



УДК 514.18

## КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ ЧАСТИНКИ ПО ШОРСТКИХ НЕРУХОМИХ ПОВЕРХНЯХ НА ПРИКЛАДІ ВЕРТИКАЛЬНОГО КОНУСА

Несвідомін В.М., д.т.н.

Національний університет біоресурсів і природокористування України  
Тел. (044) 267-82-26

**Анотація** – розроблено марле-модель руху частинки по шорсткій внутрішній поверхні вертикального конуса та наведено результати комп'ютерного дослідження її траєкторно-кінематичних властивостей.

**Ключові слова** – матеріальна частинка, шорстка поверхня, вертикальний конус, тригранник Дарбу, диференціальні рівняння, траєкторія, швидкість.

*Постановка проблеми.* Для більшості технологічних процесів сільськогосподарського виробництва характерно переміщення твердої частинки по шорстких рухомих або ж нерухомих поверхнях різних форм та положень [2]. Зокрема, це стосується розсіювання мінеральних добрив ротаційними робочими органами, очищення зернової маси коливальними решітними станами, змішування кормів гвинтовими шнеками і т.д. Теоретичне визначення траєкторно-кінематичних закономірностей руху частинки по шорстких поверхнях приводить до необхідності формування системи диференціальних рівнянь 2-го порядку та її наближеного аналізу, що є дуже трудомісткими процесами і без застосування сучасних пакетів символічної алгебри здійснити практично не можливо.

*Аналіз існуючих досліджень.* Розробку програмних додатків комп'ютерного моделювання взаємодії «шорстка поверхня – рухома частинка» здійснимо в середовищі символічної алгебри Maple [1]. Для опису руху частинки по поверхні в проєкціях на осі тригранника Дарбу скористаємося дослідженнями із праці [3].

*Формулювання цілей статті.* Розробити для середовища символічної алгебри Maple [1] імітаційну модель руху частинки по шорсткій внутрішній поверхні конуса, за допомогою обчислювальних експериментів з'ясувати її траєкторно-кінематичні властивості в залежності від:

- 1) кута  $\alpha_0$  напряму кидання частинки;
- 2) коефіцієнта зовнішнього тертя  $f$ ;
- 3) початкової швидкості  $V_0$  частинки;
- 4) її початкового положення  $[u_0, v_0]$  на поверхні.

*Основна частина.* Якщо частинку кинути на внутрішню поверхню конуса то під дією сили тяжіння вона буде рухатися по певній траєкторії до найнижчої точки поверхні. Місце зупинки частинки залежить від співвідношень кута нахилу твірних конуса, коефіцієнта тертя, початкової її швидкості та кута кидання. В проекціях на осі тригранника Дарбу  $OTPN$  закон руху частинки матиме вигляд [3]:

$$\begin{cases} OT := m W_\tau = F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, \boldsymbol{\tau}}) - f(F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, \mathbf{N}}) \pm F_C \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{N}})) \\ OP := m W_n \sin(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{N}}) = F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, \mathbf{P}}) \\ ON := 0 = F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, \mathbf{N}}) \pm F_C \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{N}}) \end{cases}, \quad (1)$$

де:  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  – константа прискорення вільного падіння тіла;  
 $\mathbf{G} = [0, 0, -1]$  – напрямок сили тяжіння  $F_g = mg$  в системі  $Oxyz$ ;  
 $F_N = F_g \cos(\widehat{\mathbf{N}, \mathbf{G}}) \pm F_C \cos(\widehat{\mathbf{N}, \mathbf{n}})$  – сила нормальної реакції;  
 $F_g = mg$  та  $F_C = mV^2k$  – сила тяжіння та відцентрова сила;  
 $W_\tau = \frac{d}{dt}V(t)$  і  $W_n = V^2k$  – тангенціальне та нормальне прискорення;  
 $k$  – кривина траєкторії  $\mathbf{r}$  частинки,  $\text{м}^{-1}$ ;  
 $V$  – швидкість частинки,  $\text{м/с}$ ;  
 $\mathbf{N}$  – нормаль до поверхні  $\mathbf{R}(u, v)$  в точках траєкторії  $\mathbf{r}$ ;  
 $\mathbf{n}$  – головна нормаль траєкторії  $\mathbf{r}$  частинки на поверхні;  
 $\boldsymbol{\tau}$  – вектор дотичної траєкторії  $\mathbf{r}$ ;  
 $\mathbf{P} = \mathbf{N} \times \boldsymbol{\tau}$  – вектор Дарбу тригранника  $O\boldsymbol{\tau}PN$ ;  
 $f$  – коефіцієнт зовнішнього тертя.

Запропоноване рівняння (1) є шаблоном для опису руху матеріальної частинки по будь-якій шорсткій поверхні. Конкретний його вигляд, який формується автоматично в середовищі символічної алгебри Maple, буде залежати від вихідної поверхні. Покажемо це на прикладі руху частинки по внутрішній поверхні вертикального конуса, параметричне рівняння  $uv$ -координатної сітки якого є:

$$\mathbf{R}(u, v) = \mathbf{R}[v \cos(u), v \sin(u), a v], \quad (2)$$

де  $a = \tan(\alpha)$  – параметр нахилу твірних конуса.

Траєкторію частинки будемо шукати у внутрішніх  $uv$ -координатах поверхні конуса (2) у загальному вигляді:

$$u = u(t), v = v(t). \quad (3)$$

Підставимо вирази (3) до рівняння (2)  $u, v$ -сітки поверхні конуса – одержимо траєкторію частинки  $\mathbf{r}(t)$  вже у системі декартових координат  $Oxyz$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}[v(t) \cos(u(t)), v(t) \sin(u(t)), a v(t)]. \quad (4)$$

За рівняннями (2)-(4) визначаються всі геометро-кінематичні складові, які входять до системи (1). Опустимо досить громіздкі символічні перетворення в середовищі Maple за розробленим відповідним програмним забезпеченням, а наведемо тільки систему диференціальних рівнянь закону руху частинки по шорсткій внутрішній поверхні конуса в проекціях на осі тригранника Дарбу

$$\left\{ \begin{aligned} OP &:= (1 + a^2) \frac{d}{dt} v(t) \frac{d^2}{dt^2} v(t) + v(t) \left( \frac{d}{dt} u(t) \frac{d}{dt} v(t) + v(t) \frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) = \\ &= \frac{f \left( av(t) \left( \frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + g \right) \sqrt{\left( \frac{d}{dt} v(t) \right)^2 (1+a^2) + v(t)^2 \left( \frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + ga \frac{d}{dt} v(t) \sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}} \\ OP &:= \left( (1 + a^2) v(t) \frac{d^2}{dt^2} v(t) - v(t)^2 \left( \frac{d}{dt} u(t) \right)^2 - 2(1 + a^2) \left( \frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \right) \frac{d}{dt} u(t) - \\ &= -(1 + a^2) v(t) \frac{d}{dt} v(t) \frac{d^2}{dt^2} u(t) = -g v(t) \frac{d}{dt} u(t) \end{aligned} \right. \quad (5)$$

Початковими умовами для знаходження шуканих залежностей  $u(t)$  і  $v(t)$  із одержаної системи (5) диференціальних рівнянь є:

$$O_i := \frac{d}{dt} u(t_0) = \frac{V_0 \sin(\alpha_0)}{v_0}, \quad u(t_0) = u_0, \quad \frac{d}{dt} v(t_0) = \frac{V_0 \cos(\alpha_0)}{\sqrt{1+a^2}}, \quad v(t_0) = v_0. \quad (6)$$

Розв'язати систему рівнянь (5)-(6) можливо тільки наближено, наприклад, за методом Рунге-Кутта [1]. Підстановка знайдених залежностей  $u(t)$  і  $v(t)$  до рівняння (4) дозволяє побудувати траєкторію  $r(t)$  частинки по поверхні конуса та відшукати всі інші кінематичні властивості руху частинки, зокрема її швидкість  $V(t)$ , прискорення  $V(t)$ , сили  $F_N(t)$  нормальної реакції, кривина  $k(t)$ .

На рис. 1а побудовано траєкторії частинки по внутрішній шорсткій поверхні конуса за умови  $a = \tan(20^\circ)$ ,  $V_0 = 4 \text{ м/с}$ ,  $u_0 = \pi$ ,  $v_0 = 2$ ,  $t = 3.4 \text{ с}$ ,  $\alpha_0 = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ ,  $f = 0.3$ . За графіками (рис.1,б) швидкостей  $V(t)$  можна стверджувати, що матеріальні частинки тіла, розмірами яких можна знехтувати, за умови  $a = \tan(20^\circ) > f = 0.3$ , на поверхні конуса теоретично ніколи не зупиняться. Коли частинки знаходяться у верхній частині конуса, їх швидкість зигзагоподібно сповільнюється. Потім частинки переходять через вершину конуса на зовнішню його сторону, де швидкість зростає прямолінійно – частинки рухаються вздовж прямолінійних твірних. Зрозуміло, що в реальних умовах, всі частинки зупиняться у вершині конуса.

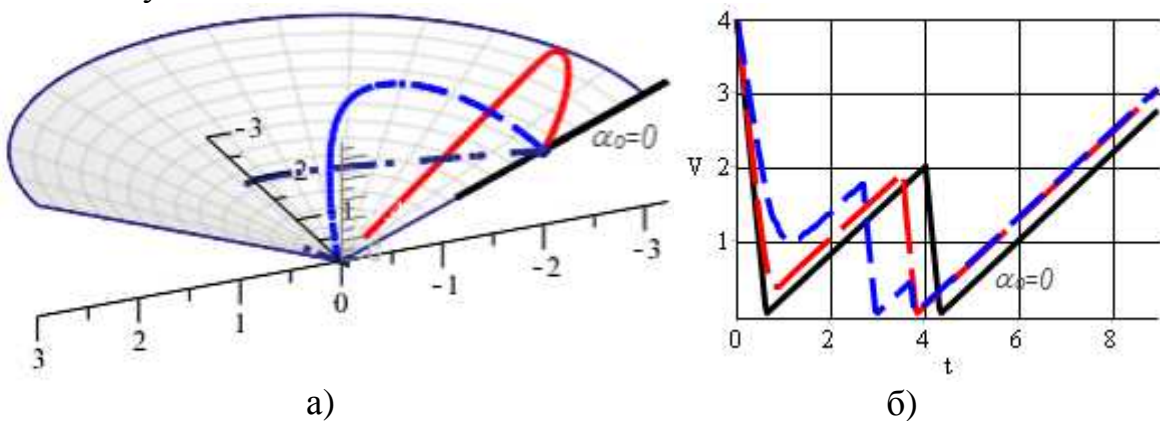


Рис.1. Траєкторії  $r(t)$  та графіки її швидкості  $V(t)$  частинки в залежності кута  $\alpha_0$  її кидання.

На рис. 2 побудовано траєкторії  $r(t)$  частинки, графіки її швидкості  $V(t)$ , нормальної реакції  $F_N(t)$  та кривини  $k(t)$  в залежності коефіцієнта тертя  $f = 0.01, 0.15, 0.3, 0.45$  та за умови  $\alpha_o = 90^\circ$  і  $V_o = 4$  м/с. Із графіків швидкостей  $V(t)$  бачимо, що частинка із коефіцієнтом тертя  $f = 0.45 > \tan(20^\circ)$  зупиниться через проміжок часу  $t \approx 1.5$  (рис.2,б). При цьому сила нормальної реакції  $F_N$  дорівнюватиме  $mg \cos(20^\circ) = 9.21$  (рис.2,в) за умови  $m=1$  кг, а значення кривини  $k = 0$  (рис. 2,г). Чим більший коефіцієнт тертя  $f$ , тим швидше частинка сповільнює свій рух до певної мінімальної швидкості, а потім розганяється.

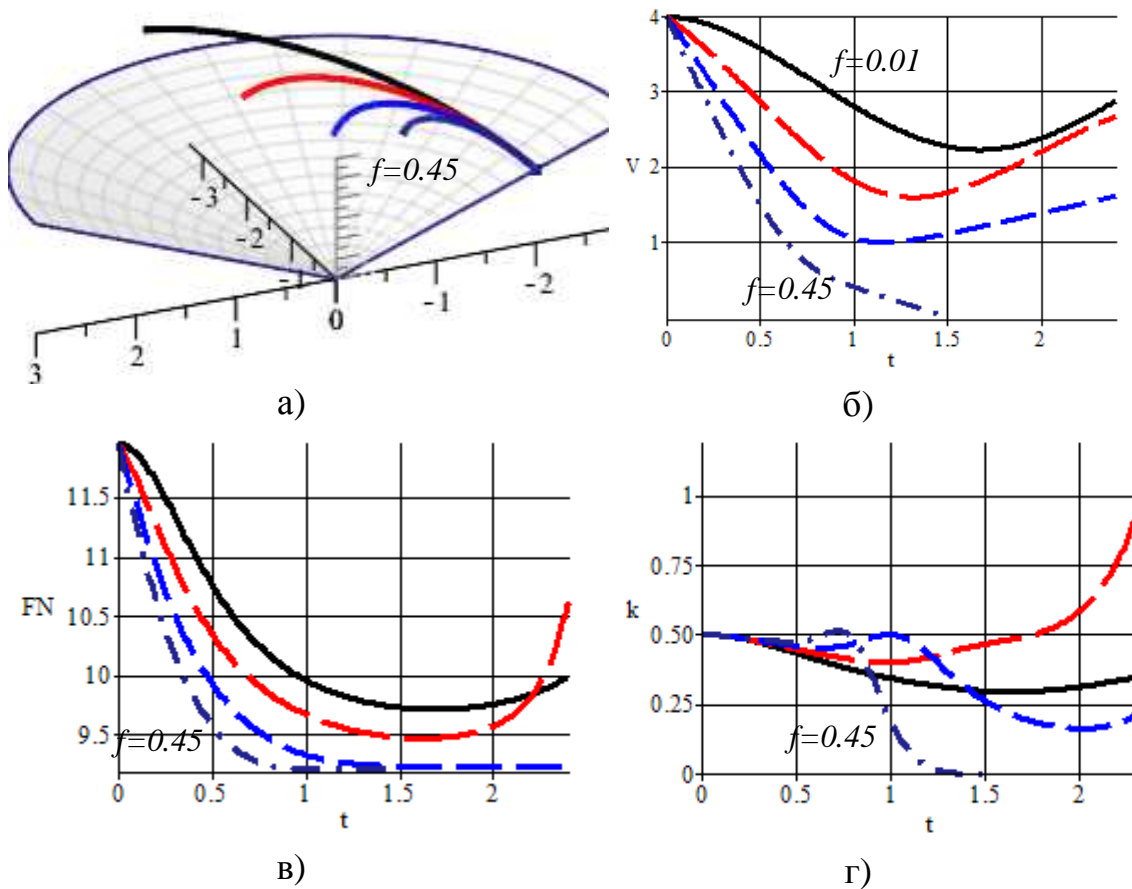


Рис.2. Траєкторно-кінематичні характеристики руху частинки в залежності коефіцієнта тертя  $f$ .

На рис. 3 побудовано траєкторно-кінематичні характеристики частинки з різною її початковою швидкістю  $V_o = 2, 4, 6, 8$  м/с та значеннями  $\alpha_o = 90^\circ$  і  $f = 0.3$ . Можна бачити (рис. 3,б), що графіки швидкостей  $V(t)$  частинки незалежно від її початкової швидкості  $V_o$ , вже через проміжок  $t \approx 1,2$  с починають сходитися. Аналогічно поведуться графіки прискорення  $W(t)$  – рух частинки становиться рівномірним (рис.3,в). За графіками кривини  $k(t)$  траєкторії  $r(t)$  частинки (рис.3,г) можна відслідковувати її перехід на траєкторію вздовж прямолінійної твірної конуса -  $k(t) \approx 0$ .

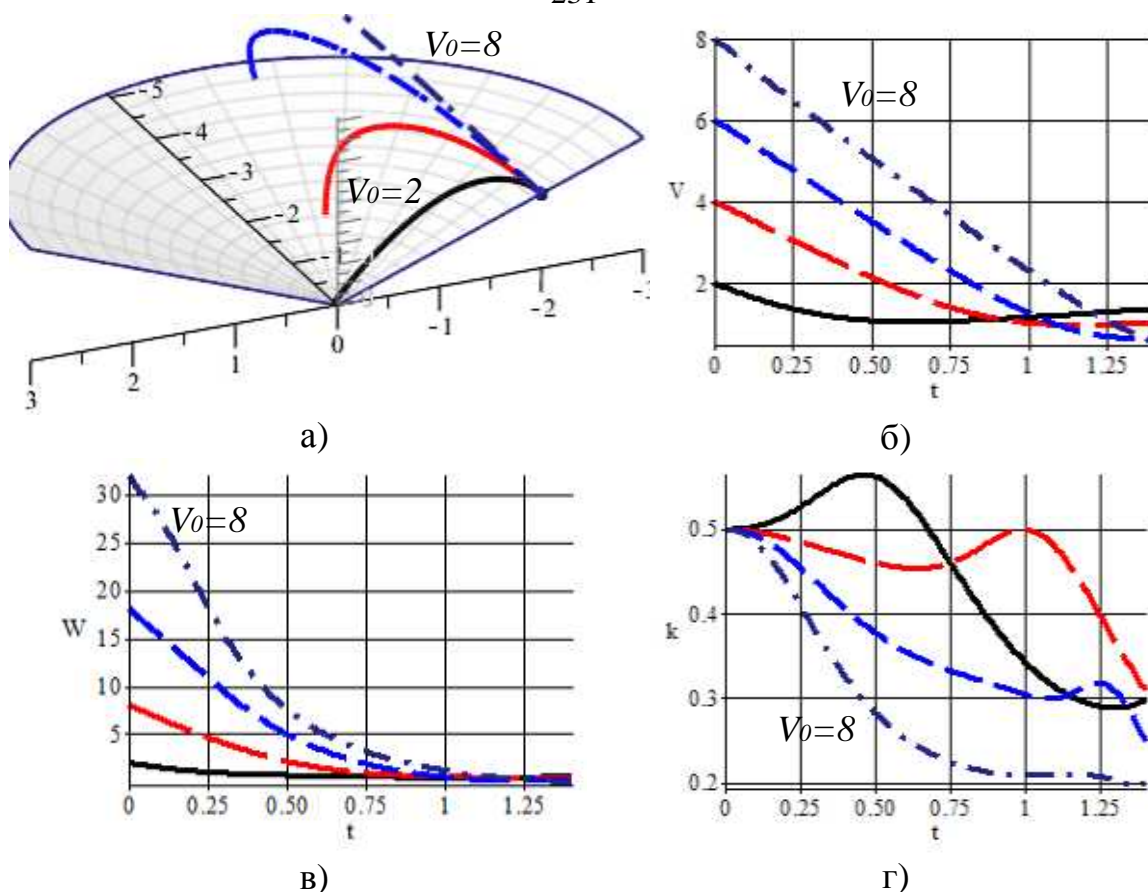


Рис.3. Траєкторії  $r(t)$  частинки, графіки її швидкості  $V(t)$ , прискорення  $W(t)$  та кривини  $k(t)$  у функції коефіцієнта тертя  $f$ .

Якщо частинку кидати з однаковою початковою швидкістю  $V_0 = 4$  м/с з різних місць твірної конуса перпендикулярно до неї, то їх траєкторії в певній точці наближаються (рис. 4,а). Найшвидше зупиниться та частинка, яка була найнижче, хоча найвищі сповільнюють свій рух швидше (рис. 4,б).

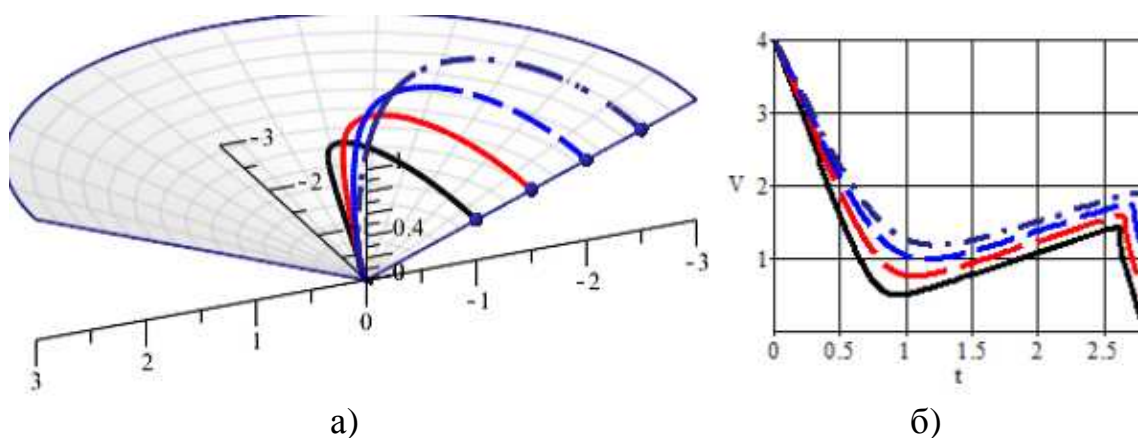


Рис.4. Траєкторії  $r(t)$  та графіки швидкості  $V(t)$  частинки в залежності її початкового положення на поверхні конуса.

*Висновки.* Імітаційне моделювання руху частинки по шорсткій поверхні конуса дозволяє встановити досить складні взаємозв'язки між вихідними умовами кидання частинки та її траєкторно-кінематичними характеристиками. Так, місце зупинки частинки як правило є не в найнижчій точці конуса і суттєво залежить від значення коефіцієнта тертя. Час до повної зупинки частинки залежить від коефіцієнта тертя, і не дуже залежить від її початкової швидкості.

*Література.*

1. *Аладьев В.З.* Программирование и разработка приложений в Maple / *В.З. Аладьев, В.К.Бойко, Е.А. Ровба.* - Гродно: ГрГУ, 2007.- 458 с.
2. *Василенко П.М.* Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин / *П.М.Василенко.* - К.: УАСХН, 1960. -283 с.
3. *Пилипака С.Ф.* Тригранник і формули Френе: теорія складного руху матеріальної точки та задачі на кінематику і динаміку при її русі по шорстких поверхнях / *С.Ф. Пилипака // П.М.Василенко – яскравий погляд у майбутнє.* - К.: Хай-Тек Прес, 2010. - С.297-397.

## **MAPLE-MODEЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЧКИ ПО ШЕРОХОВОЙ ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ КОНУСА**

*Несвидомин В.Н.*

**Аннотация** – создана maple-модель движения материальной частички по шероховатой поверхности конуса и приведены результаты вычислительного анализа ее кинематических свойств.

## **MAPLE-MODEL PART MOVEMENTS ON ROUGHNESS THE INTERNALSURFACEOF CONE**

*V.Nesvidomin*

### **Summary**

**It is created maple model of movement of a material part on roughness surfaces of cone and results of its computing researches trajectory-kinematic properties are resulted.**