



Ю. І. Грицюк, В. І. Гавриш

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ТАБЛИЧНО-ЗАДАНИХ ФУНКЦІЙ З ВИКОРИСТАННЯМ МНОГОЧЛЕНА ФУР'Є

Розроблено методологію інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій многочленом Фур'є n -го порядку в довільно розташованих вузлах інтерполяції, що дає можливість обчислювати їх проміжні значення між вузловими точками, а також чисельно їх диференціювати. Розглянуто деякі особливості інтерполяції періодичних многочленом Фур'є n -го порядку, наведено алгоритм розв'язання та математичне формулювання задачі інтерполяції, наведено її формалізований запис, а також матричний запис процедур інтерполяції для певних значень аргумента в довільно розташованих вузлах інтерполяції. Існує багато різних способів інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій. З'ясовано, що вибір найпридатнішого алгоритму залежить від того, наскільки обраний метод є точним, має необхідну стійкість та збіжність, які затрати комп'ютерних ресурсів на його використання, наскільки гладкою є крива інтерполянти, яку кількість наборів даних (значень аргументів і відповідних значень функції) вона вимагає і т.д. Наведено алгоритми розв'язання задачі інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій многочленом Фур'є 1-го, 2-го і 3-го порядків, простота й наочність якого є однією з його переваг, але він незручний для його програмної реалізації. Наведено математичне формулювання задачі інтерполяції у термінах матричної алгебри, яке зводиться до обчислення матриці Фур'є за відомими з таблиці значеннями вузлових точок, до формування вузлового вектора-стовпця за вказаними у таблиці значеннями функцій, а також до розв'язання лінійної системи алгебричних рівнянь, коренем якої є числові коефіцієнти многочлена Фур'є n -го порядку. Розроблено метод розрахунку коефіцієнтів інтерполянти, заданої многочленом Фур'є n -го порядку, сутність якого полягає в обчисленні добутку матриці, оберненої до матриці Фур'є, яку визначають за значеннями вузлових точок таблично-заданої функції, на вектор-стовпець, який містить значення вузлів інтерполяції. На конкретних прикладах продемонстровано особливості розрахунку коефіцієнтів інтерполянти, заданих многочленом Фур'є 1-го, 2-го і 3-го порядків, а також для кожної з них обчислено інтерпольоване значення функції у заданій точці. Розрахунки виконано в середовищі Excel, які за аналогією можна успішно реалізувати й в будь-якому іншому обчислювальному середовищі.

Ключові слова: матрична алгебра; обчислювальна математика; періодична функція; коефіцієнти інтерполянти; вузлові точки; вузли інтерполяції; алгоритм розв'язання задачі; математичне формулювання задачі.

Вступ / Introduction

У математичному формулюванні багатьох задач з інженерії ПЗ присутні таблично-задані функції, для яких відомими є їхні числові значення при деяких заданих значеннях аргумента [9, 10, 14]. Для обчислення значень таких функцій за потрібних значень аргументів [1, 8, 42, 43, 47], відмінних від табличних, для можливості виконання подальших аналітичних перетворень над рівняннями, що входять в інженерну задачу та містять такі функції [37, 38, 41, 44], а також для можливості виконання програмних розрахунків [10, 14, 28, 50] необхідно вміти подавати кожну табличну функцію деяким аналітичним виразом [7, 29, 30, 31, 33, 34, 39].

Часто функції, присутні в інженерних задачах, задані не таблицею, а їхніми графіками [31, 39, 43, 44]. Тут також виникає потреба подання цих функцій в аналітичному вигляді. Вирішення цього завдання легко звес-

ти до попереднього в такий спосіб [1, 2, 36]: спочатку на графіку функції вибирають ряд точок, після чого їх значення вносять у таблицю, тобто перетворюють графічну функцію у таблично-задану.

Завдання визначення для табличної функції її аналітичного виразу (формули), що точно задовольняє табличні дані, вирішують методами обчислювальної математики [10, 14, 28, 49], який має назву теорія інтерполяції (від латинського префікса "inter", що означає "поміж", та латинського слова "polus", що означає "полюс"). Тут інтерполяція – спосіб знаходження проміжних значень величин за наявним дискретним набором відомих значень [9, 30, 47, 50].

Існує багато різних способів інтерполяції таблично-заданих функцій [34, 41, 44, 49]. Вибір найпридатнішого алгоритму [26, 33, 53] залежить від того, наскільки обраний метод є точним, має необхідну стійкість та збіжність, які затрати комп'ютерних ресурсів на його

Інформація про автора:

Грицюк Юрій Іванович, д-р техн. наук, професор, кафедра програмного забезпечення. Email: yurii.i.hrytsiuk@lpnu.ua;

<https://orcid.org/0000-0001-8183-3466>

Гавриш Василь Іванович, д-р техн. наук, професор, кафедра програмного забезпечення. Email: gavryshvasyl@gmail.com;

<http://orcid.org/0000-0003-3092-2279>

Цитування за ДСТУ: Грицюк Ю. І., Гавриш В. І. Інтерполяція таблично-заданих функцій з використанням многочлена Фур'є.

Науковий вісник НЛТУ України. 2022, т. 32, № 4. С. 88–102.

Citation APA: Hrytsiuk, Yu. I., & Gavrysh, V. I. (2022). Interpolation of table-given functions by Fourier polynomial. *Scientific Bulletin of UNFU*, 32(4), 88–102. <https://doi.org/10.36930/40320414>

використання, наскільки гладкою є крива інтерполянти, яку кількість наборів даних (значень аргументів і відповідних значень функції) вона вимагає і т.д.

Якщо функція належить до класу алгебричних многочленів, то інтерполювання (англ. *Interpolation*) називають параболічним [1, 26, 27, 33]. Параболічна інтерполяція є найзручнішою, позаяк отримані многочлени n -го степеня прості за формою і не мають особливих точок зміни похідних, можуть набувати довільних значень, а також їх легко обчислювати, диференціювати та інтегрувати [7, 28, 34, 37, 53]. Однак, якщо функція має періодичний характер, то тут доцільніше використовувати інші класи інтерполюючих функцій, наприклад тригонометричні многочлени, які часто називають многочленами Фур'є n -го порядку [7].

Об'єкт дослідження – встановлення особливостей інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій з огляду на їх високу точність, необхідну стійкість та збіжність, а також належну ефективність використання комп'ютерних ресурсів.

Предмет дослідження – алгоритми і методи інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій многочленом Фур'є, що дасть можливість обчислювати проміжні значення функції між довільно розташованими вузлами інтерполяції.

Мета роботи – розробити методологію інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій многочленом Фур'є n -го порядку в довільно розташованих вузлах інтерполяції, що дасть можливість обчислювати їх проміжні значення між вузлами інтерполяції, а також чисельно їх диференціювати.

Для досягнення зазначеної мети визначено такі основні завдання дослідження:

- з'ясуємо загальні положення інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій многочленом Фур'є n -го порядку в довільно розташованих вузлах інтерполяції.
- наведемо алгоритм розв'язання, математичне формулювання та формалізацію задачі інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій;
- розглянемо особливості матричного запису процедур інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій;
- наведемо результати інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій многочленом Фур'є n -го порядку.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. За останні пару десятиліть багато сучасних підходів до інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій були розроблені та розвинені різними дослідниками з різних країн. Вони вдосконалювали як відомі класичні методи та знаходили нові підходи для підвищення точності інтерполяції. Проаналізуємо деякі з них.

Особливості застосування різних методів інтерполяції таблично-заданих функцій розглянуто в багатьох роботах як вітчизняних дослідників (класичних методів – Андруник В. А. [1], Богач І. В. та Крилик Л. В. [27, 28], Бойко Л. Т. [2], Волонтир Л. О. [50], Колесницький О. К. [26], Мамчук В. І. [33, 34], Ярошенко О. І. [53], Цегелик Г. Г. [47] та ін., нових методів – Богач І. В. [30, 31], Войт Б. Л., Романюк, О. Н. [39, 41, 42, 43, 44, 49], Кветний Р. Н., [29, 30, 31], Москалець О. Ф. та Шутко В. М. [36], Некрасов О. Н. [37], Пагіря М. М. [38], Фільц Р. В. та Коцюба М. В. [7, 8, 9, 10], та ін.), так і закордонних науковців (Qi Duan та Yunfeng Zhang, E. H. Twizell [3, 4, 5, 6], Min Hu та Jieqing Tan [35], Giampietro Allasia та Cesare Bracco [11], Muhammad Sarfraz та Hussain Malik Zawwar [24, 45], Goodman T. N. T. та Meek D. S. [12] тощо).

Існує багато різних способів інтерполяції таблично-заданих функцій [1, 2, 26, 27, 28, 33, 34, 47, 50, 53]. Однак, вибір найпридатнішого алгоритму залежить від того, наскільки обраний метод є точним, має необхідну стійкість та збіжність, які затрати комп'ютерних ресурсів на його використання, наскільки гладкою є крива інтерполянти, яку кількість наборів даних (значень вузлів інтерполяції) вона вимагає і т.д.

Автор роботи [37] почав досліджувати деякі питання з теорії наближень, а саме – завдання знаходження при фіксованому n такого набору функцій $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, для якого наближення функції заданого класу поліномами $\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$ були б найкращими. У його подальших дослідженнях було з'ясовано, що для деяких важливих класів періодичних функцій найкращими у вказаному сенсі системами є тригонометричні многочлени n -го порядку.

У роботі [36] автор доводить, що інтерполяційні формули Лагранжа, Ньютона, Гаусса та ін. при використанні великої кількості вузлів інтерполяції часто призводять до незначних відхилень через нагромадження похибок у процесі виконання обчислень. Окрім цього, через розбіжність обчислювального процесу часто збільшення кількості вузлів не завжди приводить до підвищення точності інтерполяції. Істотно знизити похибку можна шляхом інтерполяції функції множиною поліномів невисокого порядку на вузьких інтервалах всього діапазону даних.

Автор роботи [46] розробив метод інтерполяції з частинами розкладання за двома радіальними базисними функціями для її наближення з полюсами. Метод було розроблено для опису поверхонь в антенних конструкціях, показано на прикладах, що матриця розсіювання для патч-антени, як функцію від деяких конструктивних параметрів, можна точно апроксимувати запропонованим методом.

У роботі [5] побудовано двовимірний раціональний метод інтерполяції з використанням як значень функцій, так і часткових похідних інтерпольованої функції як дані інтерполяції. Результати подальших досліджень автори навели у роботах [3, 4, 6], де описали метод раціональної інтерполяції з біквадратичним знаменником, використовуючи для цього тільки значення інтерпольованої функції. Вони також розробили двовимірну раціональну інтерполяцію Ерміта для відтворення просторової поверхні з використанням як значень функцій, так і частинних похідних функції першого порядку. Ними розроблено метод раціональної кубічної сплайн-інтерполяції з використанням двох видів раціональних кубічних сплайнів з квадратичним знаменником.

Порівняльна характеристика операторів інтерполяції внутрішніх просторів, для нерівномірно розподілених даних наведена у роботі [35]. Перший – відомий поліноміальний оператор, який у певному сенсі узагальнює класичний інтерполяційний многочлен Лагранжа. Другий – можна отримати шляхом модифікації першого. Чисельні випробування та міркування щодо можливих похибок показують, що обидва оператори мають різні апроксимаційні характеристики, однак за допомогою відповідних модифікацій вони можуть забезпечити бажаний результат точності інтерполяції.

Автори роботи [11] навели метод збереження контуру зображення на підставі адаптивної осциляторної раціональної функції, яку будують шляхом апроксимації

ідеальної інтерполюючої функції ядра неперервними дробами. Це дещо точніший підхід для ідеальної інтерполяції в просторовій або частотній області, ніж інші лінійні поліноміальні інтерполяційні функції ядра. Також наведено результати моделювання поверхонь різної складності, що демонструють значно кращу можливість збільшення чіткості зображення.

У роботі [45] розглянуто проблему збереження форми поверхонь. Автори досліджували інтерполяцію, яку використовують для позитивних, монотонних і опуклих функцій з використанням раціонального кубічного сплайна. Розроблена ними раціональна сплайн-схема має унікальне подання, позаяк має два сімейства параметрів форми поверхонь. Схема працює автоматично, користувачеві не потрібно турбуватися про пошук і вибір відповідного набору параметрів як у випадку звичайного раціонального сплайна.

У роботі [12] наведено метод інтерполяції з використанням пари раціональних спіралей для розв'язання планарної та двоточкової задачі інтерполяції Ерміта. Спіральні сегменти, які тут використано, обмежені нульовою кривизною на одному кінці. Цей метод доцільно використовувати, коли виникає потреба інтерполяції між двома точками монотонної функції при відомих тангенсах кутів нахилу дотичних у цих точках.

Автори роботи [24] використали кусково-раціональну кубічну функцію для візуалізації даних, розташованих у прямокутній сітці. Схема реалізації цього методу отримана шляхом накладання деяких обмежень на параметри при описі раціонального бікубічного сплайна, тоді як інші параметри залишаються у розпорядженні користувачів.

Отже, проведений аналіз останніх досліджень та публікацій у сфері інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій показав, що багатьма авторами розроблено потужний математичний апарат, який можна використовувати для розв'язання широкого кола задач як наукового, так і парикладного характеру. Але основна частина досліджень – це строга теорія інтерполяції, тобто уточнення фундаментальних її математичних положень. У технічних системах інтерполяцію найчастіше використовують для розпізнавання образів і покращення їх якості. Проте, якщо локальна інтерполяція практично немає застережень, то використання глобальної інтерполяції не позбавлена своїх недоліків, пов'язаних з деякими відхиленнями через нагромадження похибок обчислення за великої кількості вузлів інтерполяції.

Результати дослідження та їх обговорення / Research results and their discussion

1. Загальні положення. Нехай функція $f[x]$ періодична і задана на осі $-\infty < x < +\infty$. Шляхом лінійної заміни незалежної змінної x на кут α період функції T можна зробити таким, що становитиме 2π . В цьому випадку періодичну таблично-задану функцію доцільно інтерполювати таким *тригонометричним многочленом* n -го порядку [1, 7, 26, 33, 37, 43, 44, 50]

$$V^n[\alpha] = c_0 + \sum_{j=1}^n (c_j \cdot \cos(j \cdot \alpha) + b_j \cdot \sin(j \cdot \alpha)), |c_j| + |b_j| \neq 0, \quad (1)$$

в якому $V^n[\alpha] = v[\alpha_i], i = \overline{0, 2n}$, де $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{2n} \leq 2\pi$ точки з проміжку $[0, 2\pi]$. Тригонометричний многочлен (1) є частковою сумою ряду Фур'є, тобто способом подання довільно складної функції сумою дещо прості-

ших. Тригонометричний многочлен n -го порядку, який не дорівнює тотожно нулю, має щонайбільше $2n$ коренів у будь-якому інтервалі $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ дійсних чисел. Надалі тригонометричний многочлен $V^n[\alpha]$ будемо називати *многочленом Фур'є n -го порядку*.

Нехай $v_i = v[\alpha_i], i = \overline{0, 2n}$. Необхідно підібрати коефіцієнти многочлена Фур'є так, щоб виконувались такі рівності:

$$\begin{cases} c_0 + \sum_{j=1}^n (c_j \cdot \cos(j \cdot \alpha_0) + b_j \cdot \sin(j \cdot \alpha_0)) = v_0; \\ c_0 + \sum_{j=1}^n (c_j \cdot \cos(j \cdot \alpha_1) + b_j \cdot \sin(j \cdot \alpha_1)) = v_1; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ c_0 + \sum_{j=1}^n (c_j \cdot \cos(j \cdot \alpha_{2n}) + b_j \cdot \sin(j \cdot \alpha_{2n})) = v_{2n}. \end{cases} \quad (2)$$

Отримана система (2) є системою тригонометричних рівнянь з $2n+1$ невідомими коефіцієнтами $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$. Як відомо [2, 26, 28, 47], визначник такої системи відмінний від нуля, тому дана *інтерполяційна задача* має розв'язок, причому єдиний:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha_0) & \sin(\alpha_0) & \dots & \cos(n \cdot \alpha_0) & \sin(n \cdot \alpha_0) \\ 1 & \cos(\alpha_1) & \sin(\alpha_1) & \dots & \cos(n \cdot \alpha_1) & \sin(n \cdot \alpha_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos(\alpha_{2n}) & \sin(\alpha_{2n}) & \dots & \cos(n \cdot \alpha_{2n}) & \sin(n \cdot \alpha_{2n}) \end{vmatrix} = 2^{n^2} \prod_{0 \leq p < q \leq 2n} \sin\left(\frac{\alpha_q - \alpha_p}{2}\right). \quad (3)$$

Перед тим, як наводити алгоритм розв'язання та математичне формулювання задачі інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій многочлена Фур'є n -го порядку, розглянемо спочатку декілька постановок задач, які стосуються цієї тематики.

Задача 1. Для функції $V = V[\alpha]$, заданої табл. 1, потрібно вивести аналітичний вираз інтерполянти у вигляді многочлена Фур'є для аргумента α з числовими коефіцієнтами. За отриманим виразом інтерполянти потрібно обчислити її значення для такого проміжку зміни аргумента $\alpha = 0(20)180$.

Табл. 1. Значення таблично-заданої функції для трьох вузлів інтерполяції / The value of the table-given function for three interpolation nodes

№ вузла	1	2	3
α , град	0	90	180
α , рад	0	$\pi/2$	π
V , од.	-2,0	3,0	1,0

Задача 2. Для функції $V = V[\alpha]$, заданої табл. 2, потрібно вивести аналітичний вираз інтерполянти у вигляді многочлена Фур'є для аргумента α з числовими коефіцієнтами. За отриманим виразом інтерполянти потрібно обчислити її значення для такого проміжку зміни аргумента $\alpha = 0(20)180$.

Табл. 2. Значення таблично-заданої функції для п'ятих вузлів інтерполяції / The value of the table-given function for five interpolation nodes

№ вузла	1	2	3	4	5
α , град	0	45	90	135	180
α , рад	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
V , од.	-2,0	1,86	3,0	0,72	1,0

Задача 3. Для функції $V = V[\alpha]$, заданої табл. 3, потрібно вивести аналітичний вираз інтерполянти у вигляді многочлена Фур'є для аргумента α з числовими коефіцієнтами. За отриманим виразом інтерполянти потрібно обчислити її значення для такого проміжку зміни аргумента $\alpha = 0(20)180$.

Табл. 3. Значення таблично-заданої функції для сімох вузлів інтерполяції / The value of the table-given function for seven interpolation nodes

№ вузла	1	2	3	4	5	6	7
α , град	0	30	60	90	120	150	180
α , рад	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
V , од.	-2,0	-1,14	1,49	3,0	2,11	0,24	1,0

2. Алгоритм розв'язання задачі інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій. Розглянемо алгоритм розв'язання задач інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій многочленом Фур'є спочатку на конкретних прикладах.

1. В системі координат $O\alpha V$ нанесемо точки (див. рис. 1), значення яких наведено в табл. 1. Оскільки в цій таблиці присутні три вузлові точки, то вираз інтерполянти матиме три коефіцієнти. Такій кількості коефіцієнтів многочлен Фур'є для аргумента α відповідає 1-му порядку, тобто $n = 1$. Отже, для періодичної таблично-заданої функції вираз інтерполянти з буквеними коефіцієнтами матиме такий вигляд:

$$V[\alpha] = c_0 + c_1 \cdot \cos(\alpha) + b_1 \cdot \sin(\alpha). \quad (4)$$

Застосувавши його послідовно до p -го вузла періодичної таблично-заданої функції, отримаємо таку систему тригонометричних рівнянь:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 \cdot \cos(\alpha_1) + b_1 \cdot \sin(\alpha_1) = v_1; \\ c_0 + c_1 \cdot \cos(\alpha_2) + b_1 \cdot \sin(\alpha_2) = v_2; \\ c_0 + c_1 \cdot \cos(\alpha_3) + b_1 \cdot \sin(\alpha_3) = v_3, \end{cases} \quad (5)$$

де: $\bar{A} = [\alpha_p, p = \overline{1,3}]$ – значення аргументів вузлових точок, рад; $\bar{V} = [v_p, p = \overline{1,3}]$ – вузлові значення функції, відомі з табл. 1.

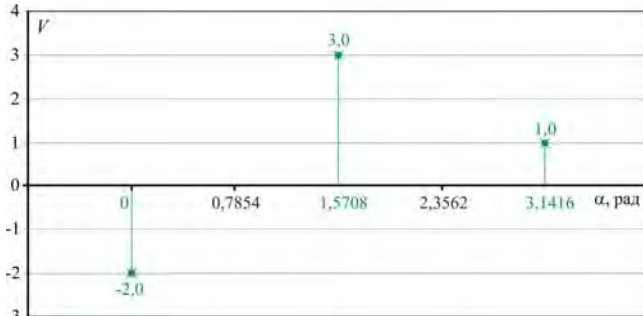


Рис. 1. Графічне подання вузлів таблично-заданої функції $V = V[\alpha]$ (див. табл. 1) / Graphic representation of the nodes of the table-given function $V = V[\alpha]$ (see Table 1)

З урахуванням значень вузлових точок (див. табл. 1), система тригонометричних рівнянь (5) набуде такого скалярного вигляду:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 \cos 0 + b_2 \sin 0 = -2; \\ c_0 + c_1 \cos \frac{\pi}{2} + b_2 \sin \frac{\pi}{2} = 3; \\ c_0 + c_1 \cos \pi + b_2 \sin \pi = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 + c_1 \cdot 1,0 + b_2 \cdot 0,0 = -2; \\ c_0 + c_1 \cdot 0,0 + b_2 \cdot 1,0 = 3; \\ c_0 - c_1 \cdot 1,0 + b_2 \cdot 0,0 = 1. \end{cases} \quad (6)$$

Отримана система (6) є лінійною системою алгебричних рівнянь з трьома невідомими коефіцієнтами $\bar{C} = [c_0, c_1, b_1]$. Розв'язавши її (наприклад, методом Гауса), матимемо такі корені системи рівнянь:

$$c_0 = -0,5; c_1 = -1,5; b_1 = 3,5. \quad (7)$$

Підставивши у вираз інтерполянти (4) з буквеними коефіцієнтами їх числові значення з (7), отримаємо аналітичний вираз інтерполянти у вигляді многочлена Фур'є 1-го порядку з числовими коефіцієнтами, а саме:

$$V^1[\alpha] = -0,5 - 1,5 \cdot \cos(\alpha) + 3,5 \cdot \sin(\alpha), \quad (8)$$

який і є результатом розв'язання поставленої задачі, тобто вираз (8) є інтерполянтою функції, заданої табл. 1.

Інтерполянта (8) дає змогу обчислити значення функції за певних значень аргумента α з такого проміжку $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, тобто, вона є придатною для інтерполяції функції, заданої табл. 1. Її також можна використовувати для деякого невеликого проміжку значень кута $\alpha < 0$ та для $\alpha > 2\pi$, тобто, для екстраполяції таблично-заданої функції. Однак, тут потрібно бути обережним, бо інколи значне відхилення від вузлових точок може призвести до хибних результатів екстраполяції.

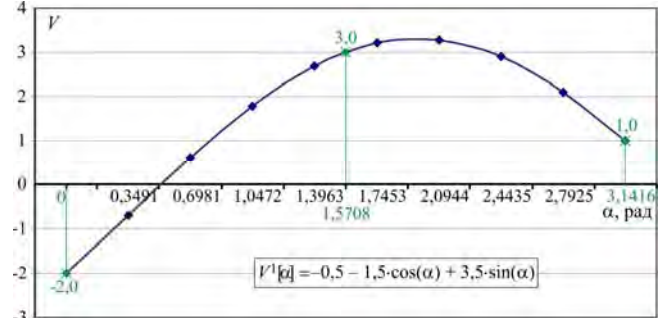


Рис. 2. Графічне подання інтерпольованих значень функції $V = V^1[\alpha]$ (див. табл. 4) / Graphic representation of interpolated values of the function $V = V^1[\alpha]$ (see Table 4)

Якщо за виразом (8) обчислити значення функції $V = V^1[\alpha]$ для декількох значень аргумента α , наприклад, на проміжку $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ з кроком $\Delta\alpha = \pi/9$, отримаємо табл. 4. Їй відповідає графік інтерпольованих значень функції для заданих значень аргумента α , який зображено на рис. 2.

Табл. 4. Значення таблично-заданої функції, обчислені за інтерполянтою (8) / Values of the table-given function, calculated by interpolant (8)

№ вузла	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α , град	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180
α , рад	0	0,3491	0,6981	1,0472	1,3963	1,7453	2,0944	2,4435	2,7925	3,1416
V , од.	-2,0	-0,71	0,6	1,78	2,69	3,21	3,28	2,9	2,11	1,0

Відоме застереження [1, 2, 33, 47] стосовно гладкості інтерполяційної функції. Даючи відповідь на нього, зазначимо, що інтерпольовані значення функції (8) є гладкими між вузловими точками (див. рис. 2).

2. В системі координат $O\alpha V$ нанесемо точки (див. рис. 3), значення яких наведено в табл. 2. Оскільки в цій таблиці присутні п'ять вузлових точок, то вираз інтерполянти матиме п'ять коефіцієнтів. Такій кількості коефіцієнтів многочлен Фур'є для аргумента α відповідає 2-му порядку, тобто $n = 2$. Отже, для періодичної таблично-заданої функції вираз інтерполянти з буквеними коефіцієнтами матиме такий вигляд:

$$V^2[\alpha] = c_0 + c_1 \cdot \cos(\alpha) + b_1 \cdot \sin(\alpha) + c_2 \cdot \cos(2 \cdot \alpha) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot \alpha). \quad (9)$$

Застосувавши його послідовно до p -го вузла таблично-заданої функції, отримаємо таку систему тригонометричних рівнянь:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 \cdot \cos(\alpha_1) + b_1 \cdot \sin(\alpha_1) + c_2 \cdot \cos(2 \cdot \alpha_1) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot \alpha_1) = v_1; \\ c_0 + c_1 \cdot \cos(\alpha_2) + b_1 \cdot \sin(\alpha_2) + c_2 \cdot \cos(2 \cdot \alpha_2) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot \alpha_2) = v_2; \\ c_0 + c_1 \cdot \cos(\alpha_3) + b_1 \cdot \sin(\alpha_3) + c_2 \cdot \cos(2 \cdot \alpha_3) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot \alpha_3) = v_3; \\ c_0 + c_1 \cdot \cos(\alpha_4) + b_1 \cdot \sin(\alpha_4) + c_2 \cdot \cos(2 \cdot \alpha_4) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot \alpha_4) = v_4; \\ c_0 + c_1 \cdot \cos(\alpha_5) + b_1 \cdot \sin(\alpha_5) + c_2 \cdot \cos(2 \cdot \alpha_5) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot \alpha_5) = v_5, \end{cases} \quad (10)$$

де: $\bar{A} = [\alpha_p, p = \overline{1,5}]$ – значення аргументів вузлових точок, рад; $\bar{V} = [v_p, p = \overline{1,5}]$ – вузлові значення функції, відомі з табл. 2.

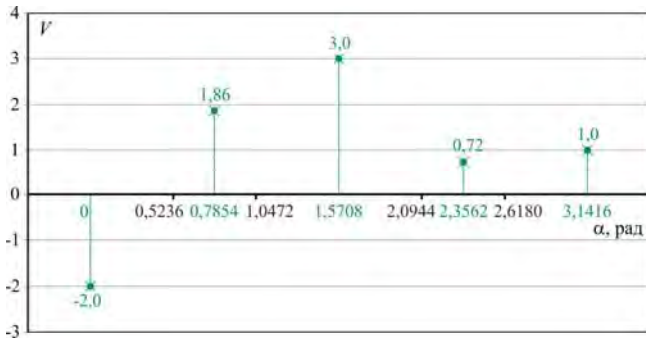


Рис. 3. Графічне подання вузлів таблично-заданої функції $V = V[\alpha]$ (див. табл. 2) / Graphic representation of the nodes of the table-given function $V = V[\alpha]$ (see Table 2)

З урахуванням значень вузлових точок (див. табл. 2), система тригонометричних рівнянь (10) набуде такого скалярного вигляду:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 \cdot \cos 0 + b_1 \cdot \sin 0 + c_2 \cdot \cos 2 \cdot 0 + b_2 \cdot \sin 2 \cdot 0 = -2,0; \\ c_0 + c_1 \cdot \cos \frac{\pi}{4} + b_1 \cdot \sin \frac{\pi}{4} + c_2 \cdot \cos 2 \cdot \frac{\pi}{4} + b_2 \cdot \sin 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 1,86; \\ c_0 + c_1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} + b_1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} + c_2 \cdot \cos 2 \cdot \frac{\pi}{2} + b_2 \cdot \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 3,0; \\ c_0 + c_1 \cdot \cos \frac{3\pi}{4} + b_1 \cdot \sin \frac{3\pi}{4} + c_2 \cdot \cos 2 \cdot \frac{3\pi}{4} + b_2 \cdot \sin 2 \cdot \frac{3\pi}{4} = 0,72; \\ c_0 + c_1 \cdot \cos \pi + b_1 \cdot \sin \pi + c_2 \cdot \cos 2\pi + b_2 \cdot \sin 2\pi = 1,0, \end{cases} \quad (11)$$

яка після виконання дій над тригонометричними виразами матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 \cdot 1,0 + b_1 \cdot 0,0 + c_2 \cdot 1,0 + b_2 \cdot 0,0 = -2,0; \\ c_0 + c_1 \cdot 0,7071 + b_1 \cdot 0,7071 + c_2 \cdot 0,0 + b_2 \cdot 1,0 = 1,86; \\ c_0 + c_1 \cdot 0,0 + b_1 \cdot 1,0 - c_2 \cdot 1,0 + b_2 \cdot 0,0 = 3,0; \\ c_0 - c_1 \cdot 0,7071 + b_1 \cdot 0,7071 + c_2 \cdot 0,0 - b_2 \cdot 1,0 = 0,72; \\ c_0 - c_1 \cdot 1,0 + b_1 \cdot 0,0 + c_2 \cdot 1,0 + b_2 \cdot 0,0 = 1,0. \end{cases} \quad (12)$$

Отримана система (12) є лінійною системою алгебричних рівнянь з п'ятьма невідомими коефіцієнтами $\bar{C} = [c_0, c_1, b_1, c_2, b_2]$. Розв'язавши її (наприклад, методом Гауса), матимемо такі корені системи рівнянь:

$$c_0 = 1,1534; c_1 = -1,50; b_1 = 0,1931; c_2 = -1,6534; b_2 = 1,6307.$$

Підставивши у вираз інтерполянти (9) з буквеними коефіцієнтами їх числові значення, отримаємо аналітичний вираз інтерполянти у вигляді многочлена Фур'є 2-го порядку з числовими коефіцієнтами, а саме:

$$V^2[\alpha] = 1,1534 - 1,50 \cdot \cos(\alpha) + 0,1931 \cdot \sin(\alpha) - 1,6534 \cdot \cos(2 \cdot \alpha) + 1,6307 \cdot \sin(2 \cdot \alpha), \quad (13)$$

який і є результатом розв'язання поставленої задачі, тобто вираз (13) є інтерполянтою функції, заданої табл. 2.

Табл. 5. Значення таблично-заданої функції, обчислені за інтерполянтою (13) / Values of the table-given function, calculated by interpolant (13)

№ вузла	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α , град	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180
α , рад	0	0,3491	0,6981	1,0472	1,3963	1,7453	2,0944	2,4435	2,7925	3,1416
V , од.	-2,00	-0,71	0,60	1,78	2,69	3,21	3,28	2,90	2,11	1,00

Інтерполянта (13) дає змогу обчислити значення функції за певних значень аргумента α з такого проміжку $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, тобто, вона є придатною для інтерполяції функції, заданої табл. 2. Якщо за виразом (13) обчислити значення функції $V = V^2[\alpha]$ для декількох значень аргумента α , наприклад, на проміжку $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ з кроком $\Delta\alpha = \pi/9$, отримаємо табл. 5. Їй відповідає графік інтерпольованих значень функції для заданих значень аргумента α , який зображено на рис. 4.

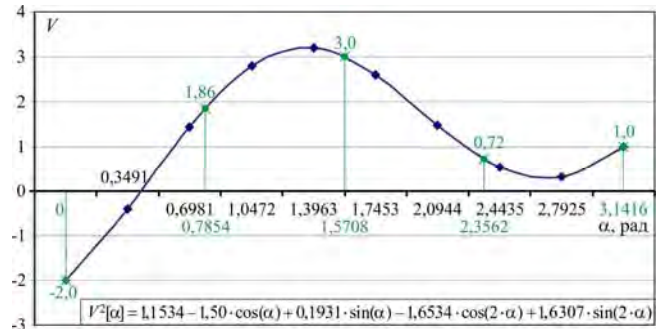


Рис. 4. Графічне подання інтерпольованих значень функції $V = V^2[\alpha]$ (див. табл. 5) / Graphic representation of interpolated values of the function $V = V^2[\alpha]$ (see Table 5)

3. В системі координат $O\alpha V$ нанесемо точки (див. рис. 5), значення яких наведено в табл. 3. Оскільки в цій таблиці присутні сім вузлових точок, то вираз інтерполянти матиме сім коефіцієнтів. Такої кількості коефіцієнтів многочлен Фур'є для аргумента α відповідає 3-му порядку, тобто $n = 3$. Отже, для періодичної таблично-заданої функції вираз інтерполянти з буквеними коефіцієнтами матиме такий вигляд:

$$V^3[\alpha] = c_0 + c_1 \cdot \cos(\alpha) + b_1 \cdot \sin(\alpha) + c_2 \cdot \cos(2\alpha) + b_2 \cdot \sin(2\alpha) + c_3 \cdot \cos(3\alpha) + b_3 \cdot \sin(3\alpha). \quad (14)$$

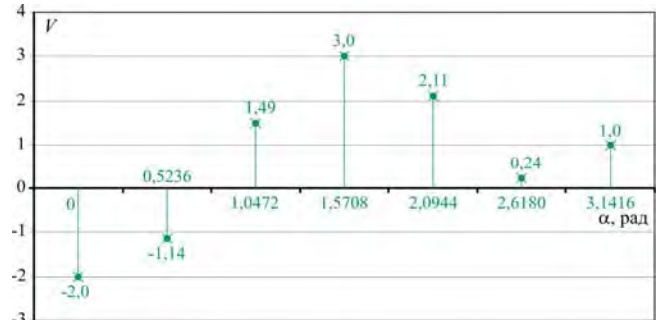


Рис. 5. Графічне подання вузлів таблично-заданої функції $V = V[\alpha]$ (див. табл. 3) / Graphic representation of the nodes of the table-given function $V = V[\alpha]$ (see Table 3)

Застосовувавши його послідовно до p -го вузла таблично-заданої функції, отримаємо таку систему тригонометричних рівнянь:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 \cos(\alpha_1) + b_1 \sin(\alpha_1) + c_2 \cos(2\alpha_1) + \dots + b_3 \sin(3\alpha_1) = v_1; \\ c_0 + c_1 \cos(\alpha_2) + b_1 \sin(\alpha_2) + c_2 \cos(2\alpha_2) + \dots + b_3 \sin(3\alpha_2) = v_2; \\ c_0 + c_1 \cos(\alpha_3) + b_1 \sin(\alpha_3) + c_2 \cos(2\alpha_3) + \dots + b_3 \sin(3\alpha_3) = v_3; \\ c_0 + c_1 \cos(\alpha_4) + b_1 \sin(\alpha_4) + c_2 \cos(2\alpha_4) + \dots + b_3 \sin(3\alpha_4) = v_4; \\ c_0 + c_1 \cos(\alpha_5) + b_1 \sin(\alpha_5) + c_2 \cos(2\alpha_5) + \dots + b_3 \sin(3\alpha_5) = v_5; \\ c_0 + c_1 \cos(\alpha_6) + b_1 \sin(\alpha_6) + c_2 \cos(2\alpha_6) + \dots + b_3 \sin(3\alpha_6) = v_6; \\ c_0 + c_1 \cos(\alpha_7) + b_1 \sin(\alpha_7) + c_2 \cos(2\alpha_7) + \dots + b_3 \sin(3\alpha_7) = v_7, \end{cases} \quad (15)$$

де: $\bar{A} = [\alpha_p, p = \overline{1,7}]$ – значення аргументів вузлових точок, рад; $\bar{V} = [v_p, p = \overline{1,7}]$ – вузлові значення функції, відомі з табл. 3.

З урахуванням значень вузлових точок (див. табл. 3), система тригонометричних рівнянь (15) набуде такого скалярного вигляду:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 \cos(0) + b_1 \sin(0) + c_2 \cos(2 \cdot 0) + b_2 \sin(2 \cdot 0) + \dots + b_3 \sin(3 \cdot 0) = v_1; \\ c_0 + c_1 \cos \frac{\pi}{6} + b_1 \sin \frac{\pi}{6} + c_2 \cos 2 \cdot \frac{\pi}{6} + b_2 \sin 2 \cdot \frac{\pi}{6} + \dots + b_3 \sin 3 \cdot \frac{\pi}{6} = v_2; \\ c_0 + c_1 \cos \frac{\pi}{3} + b_1 \sin \frac{\pi}{3} + c_2 \cos 2 \cdot \frac{\pi}{3} + b_2 \sin 2 \cdot \frac{\pi}{3} + \dots + b_3 \sin 3 \cdot \frac{\pi}{3} = v_3; \\ c_0 + c_1 \cos \frac{\pi}{2} + b_1 \sin \frac{\pi}{2} + c_2 \cos 2 \cdot \frac{\pi}{2} + b_2 \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \dots + b_3 \sin 3 \cdot \frac{\pi}{2} = v_4; \\ c_0 + c_1 \cos \frac{2\pi}{3} + b_1 \sin \frac{2\pi}{3} + c_2 \cos 2 \cdot \frac{2\pi}{3} + b_2 \sin 2 \cdot \frac{2\pi}{3} + \dots + b_3 \sin 3 \cdot \frac{2\pi}{3} = v_5; \\ c_0 + c_1 \cos \frac{5\pi}{6} + b_1 \sin \frac{5\pi}{6} + c_2 \cos 2 \cdot \frac{5\pi}{6} + b_2 \sin 2 \cdot \frac{5\pi}{6} + \dots + b_3 \sin 3 \cdot \frac{5\pi}{6} = v_6; \\ c_0 + c_1 \cos \pi + b_1 \sin \pi + c_2 \cos 2\pi + b_2 \sin 2\pi + \dots + b_3 \sin 3\pi = v_7, \end{cases} \quad (16)$$

яка після виконання дій над тригонометричними виразами матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 \cdot 1,0 + b_1 \cdot 0,0 + c_2 \cdot 1,0 + b_2 \cdot 0,0 + c_3 \cdot 1,0 + b_3 \cdot 0,0 = -2,0; \\ c_0 + c_1 \cdot 0,866 + b_1 \cdot 0,5 + c_2 \cdot 0,5 + b_2 \cdot 0,866 + c_3 \cdot 0,0 + b_3 \cdot 1,0 = -1,14; \\ c_0 + c_1 \cdot 0,5 + b_1 \cdot 0,866 - c_2 \cdot 0,5 + b_2 \cdot 0,866 - c_3 \cdot 1,0 + b_3 \cdot 0,0 = 1,49; \\ c_0 + c_1 \cdot 0,0 + b_1 \cdot 1,0 - c_2 \cdot 1,0 + b_2 \cdot 0,0 + c_3 \cdot 0,0 - b_3 \cdot 1,0 = 3,0; \\ c_0 - c_1 \cdot 0,5 + b_1 \cdot 0,866 - c_2 \cdot 0,5 - b_2 \cdot 0,866 + c_3 \cdot 1,0 + b_3 \cdot 0,0 = 2,11; \\ c_0 - c_1 \cdot 0,866 + b_1 \cdot 0,5 + c_2 \cdot 0,5 - b_2 \cdot 0,866 + c_3 \cdot 0,0 + b_3 \cdot 1,0 = 0,24; \\ c_0 - c_1 \cdot 1,0 + b_1 \cdot 0,0 + c_2 \cdot 1,0 + b_2 \cdot 0,0 - c_3 \cdot 1,0 + b_3 \cdot 0,0 = 1,0, \end{cases} \quad (17)$$

Отримана система (17) є лінійною системою алгебричних рівнянь з п'ятьма невідомими коефіцієнтами $\vec{C} = [c_0, c_1, b_1, c_2, b_2, c_3, b_3]$. Розв'язавши її (наприклад, методом Гауса), матимемо такі корені системи рівнянь:

$$a_0 = 3,9222; a_1 = -1,7666; b_1 = -5,0037; a_2 = -4,4222; b_2 = 0,9699; a_3 = 0,2666; b_3 = 0,3407.$$

Підставивши у вираз інтерполянти (14) з буквеними коефіцієнтами їх числові значення, отримаємо аналітичний вираз інтерполянти у вигляді многочлена Фур'є 3-го порядку з числовими коефіцієнтами, а саме:

$$V^3[\alpha] = 3,9222 - 1,7666 \cdot \cos(\alpha) - 5,0037 \cdot \sin(\alpha) - 4,4222 \cdot \cos(2\alpha) + 0,9699 \cdot \sin(2\alpha) + 0,2666 \cdot \cos(3\alpha) + 0,3407 \cdot \sin(3\alpha), \quad (18)$$

який і є результатом розв'язання поставленої задачі, тобто вираз (18) є інтерполянтою функції, заданої табл. 3.

Інтерполянта (18) дає змогу обчислити значення функції за певних значень аргумента α з проміжку $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, тобто, вона є придатною для інтерполяції функції, заданої табл. 3. Якщо за виразом (18) обчислити значення функції $V = V^3[\alpha]$ для декількох значень аргумента α , наприклад, на проміжку $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ з кроком $\Delta\alpha = \pi/9$, отримаємо табл. 6. Їй відповідає графік інтерпольованих значень функції для заданих значень аргумента α , який зображено на рис. 6.

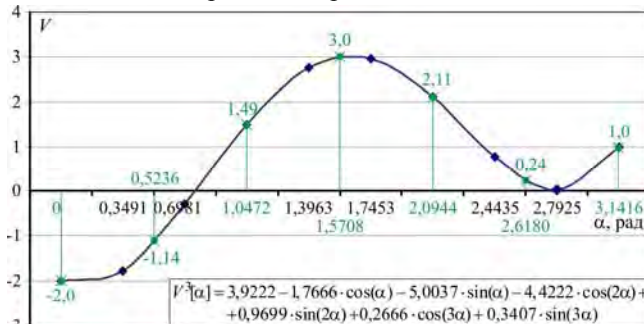


Рис. 6. Графічне подання інтерпольованих значень функції $V = V^3[\alpha]$ (див. табл. 6) / Graphic representation of interpolated values of the function $V = V^3[\alpha]$ (see Table 6)

Табл. 6. Значення таблично-заданої функції, обчислені за інтерполянтою (18) / Values of the table-given function, calculated by interpolant (18)

№ вузла	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α , градус	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180
α , рад	0	0,3491	0,6981	1,0472	1,3963	1,7453	2,0944	2,4435	2,7925	3,1416
V , од.	-2,0	-0,71	0,6	1,78	2,69	3,21	3,28	2,9	2,11	1,0

Для розв'язання задачі інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій многочленом Фур'є n -го порядку потрібно виконати такі дії:

- записати вираз інтерполянти у вигляді многочлена Фур'є з буквеними коефіцієнтами, порядок (n) якого відповідає кількості вузлів таблично-заданої функції;
- застосувати вираз інтерполянти послідовно до p -го вузла таблично-заданої функції, внаслідок чого отримаємо систему тригонометричних рівнянь, яка після виконання дій над

тригонометричними виразами стане лінійною системою алгебричних рівнянь;

- розв'язати систему рівнянь (наприклад, методом Гауса), внаслідок чого отримаємо корені системи, які водночас будуть числовими коефіцієнтами інтерполянти;
- підставити у вираз інтерполянти з буквеними коефіцієнтами їх числові значення, внаслідок чого отримаємо аналітичний вираз інтерполянти у вигляді многочлена Фур'є n -го порядку з числовими коефіцієнтами, який і є результатом розв'язання поставленої задачі.

Отже, наведено алгоритм розв'язання задачі інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій многочленом Фур'є n -го порядку, сутність якого зводиться до виконання таких дій: запису виразу інтерполянти у вигляді многочлена Фур'є з буквеними коефіцієнтами; застосування виразу інтерполянти послідовно до p -го вузла таблично-заданої функції, внаслідок чого отримаємо лінійну систему алгебричних рівнянь; розв'язати систему рівнянь (наприклад, методом Гауса), корені якої будуть числовими коефіцієнтами інтерполянти; підставити у вираз інтерполянти числові значення її коефіцієнтів, який і є результатом розв'язання поставленої задачі.

З'ясовано, що наведений алгоритм розв'язання задачі інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій многочленом Фур'є n -го порядку хоча і є простим й наочним, що є беззаперечною його перевагою, однак він незручний для його програмної реалізації.

3. Математичне формулювання задачі інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій. Наведений вище алгоритм розв'язання задачі інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій многочленом Фур'є n -го порядку хоча є простим і наочним, однак він незручний для його програмної реалізації. Для виконання розрахунків математичне формулювання задачі інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій доцільно подати у матричному записі. Тому спочатку сформулюємо викладений вище алгоритм у термінах матричної алгебри. Для розуміння сутності викладеного матеріалу зупинимось на конкретному виразі інтерполянти, наприклад, заданої многочленом Фур'є 2-го порядку як з буквеними (9), так і числовими коефіцієнтами (13).

1. Утворимо з коефіцієнтів многочлена Фур'є 2-го порядку (9) такий вектор-рядок:

$$\vec{C} = [c_0 \quad c_1 \quad b_1 \quad c_2 \quad b_2] = [c_j, j = \overline{0,4}] \quad (19)$$

та назовемо його рядком коефіцієнтів многочлена Фур'є 2-го порядку, тобто рядком коефіцієнтів многочлена Фур'є. Транспонувавши його, отримаємо такий вектор-стовпець:

$$\vec{C}^T = [c_0 \quad c_1 \quad b_1 \quad c_2 \quad b_2]^T = [c_j^T, j = \overline{0,4}], \quad (20)$$

який назовемо стовпцем коефіцієнтів многочлена Фур'є 2-го порядку, тобто стовпцем коефіцієнтів многочлена Фур'є. Утворимо в многочлені (9) з множників при коефіцієнтах $\vec{C}^T = [c_j^T, j = \overline{0,4}]$ такий вектор-рядок:

$$\vec{\Phi}^2[\alpha] = [1 \quad \cos(\alpha) \quad \sin(\alpha) \quad \cos(2\alpha) \quad \sin(2\alpha)] = [\varphi_j[\alpha], j = \overline{0,4}] \quad (21)$$

та назовемо його рядком Фур'є 2-го порядку, тобто рядком Фур'є.

З урахуванням виразів (20) та (21) і правила множення матриць (тобто, множення рядка на стовпець), запишемо многочлен (9) у такому вигляді:

$$V^2[\alpha] = \bar{\Phi}^2[\alpha] \times \bar{C}^T = \sum_{j=0}^4 \varphi_{p,j}[\alpha] \cdot c_j^T = \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{vmatrix} \quad (22)$$

$$= |1 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \cos(2 \cdot \alpha) \sin(2 \cdot \alpha)| \times \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{vmatrix}.$$

Утворимо з елементів рядка Фур'є, заданого у вигляді виразу (22), обчислених відповідно за значеннями 5-ох вузлових точок $\bar{A} = [\alpha_p, p = \overline{1,5}]$ (див. табл. 2), такі матриці у буквену та числовому записі:

$$\bar{\Phi}^2[\bar{A}] = [\bar{\Phi}_{p,j}^2[\alpha_p], p = \overline{1,5}] = [\varphi_{p,j}[\alpha_p], j = \overline{0,4}; p = \overline{1,5}] = \begin{vmatrix} 1 \cos(\alpha_1) \sin(\alpha_1) \cos(2\alpha_1) \sin(2\alpha_1) \\ 1 \cos(\alpha_2) \sin(\alpha_2) \cos(2\alpha_2) \sin(2\alpha_2) \\ 1 \cos(\alpha_3) \sin(\alpha_3) \cos(2\alpha_3) \sin(2\alpha_3) \\ 1 \cos(\alpha_4) \sin(\alpha_4) \cos(2\alpha_4) \sin(2\alpha_4) \\ 1 \cos(\alpha_5) \sin(\alpha_5) \cos(2\alpha_5) \sin(2\alpha_5) \\ 1 \cos(0) \sin(0) \cos(2 \cdot 0) \sin(2 \cdot 0) \\ 1 \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} \cos 2 \frac{\pi}{4} \sin 2 \frac{\pi}{4} \\ 1 \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} \cos 2 \frac{\pi}{2} \sin 2 \frac{\pi}{2} \\ 1 \cos \frac{3\pi}{4} \sin \frac{3\pi}{4} \cos 2 \frac{3\pi}{4} \sin 2 \frac{3\pi}{4} \\ 1 \cos \pi \sin \pi \cos 2\pi \sin 2\pi \end{vmatrix} \Rightarrow \quad (23)$$

яка після виконання дій над тригонометричними виразами матиме такий вигляд:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 1 & 0,7071 & 0,7071 & 0,0 & 1,0 \\ 1 & 0,0 & 1,0 & -1,0 & 0,0 \\ 1 & -0,7071 & 0,7071 & 0,0 & -1,0 \\ 1 & -1,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \end{vmatrix} \quad (24)$$

та назовемо їх матрицею Фур'є.

Об'єднаємо вузлові значення v_1, \dots, v_5 функції, заданої табл. 2, у вектор-рядок:

$$\bar{V} = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5] = [v_p, p = \overline{1,5}], \quad (25)$$

який назовемо рядком вузлів таблично-заданої функції, тобто вузловим рядком. Транспонувавши його, отримаємо вузловий вектор-стовпець у буквену та числовому записі (див. табл. 2):

$$\bar{V}^T = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5]^T = [v_p^T, p = \overline{1,5}] = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2,0 \\ 1,86 \\ 3,0 \\ 0,72 \\ 1,0 \end{vmatrix}, \quad (26)$$

який назовемо вузловим стовпцем значень таблично-заданої функції, тобто вузловим вектором-стовпцем.

Використовуючи правило множення матриць (тобто, множення квадратної матриці на стовпець), переконаємось в тому, що система рівнянь (11) рівноцінна такому матричному рівнянню:

$$\bar{\Phi}^2[\bar{A}] \times \bar{C}^T = \bar{V}^T \Rightarrow [\bar{\Phi}_{p,j}^2[\alpha_p] \times \bar{C}^T = v_p^T, p = \overline{1,5}] \Rightarrow \Rightarrow \left[\sum_{j=0}^4 \varphi_{p,j}[\alpha_p] \cdot c_j^T = v_p^T, p = \overline{1,5} \right], \quad (27)$$

або – в розгорнутому буквену і числовому записі:

$$\begin{vmatrix} 1 \cos(\alpha_1) \sin(\alpha_1) \cos(2\alpha_1) \sin(2\alpha_1) \\ 1 \cos(\alpha_2) \sin(\alpha_2) \cos(2\alpha_2) \sin(2\alpha_2) \\ 1 \cos(\alpha_3) \sin(\alpha_3) \cos(2\alpha_3) \sin(2\alpha_3) \\ 1 \cos(\alpha_4) \sin(\alpha_4) \cos(2\alpha_4) \sin(2\alpha_4) \\ 1 \cos(\alpha_5) \sin(\alpha_5) \cos(2\alpha_5) \sin(2\alpha_5) \\ 1 \cos(0) \sin(0) \cos(2 \cdot 0) \sin(2 \cdot 0) \\ 1 \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} \cos 2 \frac{\pi}{4} \sin 2 \frac{\pi}{4} \\ 1 \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} \cos 2 \frac{\pi}{2} \sin 2 \frac{\pi}{2} \\ 1 \cos \frac{3\pi}{4} \sin \frac{3\pi}{4} \cos 2 \frac{3\pi}{4} \sin 2 \frac{3\pi}{4} \\ 1 \cos \pi \sin \pi \cos 2\pi \sin 2\pi \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{vmatrix} \Rightarrow \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 1 & 0,7071 & 0,7071 & 0,0 & 1,0 \\ 1 & 0,0 & 1,0 & -1,0 & 0,0 \\ 1 & -0,7071 & 0,7071 & 0,0 & -1,0 \\ 1 & -1,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2,0 \\ 1,86 \\ 3,0 \\ 0,72 \\ 1,0 \end{vmatrix}. \quad (28)$$

Отже, для розрахунку коефіцієнтів інтерполянти періодичної таблично-заданої функції (див. табл. 2), потрібно виконати такі дії:

- за значеннями вузлових точок обчислити матрицю Фур'є 2-го порядку (24);
- за значеннями вузлів таблично-заданої функції сформувати вектор-стовпець вузлів інтерполяції (26);
- розв'язати лінійну систему алгебричних рівнянь (28).

Результатом розв'язання системи (28) є її корені, що водночас є числовими коефіцієнтами многочлена Фур'є 2-го порядку:

$$\bar{C}^T = \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ b_1 \\ c_2 \\ b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,1534 \\ -1,50 \\ 0,1931 \\ -1,6534 \\ 1,6307 \end{vmatrix}. \quad (29)$$

2. Нехай задано значення вузлової точки $\alpha' = 40^\circ = 2\pi/9$. Потрібно обчислити інтерпольоване значення функції у заданій точці.

За виразом (21) утворимо такий рядок Фур'є 2-го порядку:

$$\bar{\Phi}^2 \left[\frac{2\pi}{9} \right] = \left| 1 \cos \frac{2\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} \cos 2 \frac{2\pi}{9} \sin 2 \frac{2\pi}{9} \right|. \quad (30)$$

З урахуванням значень коефіцієнтів многочлена Фур'є 2-го порядку (29) за виразом (22) обчислимо інтерпольоване значення функції у заданій точці:

$$V^2[2\pi/9] = \bar{\Phi}^2[0,69813] \times \bar{C}^T = \begin{vmatrix} 1,1534 \\ -1,50 \\ 0,1931 \\ -1,6534 \\ 1,6307 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1,1534 \\ -1,50 \\ 0,1931 \\ -1,6534 \\ 1,6307 \end{vmatrix} = 1,4473. \quad (31)$$

3. Нехай задано проміжок вузлових точок $0 \leq \alpha' \leq 2\pi/3$. Потрібно обчислити інтерпольовані значення функції на заданому проміжку з кроком $\Delta\alpha' = \pi/9$.

Для заданого проміжку вузлових точок $\bar{A}' = [\alpha'_p, p = \overline{1,7}]$ за виразом (23) утворимо таку матрицю Фур'є 2-го порядку:

$$\bar{A}' = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{9} \\ \frac{2\pi}{9} \\ \frac{\pi}{3} \\ \frac{4\pi}{9} \\ \frac{5\pi}{9} \\ \frac{2\pi}{3} \\ \frac{\pi}{2} \\ \frac{2\pi}{3} \\ \frac{\pi}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,0 \\ 0,3491 \\ 0,6981 \\ 1,3963 \\ 1,7453 \\ 2,0944 \end{vmatrix}; \quad \bar{\Phi}^2[\bar{A}'] = \begin{vmatrix} 1 \cos(0) \sin(0) \cos(2 \cdot 0) \sin(2 \cdot 0) \\ 1 \cos \frac{\pi}{9} \sin \frac{\pi}{9} \cos 2 \frac{\pi}{9} \sin 2 \frac{\pi}{9} \\ 1 \cos \frac{2\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} \cos 2 \frac{2\pi}{9} \sin 2 \frac{2\pi}{9} \\ 1 \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} \cos 2 \frac{\pi}{3} \sin 2 \frac{\pi}{3} \\ 1 \cos \frac{4\pi}{9} \sin \frac{4\pi}{9} \cos 2 \frac{4\pi}{9} \sin 2 \frac{4\pi}{9} \\ 1 \cos \frac{5\pi}{9} \sin \frac{5\pi}{9} \cos 2 \frac{5\pi}{9} \sin 2 \frac{5\pi}{9} \\ 1 \cos \frac{2\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3} \cos 2 \frac{2\pi}{3} \sin 2 \frac{2\pi}{3} \end{vmatrix}, \quad (32)$$

яка після виконання дій над тригонометричними виразами матиме такий вигляд:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 1 & 0,9397 & 0,3420 & 0,7660 & 0,6428 \\ 1 & 0,7660 & 0,6428 & 0,1736 & 0,9848 \\ 1 & 0,5 & 0,8660 & -0,5 & 0,8660 \\ 1 & 0,1736 & 0,9848 & -0,9397 & 0,3420 \\ 1 & -0,1736 & 0,9848 & -0,9397 & -0,3420 \\ 1 & -0,5 & 0,8660 & -0,5 & -0,8660 \end{vmatrix}. \quad (33)$$

За матричним виразом (27) обчислимо інтерпольовані значення функції на заданому проміжку вузлових точок, отримаємо

$$\bar{\Phi}^n[\bar{A}] \times \bar{C}^T = \bar{V}^T \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 1 & 0,9397 & 0,3420 & 0,7660 & 0,6428 \\ 1 & 0,7660 & 0,6428 & 0,1736 & 0,9848 \\ 1 & 0,5 & 0,8660 & -0,5 & 0,8660 \\ 1 & 0,1736 & 0,9848 & -0,9397 & 0,3420 \\ 1 & -0,1736 & 0,9848 & -0,9397 & -0,3420 \\ 1 & -0,5 & 0,8660 & -0,5 & -0,8660 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1,1534 \\ -1,50 \\ 0,1931 \\ -1,6534 \\ 1,6307 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,0 \\ -0,4085 \\ 1,4473 \\ 2,8096 \\ 3,1946 \\ 2,6001 \\ 1,4852 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Отже, наведено математичне формулювання задачі інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій у матричному вигляді, що значно спрощує як їх подання (компактність запису), розуміння сутності, так і матричний метод розрахунку.

4. Формалізація задачі інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій. Нагадаємо, формалізація (англ. *Formalization*) – метод логіки; у математичній логіці це процес подання інформації про об'єкт, процес, явище в формалізованому вигляді; метод подання змістової теорії як числення. Полягає в заміні всіх змістових тверджень відповідними їм послідовностями символів або формулами [7, 28, 34, 37, 53].

Узагальнимо викладені вище положення на періодичної таблично-задану функцій, задану її значеннями у P вузлах інтерполяції (де P – ціле додатне число, $P \geq 3$ вузлів), тобто на функцію, задану табл. 7.

Табл. 7. Загальний вигляд таблично-заданої функції для P вузлів інтерполяції / General view of the table-given function for P interpolation nodes

№ вузла	1	2	...	p	...	P
α , рад	α_1	α_2	...	α_p	...	α_P
V , од.	v_1	v_2	...	v_p	...	v_P

1. Інтерполанту для цієї таблично-заданої функції будемо шукати у вигляді многочлена Фур'є (1). Вважаючи, що $2n+1 = P$, то в цьому випадку кількість його коефіцієнтів, як видно з виразу (1), співпадає з кількістю вузлів таблично-заданої функції. Запишемо многочлен Фур'є n -го порядку в такому вигляді:

$$V = V^n[\alpha] = c_0 + \sum_{j=1}^n (c_j \cdot \cos(j \cdot \alpha) + b_j \cdot \sin(j \cdot \alpha)). \quad (35)$$

Застосувавши його послідовно до p -го вузла таблично-заданої функції (табл. 7), отримаємо таку систему рівнянь з P невідомими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} c_0 + \sum_{j=1}^n (c_j \cdot \cos(j \cdot \alpha_0) + b_j \cdot \sin(j \cdot \alpha_0)) = v_0; \\ c_0 + \sum_{j=1}^n (c_j \cdot \cos(j \cdot \alpha_1) + b_j \cdot \sin(j \cdot \alpha_1)) = v_1; \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_0 + \sum_{j=1}^n (c_j \cdot \cos(j \cdot \alpha_p) + b_j \cdot \sin(j \cdot \alpha_p)) = v_p. \end{cases} \quad (36)$$

в якій значення вузлових точок $\bar{A} = [\alpha_p, p = \overline{1, P}]$ і вузловий вектор-стовпець значень функції $\bar{V}^T = [v_p^T, p = \overline{1, P}]$ є відомими числами з табл. 7. Розв'язавши цю систему рівнянь (наприклад, методом Гауса), отримаємо її корені, які водночас є числовими значеннями коефіцієнтів $\bar{C}^T = [c_j^T, j = \overline{0, 2n}]$ інтерполанти (35). Підставивши цей розв'язок у вираз інтерполанти з буквеними коефіцієнтами (35), отримуємо для періодичної таблично-заданої функції аналітичний вираз інтерполанти з числовими коефіцієнтами.

2. Сформулюємо наведену вище послідовність дій у термінах матричної алгебри. Утворимо вектор-стовпець

коефіцієнтів многочлена Фур'є n -го порядку (35), тобто стовпець коефіцієнтів многочлена Фур'є:

$$\bar{C}^T = [c_j^T, j = \overline{0, 2n}] \Rightarrow |c_0 \ c_1 \ b_1 \ \dots \ c_{2n-1} \ b_{2n}|^T = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ b_1 \\ \dots \\ c_{2n-1} \\ b_{2n} \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Утворимо з множників при коефіцієнтах $\bar{C}^T = [c_j^T, j = \overline{0, 2n}]$ у многочлені (35) вектор-рядок Фур'є n -го порядку, тобто такий рядок Фур'є:

$$\bar{\Phi}^n[\alpha] = [\varphi_j[\alpha], j = \overline{0, 2n}] \Rightarrow |1 \ \cos(\alpha) \ \sin(\alpha) \ \dots \ \cos((2n-1) \cdot \alpha) \ \sin(2n \cdot \alpha)|. \quad (38)$$

З урахуванням виразів (37) та (38) і правила множення матриць (тобто, множення рядка на стовпець), запишемо многочлен (35) у такому вигляді:

$$V = \bar{\Phi}^n[\alpha] \times \bar{C}^T = \sum_{j=0}^{2n} \varphi_j[\alpha] \cdot c_j^T \Rightarrow |1 \ \cos(\alpha) \ \sin(\alpha) \ \dots \ \cos((2n-1) \cdot \alpha) \ \sin(2n \cdot \alpha)| \times \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ b_1 \\ \dots \\ c_{2n-1} \\ b_{2n} \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Утворимо з елементів рядка Фур'є, заданого у вигляді виразу (38), обчислених відповідно за значеннями вузлових точок $\bar{A} = [\alpha_p, p = \overline{1, P}]$ (див. табл. 7), таку матрицю Фур'є n -го порядку в буквенному записі:

$$\bar{\Phi}^n[\bar{A}] = [\bar{\Phi}_p^n[\alpha_p], p = \overline{1, P}] = [\varphi_{p,j}[\alpha_p], j = \overline{0, 2n}; p = \overline{1, P}] = \begin{pmatrix} |1 \ \cos(\alpha_1) \ \sin(\alpha_1) \ \dots \ \cos((2n-1) \cdot \alpha_1) \ \sin(2n \cdot \alpha_1)| \\ |1 \ \cos(\alpha_2) \ \sin(\alpha_2) \ \dots \ \cos((2n-1) \cdot \alpha_2) \ \sin(2n \cdot \alpha_2)| \\ |1 \ \cos(\alpha_3) \ \sin(\alpha_3) \ \dots \ \cos((2n-1) \cdot \alpha_3) \ \sin(2n \cdot \alpha_3)| \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ |1 \ \cos(\alpha_{p-1}) \ \sin(\alpha_{p-1}) \ \dots \ \cos((2n-1) \cdot \alpha_{p-1}) \ \sin(2n \cdot \alpha_{p-1})| \\ |1 \ \cos(\alpha_p) \ \sin(\alpha_p) \ \dots \ \cos((2n-1) \cdot \alpha_p) \ \sin(2n \cdot \alpha_p)| \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Об'єднаємо значення v_1, \dots, v_P функції, заданої табл. 7, у вектор-стовпець вузлів інтерполяції, тобто вузловий вектор-стовпець:

$$\bar{V}^T = [v_p^T, p = \overline{1, P}] \Rightarrow |v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots \ v_{p-1} \ v_p|^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \dots \\ v_{p-1} \\ v_p \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Використовуючи правило множення матриць (тобто, множення квадратної матриці на стовпець), переконаємось в тому, що система рівнянь (36) рівноцінна такому матричному рівнянню:

$$\bar{\Phi}^n[\bar{A}] \times \bar{C}^T = \bar{V}^T \Rightarrow [\bar{\Phi}_p^n[\alpha_p] \times \bar{C}^T = v_p^T, p = \overline{1, P}] \Rightarrow \Rightarrow \left[\sum_{j=0}^{2n} \varphi_{p,j}[\alpha_p] \cdot c_j^T = v_p^T, p = \overline{1, P} \right], \quad (42)$$

Для розрахунку значень коефіцієнтів інтерполанти таблично-заданої функції (див. табл. 7), потрібно виконати такі дії:

- за значеннями вузлових точок обчислити матрицю Фур'є n -го порядку (40);
- за значеннями вузлів таблично-заданої функції сформулювати вектор-стовпець вузлів інтерполяції (41);
- розв'язати лінійну систему алгебричних рівнянь (43).

Результатом розв'язання системи (43) є її корені, що водночас є числовими коефіцієнтами многочлена Фур'є (37), які необхідно підставити у вираз (39), внаслідок чого отримаємо аналітичний вираз інтерполанти у виг-

ляді многочлена Фур'є n -го порядку, поданої у матричному записі.

Отже, наведено формалізований опис задачі інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій, заданих многочленом Фур'є n -го порядку як у скалярному, так і в матричному вигляді. З'ясовано, що формалізація задачі інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій в матричному вигляді, порівняно зі скалярним, значно спрощує як їх подання (компактність запису), розуміння сутності, так і метод розрахунку.

5. Матричний запис процедур інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій. У практиці інженерних розрахунків часто потрібно мати вирази для реалізації процедур інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій многочленом Фур'є n -го порядку у матричному записі, які безпосередньо містять інформацію про таблично-задану функції. Спробуємо їх вивести.

1. Розрахунок коефіцієнтів інтерполянти для періодичної таблично-заданої функції. Помноживши ліву і праву частини рівняння (42) зліва на матрицю, обернену до матриці Фур'є, отримуємо:

$$\overline{\Phi}[\overline{A}]^{-1} \times \overline{\Phi}[\overline{A}] \times \overline{C}^T = \overline{\Phi}[\overline{A}]^{-1} \times \overline{V}^T. \quad (43)$$

Оскільки добуток $\overline{\Phi}[\overline{A}]^{-1} \times \overline{\Phi}[\overline{A}] = \overline{E}$, тобто є одиничною матрицею, то, з урахуванням виразу (43), отримуємо

$$\overline{C}^T = \overline{\Phi}[\overline{A}]^{-1} \times \overline{V}^T, \quad (44)$$

де $\overline{A} = [\alpha_p, p = \overline{1, P}]$ – значення вузлових точок таблично-заданої функції.

Отже, коефіцієнти інтерполянти для періодичної таблично-заданої функції можна отримати не тільки шляхом розв'язання лінійної системи рівнянь (36), наприклад методом Гауса, чи рівноцінного їй матричного рівняння (42), але й шляхом послідовного виконання таких дій:

- обчислення матриці Фур'є (40), яку визначено за значеннями вузлових точок таблично-заданої функції;
- формування вузлового вектора-стовпця значень таблично-заданої функції (41);
- обчислення матриці, оберненої до матриці Фур'є;
- множення оберненої матриці Фур'є на вектор-стовпець вузлів інтерполяції (44).

2. Обчислення інтерпольованого значення функції у заданій точці. Підставивши (44) у вираз (39), отримуємо вираз для обчислення інтерпольованого значення функції в матричному записі:

$$V = V[\alpha'] = \overline{\Phi}[\alpha'] \times \overline{\Phi}[\overline{A}]^{-1} \times \overline{V}^T. \quad (45)$$

З матричного виразу (45) видно, що інтерпольоване значення функції за довільного значення аргумента визначають добутком трьох матриць:

- вектора-рядка Фур'є, обчисленого за прийнятим значенням аргумента;
- матриці, оберненої до матриці Фур'є, яку визначено за значеннями вузлових точок таблично-заданої функції;
- вузлового вектора-стовпця, який містить значення вузлів інтерполяції.

3. Обчислення інтерпольованих значень функції у заданому проміжку зміни аргумента. Зазвичай, проміжок зміни аргумента задають його початковим (α_n) і кінцевим (α_k) значеннями, а також кроком ($\Delta\alpha$) набуття проміжних значень. Кількість вузлових точок визначають за такою формулою:

$$m = \frac{\alpha_k - \alpha_n}{\Delta\alpha}, \quad (46)$$

а значення самих аргументів визначають за такою формулою:

$$\overline{A}' = [\alpha'_i = \alpha_{\text{поч}} + i \cdot \Delta\alpha, i = \overline{0, m}]. \quad (47)$$

Отже, для обчислення інтерпольованих значень функції у заданому проміжку зміни аргумента за аналогією з виразом (45) отримуємо

$$V[\overline{A}'] = \overline{\Phi}[\overline{A}'] \times \overline{\Phi}[\overline{A}]^{-1} \times \overline{V}^T, \quad (48)$$

де
$$\overline{\Phi}[\overline{A}'] = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\alpha'_0) & \sin(\alpha'_0) & \dots & \cos((2n-1) \cdot \alpha'_0) & \sin(2n \cdot \alpha'_0) \\ 1 & \cos(\alpha'_1) & \sin(\alpha'_1) & \dots & \cos((2n-1) \cdot \alpha'_1) & \sin(2n \cdot \alpha'_1) \\ 1 & \cos(\alpha'_2) & \sin(\alpha'_2) & \dots & \cos((2n-1) \cdot \alpha'_2) & \sin(2n \cdot \alpha'_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos(\alpha'_{m-1}) & \sin(\alpha'_{m-1}) & \dots & \cos((2n-1) \cdot \alpha'_{m-1}) & \sin(2n \cdot \alpha'_{m-1}) \\ 1 & \cos(\alpha'_m) & \sin(\alpha'_m) & \dots & \cos((2n-1) \cdot \alpha'_m) & \sin(2n \cdot \alpha'_m) \end{pmatrix} \quad (49)$$

З матричного виразу (49) видно, що інтерпольовані значення функції у заданому проміжку зміни аргумента визначають добутком трьох матриць:

- матриці Фур'є, обчисленої за заданим проміжком зміни аргумента;
- матриці, оберненої до матриці Фур'є, яку визначено за значеннями вузлових точок таблично-заданої функції;
- вузлового вектора-стовпця, який містить значення вузлів інтерполяції.

4. Результати інтерполяції таблично-заданої функції многочленом Фур'є n -го порядку. Продемонструємо викладене вище на конкретних прикладах. Розрахунки виконаємо в середовищі Excel, які за аналогією можна успішно реалізувати й в будь-якому іншому обчислювальному середовищі.

Виконаємо відповідні розрахунки за даними, наведеними в табл. 1, 2 і 3. Результати розрахунку коефіцієнтів інтерполянти 1-го, 2-го і 3-го порядків, а також обчислені інтерпольовані значення функції у заданій точці ($\alpha = 2\pi/9$) наведено відповідно у вікнах 1, 2 і 3.

Вікно 1. Результати інтерполяції таблично-заданої функції многочленом Фур'є 1-го порядку (див. табл. 1) / The results of interpolation of the table-given function by the Fourier polynomial of the 1st order (see Table 1)

1. Розрахунок коефіцієнтів інтерполянти 1-го порядку / Coefficients calculation of the interpolant of 1st order

\overline{A}	$\overline{\Phi}[\overline{A}]$	\overline{C}^T	\overline{V}^T
	1 $\cos(\alpha)$ $\sin(\alpha)$		
0,0	1 1 0	c_0	-2,0
1,5708	1 0 1	c_1	3,0
3,1416	1 -1 0	b_1	1,0

$\Delta = 0,50$	$\overline{\Phi}[\overline{A}]^{-1}$	\overline{C}^T	Перевірка
	0,5 0 0,5	-0,50	-2,0
	0,5 0 -0,5	-1,50	3,0
	-0,5 1 -0,5	3,50	1,0

2. Обчислення інтерпольованого значення функції у заданій точці / Calculation of the interpolated value of the function at a given point

α'	$\overline{\Phi}[\alpha']$	$\overline{\Phi}[\overline{A}]^{-1}$
0,69813	1 0,76604 0,64279	0,5 0 0,5
		0,5 0 -0,5
		-0,5 1 -0,5

$\overline{\Phi}[\alpha'] \times \overline{\Phi}[\overline{A}]^{-1}$	\overline{V}^T	$V[\alpha']$
0,5616 0,64 -0,2044	-2,0	0,6007
	3,0	
	1,0	

Вікно 3. Результати інтерполяції таблично-заданої функції многочленом Фур'є 2-го порядку (див. табл. 2) / The results of interpolation of the table-given function by the Fourier polynomial of the 2nd order (see Table 2)

1. Розрахунок коефіцієнтів інтерполянти 2-го порядку / Coefficients calculation of the interpolant of 2nd order

\bar{A}	$\bar{\Phi}[\bar{A}]$					\bar{C}^T	\bar{V}^T
	1	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\cos(2\alpha)$	$\sin(2\alpha)$		
0,0	1	1,0	0,0	1,0	0,0	c_0	-2,0
0,7854	1	0,7071	0,7071	0,0	1,0	c_1	1,86
1,5708	1	0,0	1,0	-1,0	0,0	b_1	3,0
2,3562	1	-0,7071	0,7071	0,0	-1,0	c_2	0,72
3,1416	1	-1,0	0,0	1,0	0,0	b_2	1,0
$\Delta=$ 0,6036	$\bar{\Phi}[\bar{A}]^{-1}$					\bar{C}^T	Перевірка
	0,8536	-1,2071	1,7071	-1,2071	0,8536	1,1534	-2,00
	0,5	0,0	0,0	0,0	-0,5	-1,50	1,86
	-1,2071	2,4142	-2,4142	2,4142	-1,2071	0,1931	3,00
	-0,3536	1,2071	-1,7071	1,2071	-0,3536	-1,6534	0,72
	-0,3536	0,5	0,0	-0,5	0,3536	1,6307	1,00

2. Обчислення інтерпольованого значення функції у заданій точці / Calculation of the interpolated value of the function at a given point

α'	$\bar{\Phi}^2[\alpha']$					$\bar{\Phi}[\bar{A}]^{-1}$					\bar{V}^T	$V^2[\alpha']$
0,69813	1	0,76604	0,6428	0,1736	0,9848	0,8536	-1,2071	1,7071	-1,2071	0,8536	-2,0	1,4473
						0,5	0,0	0,0	0,0	-0,5	1,86	
						-1,2071	2,4142	-2,4142	2,4142	-1,2071	3,0	
						-0,3536	1,2071	-1,7071	1,2071	-0,3536	0,72	
						-0,3536	0,5	0,0	-0,5	0,3536	1,0	
	$\bar{\Phi}^2[\alpha'] \times \bar{\Phi}[\bar{A}]^{-1}$					\bar{V}^T						
	0,0511	1,0467	-0,1412	0,0619	-0,0186	-2,0						
						1,86						
						3,0						
						0,72						
						1,0						

Вікно 4. Результати інтерполяції таблично-заданої функції многочленом Фур'є 3-го порядку (див. табл. 3) / The results of interpolation of the table-given function by the 3rd-order Fourier polynomial (see Table 3)

1. Розрахунок коефіцієнтів інтерполянти 3-го порядку / Coefficients calculation of the interpolant of 3rd order

\bar{A}	$\bar{\Phi}[\bar{A}]$							\bar{C}^T	\bar{V}^T
	1	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\cos(2\alpha)$	$\sin(2\alpha)$	$\cos(3\alpha)$	$\sin(3\alpha)$		
0,0	1	1,0	0,0	1,0	0,0	1,0	0,0	c_0	-2,0
0,5236	1	0,8660	0,5	0,5	0,8660	0,0	1,0	c_1	-1,14
1,0472	1	0,5	0,8660	-0,5	0,8660	-1,0	0,0	b_1	1,49
1,5708	1	0,0	1,0	-1,0	0,0	0,0	-1,0	c_2	3,0
2,0944	1	-0,5	0,8660	-0,5	-0,8660	1,0	0,0	b_2	2,11
2,6180	1	-0,8660	0,5	0,5	-0,8660	0,0	1,0	c_3	0,24
3,1416	1	-1,0	0,0	1,0	0,0	-1,0	0,0	b_3	1,0
$\Delta=$ 2,6805	$\bar{\Phi}[\bar{A}]^{-1}$							\bar{C}^T	Перевірка
	1,8660	-5,0981	8,8301	-10,1962	8,8301	-5,0981	1,8660	3,9222	-2,0
	0,7887	-0,7887	0,7887	0,0	-0,7887	0,7887	-0,7887	-1,7666	-1,14
	-2,9434	8,8301	-14,7169	17,6603	-14,7169	8,8301	-2,9434	-5,0037	1,49
	-1,3660	5,0981	-8,8301	10,1962	-8,8301	5,0981	-1,3660	-4,4222	3,0
	-0,7887	1,3660	-0,7887	0,0	0,7887	-1,3660	0,7887	0,9699	2,11
	-0,2887	0,7887	-0,7887	0,0	0,7887	-0,7887	0,2887	0,2666	0,24
	0,2887	-1,3660	2,9434	-3,7321	2,9434	-1,3660	0,2887	0,3407	1,0

2. Обчислення інтерпольованого значення функції у заданій точці / Calculation of the interpolated value of the function at a given point

α'	$\bar{\Phi}^3[\alpha']$							$\bar{\Phi}[\bar{A}]^{-1}$							\bar{V}^T	$V^3[\alpha']$
0,69813	1	0,7660	0,6428	0,1736	0,9848	-0,5000	0,8660	1,8660	-5,0981	8,8301	-10,1962	8,8301	-5,0981	1,8660	-2,0	-0,2984
								0,7887	-0,7887	0,7887	0,0	-0,7887	0,7887	-0,7887	-1,14	
								-2,9434	8,8301	-14,7169	17,6603	-14,7169	8,8301	-2,9434	1,49	
								-1,3660	5,0981	-8,8301	10,1962	-8,8301	5,0981	-1,3660	3,0	
								-0,7887	1,3660	-0,7887	0,0	0,7887	-1,3660	0,7887	2,11	
								-0,2887	0,7887	-0,7887	0,0	0,7887	-0,7887	0,2887	0,24	
								0,2887	-1,3660	2,9434	-3,7321	2,9434	-1,3660	0,2887	1,0	
	$\bar{\Phi}^3[\alpha'] \times \bar{\Phi}[\bar{A}]^{-1}$							\bar{V}^T								
	-0,0413	0,6269	0,6078	-0,3059	0,1642	-0,0667	0,0150	-2,0								
								-1,14								
								1,49								
								3,0								
								2,11								
								0,24								
								1,0								

Отже, наведено матричний запис процедур інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій многочленом Фур'є, які безпосередньо містять інформацію про таблично-задану функцій. Наведено матричні вирази для розрахунку коефіцієнтів інтерполянти та обчислення інтерпольованого значення функції у заданій точці, а також для обчислення інтерпольованих значень функції у заданому проміжку зміни аргумента. З'ясовано, що запис відповідних процедур інтерполяції в термінах матричної алгебри, порівняно зі скалярним, значно спрощує як їх подання (компактність запису), розуміння сутності, так і програмну реалізацію. Наведено результати інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій многочленом Фур'є 1-го, 2-го і 3-го порядків.

Обговорення результатів дослідження. Багатьом дослідникам у своїх наукових і інженерних розрахунках часто доводиться оперувати наборами даних, отриманими експериментально чи відібраних випадково з певної їх множини. На підставі цих даних потрібно побудувати таку аналітичну функцію, яка б з високою точністю давала можливість обчислювати відповідні її значення в заданих значеннях аргумента.

У роботі [48] для збереження форми кінчних і періодичних даних автори пропонують клас раціональних кубічних тригонометричних фрактальних інтерполяційних функцій RCTFIFs (англ. *Rational Cubic Trigonometric Fractal Interpolation Functions*), які є узагальненою фрактальною версією класичного раціонального кубічного тригонометричного поліноміального сплайна, форма яких і є кубічними тригонометричними поліномами з чотирма параметрами форми в кожному підінтервалі. Ними проведено аналіз конвергенції запропонованого RCTFIFs, які слідує обмеженій природі набору даних, коли вони знаходяться зверху над прямою лінією або обмежені верхньою та нижньою межами. Також виведено достатні умови для збереження додатності та монотонності даних інтерполяції.

У роботі [40] автори наводять новий підхід до побудови двовимірної раціональної інтерполяції над триангуляцією на підставі розсіяних даних у паралельних лініях. Основна перевага цього методу порівняно з наявними методами інтерполяції полягає в двох моментах: функція інтерполяції виконується простим і явним математичним поданням через параметр α ; форму поверхні інтерполяції можна змінити за допомогою параметра для незмінних даних інтерполяції. Окрім цього, для керування формою поверхонь автори використовують локальний метод контролю форми. У окремому випадку досліджується метод "контролю значень барицентру", а також наведено чисельні приклади, щоб показати ефективність запропонованого методу.

У роботі [54] автори розглядають двовимірний раціональний бікубічний інтерполяційний сплайн BRIS (англ. *Bivariate Rational Bicubic Interpolating Spline*) з біквадратичним знаменником і шістьма параметрами форми, який будується в області прямокутника. Також автори обговорюють неперервний стан C^1 BRIS. Доведено його обмеженість та оцінено похибку відхилення. У випадку рівновіддалених вузлів подано матричний вираз та симетрію BRIS. Наведено деякі властивості основи BRIS, а також багато прикладів, щоб проілюструвати вплив параметрів форми на форму поверхні BRIS.

У роботі [32] автори роблять внесок у графічне відображення даних, коли вони додатні. Дані мають бути

такими, щоб їх візуальне відображення виглядало гладким і приємним, їх додатна форма зберігалася всюди, а витрати на обчислення були економними. Для цієї мети автори використовували кусково-раціональну кубічну функцію в її найбільш загальному вигляді. Свій метод вони спочатку реалізували для одновимірних даних, а потім розширили до інтерполяційної раціональної бікубічної форми для даних, розташованих у прямокутній сітці. Також ними розроблено прості достатні умови на вільні параметри в описі раціональної функції для візуалізації додатних даних у вигляді додатних кривих і поверхонь.

У роботі [55] автори використовують вид C^1 раціональні інтерполяційні сплайни в одному та двох вимірах для створення кривих і поверхонь з контролем області даних. Прості достатні обмеження, що залежать від даних, вони наводять на параметри локального керування для створення C^1 інтерполяційних кривих, що знаходяться строго між двома заданими кусково-лінійними кривими і C^1 інтерполяційні поверхні, які водночас знаходяться строго між двома заданими кусково-бікубічними лінійними інтерполяційними поверхнями.

У роботі [56] автори мають справу з контролем області C^2 інтерполяційних кривих і поверхонь за допомогою класу раціональних інтерполяційних сплайнів у одному і двох вимірах. Прості достатні залежні від даних обмежень наводяться на локальні контрольні параметри для генерування інтерполяційних кривих C^2 , що знаходяться строго між двома заданими кусково-лінійними кривими, і інтерполяційними поверхнями C^2 , які водночас знаходяться строго між двома заданими кусково-білайнерними змішувальними квінтичними інтерполяційними поверхнями. Окрім цього, вони також розробили алгоритм щодо застосування сплайнових поверхонь раціональної інтерполяції C^2 для інтерполяції зображення.

У роботі [13] автори обговорюють інтерполяцію із збереженням додатності C^2 з використанням раціонального кватричного сплайну для додатних даних. Цей сплайн має три різні параметри, а саме – α_i , β_i і γ_i . Запропонований раціональний сплайн може досягти C^2 неперервності без потреби розв'язувати тридіагональні системи лінійних рівнянь, на відміну від деяких інших сплайнів, які їх потребують. Достатню умову наводять на підставі одного параметра, тоді як інші два параметри є вільними, за допомогою яких користувач може інтерполювати остаточну форму додатної інтерполяційної кривої. Ці умови гарантують отримання всюди додатної інтерполяційної кривої. Також детально ведеться обговорення отриманих результатів порівняно з наявними схемами розрахунку. З графічних і числових результатів видно, що запропонована схема є кращою, ніж відомі схеми, оскільки вона має додатковий вільний параметр для контролю додатної кривої інтерполяції, зберігаючи C^2 неперервність.

У роботі [25] автори розглядають кватричні параметричні інтерполяційні сплайн-криві Ерміта, які формуються за допомогою кватричних базисних функцій Ерміта з параметрами. Вони також досліджують вибір параметрів сплайн-кривих і надають критерії для кривої з найкоротшою довжиною дуги та найплавнішою кривою. Коли встановлені умови інтерполяції, запропоновані сплайн-криві не тільки досягають C^1 -неперервності, але також можуть реалізувати контроль форми шля-

хом вибору відповідних параметрів, які усувають слабкість класичних кубічних інтерполяційних сплайн-кривих Ерміта.

Отже, внаслідок проведеного дослідження отримано такі *основні наукові результати*: з'ясовано загальні положення інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій многочленом Фур'є n -го порядку в довільно розташованих вузлах інтерполяції; наведено алгоритм розв'язання, математичне формулювання та формалізацію задачі інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій; розглянуто особливості матричного запису процедур інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій; наведено результати інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій многочленом Фур'є n -го порядку.

Наукова новизна отриманих результатів дослідження – вперше розроблено метод розрахунку коефіцієнтів інтерполянти, заданої многочленом Фур'є n -го порядку, сутність якого полягає в обчисленні добутку матриці, оберненої до матриці Фур'є, яку визначають за значеннями вузлових точок таблично-заданої функції, на вектор-стовпець, який містить значення вузлів інтерполяції.

Практична значущість результатів дослідження – розроблені алгоритми та методи інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій від аргумента α з використанням многочлена Фур'є n -го порядку можна використати в практиці як математичного моделювання, так і комп'ютерної графіки для опису складних геометричних поверхонь.

Висновок / Conclusions

Розроблено методологію інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій многочленом Фур'є n -го порядку в довільно розташованих вузлах інтерполяції, що дає можливість обчислювати їх проміжні значення між вузлами інтерполяції, а також чисельно їх диференціювати. За результатами дослідження можна зробити такі основні висновки.

1. Розглянуто деякі особливості інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій многочленом Фур'є n -го порядку, а саме: наведено алгоритм розв'язання та математичне формулювання задачі інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій; наведено формалізований запис задачі інтерполяції, матричний запис процедур інтерполяції для певних значень аргумента в довільно розташованих вузлах інтерполяції.

2. Наведено алгоритми розв'язання задачі інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій многочленом Фур'є 1-го, 2-го і 3-го порядків, простота й наочність якого є однією з його переваг, але він незручний для його програмної реалізації. Наведено математичне формулювання задачі інтерполяції періодичних таблично-заданих функцій у термінах матричної алгебри, яке зводиться до виконання таких дій: за відомими з таблиці значеннями вузлових точок потрібно сформулювати, а потім обчислити матрицю Фур'є; за вказаними у таблиці значеннями функції потрібно сформулювати вузловий вектор-стовпець; розв'язати лінійну систему алгебричних рівнянь, коренем якої є числові коефіцієнти многочлена Фур'є n -го порядку.

3. Розроблено метод розрахунку коефіцієнтів інтерполянти, заданої многочленом Фур'є n -го порядку, сутність якого полягає в обчисленні добутку двох матриць – матриці, оберненої до матриці Фур'є, яку визначають за значеннями вузлових точок таблично-заданої функції,

на вектор-стовпець, який містить значення вузлів інтерполяції.

4. На конкретних прикладах продемонстровано особливості розрахунку коефіцієнтів інтерполянт, заданих многочленом Фур'є 1-го, 2-го і 3-го порядків, а також для кожної з них обчислено інтерпольоване значення функції у заданій точці. Розрахунки виконано в середовищі Excel, які за аналогією можна успішно реалізувати й в будь-якому іншому обчислювальному середовищі.

References

1. Andrunyk, V. A., Vysotska, V. A., & Pasichnyk V. V. (Ed.), et al. (2018). *Numerical methods in computer science: textbook*. Issue 2. Lviv: Novy svit-2000, 536 p. [In Ukrainian].
2. Boyko, L. T. (2009). *Fundamentals of numerical methods: textbook*. Dnipropetrovsk: DNU Publishing House, 244 p. [In Ukrainian].
3. Duan, Qi, Zhang, Yunfeng, & Twizell, E. H. (2005). A new C^2 rational interpolation based on function values and constrained control of the interpolant curves. *Applied Mathematics and Computation*, 161(1), 311 p. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.12.030>
4. Duan, Qi, Zhang, Yunfeng, & Twizell, E. H. (2005). A new weighted rational cubic interpolation and its approximation. *Applied Mathematics and Computation*, 168(2), 990 p. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.09.041>
5. Duan, Qi, Zhang, Yunfeng, & Twizell, E. H. (2006). A bivariate rational interpolation and the properties. *Applied Mathematics and Computation*, 179(1), 190 p. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.11.094>
6. Duan, Qi, Zhang, Yunfeng, & Twizell, E. H. (2008). Hermite interpolation by piecewise rational surface. *Applied Mathematics and Computation*, 198(1), 59 p. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.08.050>
7. Filts, R. V. (1994). Calculation of Taylor and Fourier polynomials and their derivatives. Synopsis of lectures on the subject "Mathematical problems of electromechanics" for students. special 1801 "Electromechanics". Lviv: State University "Lviv Polytechnic", 24 p. [In Ukrainian].
8. Filts, R. V., & Kotsyuba, M. V. (1988). The program of natural power interpolation and differentiation of a tabular function of several independent variables. Kyiv, Deposited with RFAP. INB.NAn0223. [In Russian].
9. Filts, R. V., & Kotsyuba, M. V. (1989). Calculation of two-dimensional magnetic fields by the collocation method using the theory of natural interpolation. *Izvestiya vuzov. Electromechanics*, 3, 5–12. [In Russian].
10. Filts, R. V., Kotsyuba, M. V., & Grytsyuk, Yu. I. (1991). Algorithm for computing the Taylor polynomial and its derivatives on a computer. *Izvestia of universities. Electromechanics*, 5, 5–10. [In Russian].
11. Giampietro Allasia, & Cesare Bracco. (2011). Two interpolation operators on irregularly distributed data in inner product spaces. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(7), 1763 p. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2010.04.025>
12. Goodman, T. N. T., & Meek, D. S. (2007). Planar interpolation with a pair of rational spirals. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 201(1), 112 p. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.02.003>
13. Harim, N. A., & Abdul Karim, S. A. (2021). Positivity Preserving Using C^2 Rational Quartic Spline Interpolation. In: Abdul Karim, S. A., Abd Shukur, M. F., Fai Kait, C., Soleimani, H., Sakidin, H. (Eds). Proceedings of the 6th International Conference on Fundamental and Applied Sciences. *Springer Proceedings in Complexity*. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-16-4513-6_46
14. Hrytsiuk, Yu. I. (2014). *Computational methods and models in scientific research: monograph*. Lviv: LSU BZD Publishing House, 288 p. [In Ukrainian].
15. Hrytsiuk, Yu. I. (2022). Comprehensive software quality assessment system. *Scientific Bulletin of UNFU*, 32(2), 81–95. <https://doi.org/10.36930/40320213>

16. Hrytsiuk, Yu. I. (2022). Features of giving preference to the characteristics of the software product quality model. *Scientific Bulletin of UNFU*, 32(3), 79–102. <https://doi.org/10.36930/40320313>
17. Hrytsiuk, Yu. I. (2022). Software quality management system. *Ukrainian Journal of Information Technology*, 4(1), 01–20. <https://doi.org/10.23939/ujit2022.01.001>
18. Hrytsiuk, Yu. I., & Andrushchakevych, O. T. (2018). Means for determining software quality by metric analysis methods. *Scientific Bulletin of UNFU*, 28(6), 159–171. <https://doi.org/10.15421/40280631>
19. Hrytsiuk, Yu. I., & Buchkovska, A. Yu. (2018). Visualization of the results of expert evaluation of software quality using polar diagrams. *Scientific Bulletin of UNFU*, 27(10), 137–145. <https://doi.org/10.15421/40271025>
20. Hrytsiuk, Yu. I., & Dalyavskyy, V. S. (2018). Using Petal Diagram for Visualizing the Results of Expert Evaluation of Software Quality. *Scientific Bulletin of UNFU*, 28(9), 97–106. <https://doi.org/10.15421/411832>
21. Hrytsiuk, Yu. I., & Nemova, E. A. (2018). Management Features Process of Developing Software Requirements. *Scientific Bulletin of UNFU*, 28(8), 161–169. <https://doi.org/10.15421/40280832>
22. Hrytsiuk, Yu. I., & Nemova, E. A. (2018). Peculiarities of Formulation of Requirements to the Software. *Scientific Bulletin of UNFU*, 28(7), 135–148. <https://doi.org/10.15421/40280727>
23. Hrytsiuk, Yu. I., & Zhabych, M. R. (2018). Risk Management of Implementation of Program Projects. *Scientific Bulletin of UNFU*, 28(1), 150–162. <https://doi.org/10.15421/40280130>
24. Hussain, Malik Zawwar, & Muhammad Sarfraz. (2008). Positivity-preserving interpolation of positive data by rational cubics. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 218(2), 446 p. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2007.05.023>
25. Jin Xie, & Xiaoyan Liu. (2021). Adjustable Piecewise Quartic Hermite Spline Curve with Parameters. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021, Article ID 2264871, 6 p. <https://doi.org/10.1155/2021/2264871>
26. Kolesnytskyi, O. K., Arsenyuk, I. R., & Mesyura, V. I. (2017). *Numerical methods: tutorial*. Vinnytsia: VNTU, 130 p. [In Ukrainian].
27. Krylyk, L. V., Bogach, I. V., & Lisovenko, A. I. (2019). *Numerical Methods. Numerical integration of functions: tutorial*. Vinnytsia: VNTU, 74 p. [In Ukrainian].
28. Krylyk, L. V., Bogach, I. V., & Prokopova, M. O. (2013). Computational mathematics. Interpolation and approximation of tabular data: tutorial. Vinnytsia: VNTU, 111 p. [In Ukrainian].
29. Kvetny, R. N., Dementiev, V. Yu., Mashnytskyi, M. O., & Yudin, O. O. (2009). *Difference methods and splines in multidimensional interpolation problems: monograph*. Vinnytsia: Universum-Vinnytsia, 92 p. [In Ukrainian].
30. Kvyetny, R. N., & Bogach, I. V. (2003). Interpolation of a function of two variables by the Lagrange method. *Bulletin of the Vinnytsia Polytechnic Institute*, 6, 365–368. [In Ukrainian].
31. Kvyetny, R. N., Kostrova, K. Yu., & Bogach, I. V. (2005). *Interpolation by self-similar sets: monograph*. Vinnytsia: Universum-Vinnytsia, 100 p. [In Ukrainian].
32. Malik Zawwar Hussain, & Muhammad Sarfraz. (2008). Positivity-preserving interpolation of positive data by rational cubics. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 218(2), 446–458. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2007.05.023>
33. Mamchuk, V. I. (2015). *Numerical methods: tutorial*. Kyiv: National Aviation University, 388 p. [In Ukrainian].
34. Mikhailets, V. A., & Murach, A. A. (2010). *Hörmander spaces, interpolation and elliptic problems*. With a preface by Yu. M. Berzansky. Kyiv: IM NAS of Ukraine, 370 p. [In Russian].
35. Min Hu, & Jieqing Tan. (2006). Adaptive osculatory rational interpolation for image processing. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 195(1-2), 46 p. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.07.011>
36. Moskalets, O. F., & Shutko, V. M. (2010). The method of least squares for splines of odd powers. *Bulletin of Engineering Academy of Ukraine*, 2, 224. [In Ukrainian].
37. Nekrasov, O. N., & Mirmovich, E. G. (2010). Interpolation and approximation of data by polynomials of power, exponential and trigonometric types. *Scientific and educational problems of civil protection*, 4, 23–27. [In Russian].
38. Pahiryia, M. M. (1994). Interpolation of functions by a chained fraction and a branched chained fraction of a special type. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Mathematical*, 1, 72–79. [In Ukrainian].
39. Petukh, A. M., Obidnyk, D. T., & Romanyuk, O. N. (2007). *Interpolation in problems of contour formation: monograph*. Vinnytsia: VNTU, 104 p. [In Ukrainian].
40. Qinghua Sun, Fangxun Bao, Yunfeng Zhang, & Qi Duan. (2013). A bivariate rational interpolation based on scattered data on parallel lines. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 24(1), 75–80. <https://doi.org/10.1016/j.jvcir.2012.11.003>
41. Romanyuk, O. N., Kryschuk, S. O., & Yakovenko, R. S. (2012). Development of methods of hardware control of linear interpolating devices. *Measuring and computing equipment in technological processes*, 2, 98–101. [In Ukrainian].
42. Romanyuk, O. N., Melnyk, O. V., & Romanyuk, O. V. (2017). Implementation of circular interpolation when using a hexagonal raster. *Scientific works of the Donetsk National Technical University. Ser. Informatics, cybernetics and computer technology*, 1, 53–58. [In Ukrainian].
43. Romanyuk, O. N., Obidnyk, M. D., & Melnikov, O. M. (2012). Simplification of the procedure for determining vectors using spherical-angular interpolation. *Registration, storage and processing of data*, 14(2), 14–24. Retrieved from: http://nbuv.gov.ua/UJRN/tzod_2012_14_2_4. [In Ukrainian].
44. Romanyuk, O. N., Romanyuk, O. V., & Velychko M. O. (2020). Analysis of circular interpolation methods. *The 12 th International scientific and practical conference "Impact of Modernity on Science and Practice"* (12-13 April, 2020), 572–574. Edmonton, Canada 2020.
45. Sarfraz, M., Hussain, & Malik Zawwar. (2006). Data visualization using rational spline interpolation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 189(1-2), 513 p. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.04.039>
46. Stefan Jakobsson, Bjorn Andersson, & Fredrik Edelvik. (2009). Rational radial basis function interpolation with applications to antenna design. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233(4), 889 p. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.08.058>
47. Tsegelyk, H. G. (2004). *Numerical methods: textbook for university students*. Lviv National University named after Ivan Franko. Lviv, 407 p. [In Ukrainian].
48. Tyada, K. R., Chand, A. K. B., & Sajid, M. (2021). Shape preserving rational cubic trigonometric fractal interpolation functions. *Mathematics and Computers in Simulation*, 190, 866–891. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2021.06.015>
49. Voit, B. L., & Romaniuk, O. N. (2017). The method and device of linear interpolation with control based on the analysis of the evaluation function. *Materials of the XLVI scientific and technical conference of VNTU divisions*, Vinnytsia, March 22-24, 2017. Retrieved from: <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/all-fitki/all-fitki-2017/paper/view/2679>. [In Ukrainian].
50. Volontyr, L. O., Zelinska, O. V., Potapova, N. A., & Chikov, I. A. (2020). *Numerical methods: tutorial*. Vinnytsia NAU. Vinnytsia: VNAU, 322 p. [In Ukrainian].
51. Yakovyna, V. S., Fedasyuk, D. V., & Mamrokh, N. M. (2010). Software quality. *Software engineering*, 2, 24–29. [In Ukrainian].
52. Yakovyna, V. S., & SymetsI. I. (2021). Software defect prediction using neural network ensemble. *Scientific Bulletin of UNFU*, 31(6), 104–111. <https://doi.org/10.36930/40310616>
53. Yaroshenko, O. I., & Grihorkiv, M. V. (2018). *Numerical methods: tutorial*. Chernivtsi: Chernivtsi National University, 172 p. [In Ukrainian].
54. Youtian Tao, & Dongyin Wang. (2015). A bivariate rational cubic interpolating spline with biquadratic denominator. *Applied Mathematics and Computation*, 264(1), 366–377. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.04.100>

55. Zhu, Y., & Wang, M. (2020). A class of C^1 rational interpolation splines in one and two dimensions with region control. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 39, 69. <https://doi.org/10.1007/s40314-020-1067-2>
56. Zhuo Liu, Shengjun Liu & Yuanpeng Zhu. (2021). C^2 Rational Interpolation Splines with Region Control and Image Interpolation Application. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 63, 394–416. <https://doi.org/10.1007/s10851-020-01005-z>

Yu. I. Hrytsiuk, V. I. Havrysh

Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

INTERPOLATION OF TABLE-GIVEN FUNCTIONS USING FOURIER POLYNOMIAL

The methodology of interpolation of periodic table-given functions by the Fourier polynomial of the n -th order in arbitrarily located interpolation nodes has been developed. This methodology makes it possible to calculate the intermediate values of the function between nodal points, as well as to numerically differentiate them. Some features of interpolation of periodic Fourier polynomials of the n -th order are considered, the solution algorithm and mathematical formulation of the task of interpolation are given, the formalized notation of the task of interpolation is given, as well as the matrix notation of interpolation procedures for certain values of the argument in arbitrarily located interpolation nodes. There are many different ways of interpolating periodic table-given functions. It was found that the choice of the most suitable algorithm depends on how accurate the chosen method is, has the necessary stability and convergence, what are the costs of computer resources for its use, how smooth is the curve of interpolant, what is the number of data sets (argument values and corresponding functions values) it requires, etc. Algorithms for solving the task of interpolation of periodic of table-given functions by a Fourier polynomial of the 1st, 2nd, and 3rd orders are presented. The simplicity and clearness of this algorithm is one of its advantages, but it is inconvenient for its software implementation. The mathematical formulation of the interpolation task in terms of matrix algebra is presented, which is reduced to the calculation of the Fourier matrix using the values of nodal points known from the table, to the formation of the nodal column vector according to the function values specified in the table, and also to the solution of a linear system of algebraic equations, the root of which are the numerical coefficients of the Fourier polynomial of the n -th order. A method was developed for calculating the coefficients of the interpolant given by the Fourier polynomial of the n -th order, the essence of which is to calculate the product of the matrix which is inverted to the Fourier matrix, which is determined by the values of the nodal points of the table-given function, by the column vector, which contains the values of the interpolation nodes. Specific examples demonstrate the features of calculating the interpolant coefficients given by the Fourier polynomial of the 1st, 2nd, and 3rd orders, and for each of them, the interpolated value of the function at a given point is calculated. Calculations were performed in the Excel environment, which by analogy can be successfully implemented in any other computing environment.

Keywords: matrix algebra; computational mathematics; periodic function; coefficients of interpolant; nodal points; interpolation nodes; task solving algorithm; mathematical formulation of the task.