивными инородными включениями. Классические методы не дают возможности решать граничные задачи математической физики, которые соответствуют таким моделям, в замкнутом виде. В связи с этим описано способ, который состоит в том, что теплофизические параметры для неоднородных сред описывают с помощью асимметрических единичных функций как единое целое для всей системы. В результате этого получают одно дифференциальное уравнение теплопроводности с обобщенными производными и граничными условиями только на граничных поверхностях этих сред. В классическом случае такой процесс описывают системой дифференциальных уравнений теплопроводности для каждого из элементов неоднородной среды с условиями идеального теплового контакта на поверхностях сопряжения и граничными условиями на граничных поверхностях. Уточнее изложено выше предложен способ, который состоит в том, что температура, как функция одной из пространственных координат, на боковой поверхности включения аппроксимирована кусочно-линейной функцией. Это дало возможность применить интегральное преобразование Фурье к преобразованному уравнению теплопроводности с обобщенными производными и граничным условиям. В результате получено аналитическое решение для определения температурного поля в рассматриваемых пространственных средах с внутренним и сквозным включениями. С применением полученных аналитических решений граничных задач созданы вычислительные программы, которые дают возможность получить распределение температуры и анализировать конструкции на термочувствительность. В следствии стает возможным ее повысить и тем самым защитить от перегрева, которое может вызвать разрушение как отдельных элементов, так и конструкций в целом.

**Ключевые слова:** теплопроводность; температурное поле; внутренние источники тепла.

***V. I. Havrysh<sup>1</sup>, V. B. Loik<sup>2</sup>, O. D. Synelnikov<sup>2</sup>, T. V. Bojko<sup>2</sup>, R. R. Shkrab<sup>1</sup>***

<sup>1</sup> *Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine*

<sup>2</sup> *Lviv State University of Life Safety, Lviv, Ukraine*

## **MATHEMATICAL MODELS OF THE ANALYSIS OF TEMPERATURE REGIMES IN 3D STRUCTURES WITH THIN FOREIGN INCLUSIONS**

Uneven heating is one of the factors that cause deformation and stress in elastic structures. If nothing prevents the expansion of the structure with increasing temperature, it will deform and no tensions will arise. However, if the temperature increases unevenly and it is heterogeneous in a construction, then due to the expansion, the temperature stresses are formed. The first and independent step to study the temperature stress is to determine the temperature field, which is the main task of the analytical theory of thermal conductivity. In some cases, the determination of temperature fields is an independent technical problem; its solution helps to determine the temperature stresses. Therefore, linear mathematical models for determining the temperature regimes in 3D (spatial) environments with locally concentrated thin, thermal active alien inclusions are developed. Classical methods do not allow solving the boundary value problems of mathematical physics corresponding to such models, in the closed form. Concerning the above work, a method is described that the thermophysical parameters for inhomogeneous media are described with the help of asymmetric unit functions as a single whole for the whole system. As a result, one differential equation of heat conduction with generalized derivatives and boundary conditions is obtained only on the boundary surfaces of these media. In the classical case, such a process is described by a system of differential heat equations for each element of an inhomogeneous medium with conditions of ideal thermal contact on the surfaces of conjugation and boundary conditions on boundary surfaces. Considering mentioned above, the authors present a method that the temperature, as a function of one of the spatial coordinates, is approximated by the piecewise linear function on the lateral surface of the inclusion. This enables applying the Fourier integral transformation to a transformed differential heat equation with generalized derivatives and boundary conditions. As a result, an analytical solution was obtained for determining the temperature field in the above spatial media with internal and transient inclusions. Using the obtained analytical solutions of boundary value problems, computational programs have been created that allow obtaining temperature distribution and analyse constructions concerning thermal stability. As a result, it becomes possible to increase it and thereby protect from overheating, which can cause the destruction of both individual elements and structures in general.

**Keywords:** thermal conductivity; temperature field; internal heat sources.