



УДК 531.32

## ДО ТЕОРІЇ СКЛАДНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ЧАСТИНКИ ПО ПЛОЩИНІ

Бабка В.М., к.т.н.,

*Національний університет біоресурсів і природокористування  
України*Тел.: (044) 527-82-26 E-mail: [engmech\\_centre@twin.nauu.kiev.ua](mailto:engmech_centre@twin.nauu.kiev.ua)

**Анотація** – розглянуто складний рух матеріальної частинки, відносно переміщення якої відбувається в рухомому триграннику кривої, заданої натуральними рівняннями. Переносний рух тригранника визначається диференціальними характеристиками кривої. Доведена правомірність використання формул Френе для знаходження абсолютної швидкості та прискорення частинок в проєкціях на орти рухомого тригранника. Знайдені абсолютні траєкторії руху, здійснено візуалізацію отриманих результатів.

**Ключові слова** – матеріальна частинка, рухомий тригранник кривої, формули Френе.

*Постановка проблеми.* Рух матеріальної частинки по площині (гравітаційній поверхні, шорсткій площині та ін.) був предметом дослідження багатьох вчених зі світовим ім'ям починаючи від Галілея, Гюйгенса, Ньютона, Ейлера, Остроградського та ін. Найбільш фундаментальними дослідженнями руху матеріальної частинки по фрикційним поверхням сільськогосподарських машин слід вважати праці академіка Василенко П.М. [1] та інших вітчизняних вчених: академіків Заїки П.М., Берга Б.А., а також Григор'єва С.М., Мельникова С.В. та ін. Значна кількість аналітичних задач теорії сільськогосподарських машин і зараз потребує застосування теорії руху матеріальної точки (частинки), або твердого тіла по поверхням, які використовуються при проектуванні нових їх конструкцій.

Теорія складного руху матеріальної точки має завершену форму і навіть не потребує ніякого уточнення. Вона ґрунтується на тому, що рух точки досліджується одночасно по відношенню до двох систем координат. Одна з них (основна) приймається за нерухому, а друга здійснює по відношенню до нерухомої відносний рух за заданим законом. В свою чергу у рухомій системі координат здійснюється відносний рух матеріальної точки. Сума цих рухів (відносного і



переносного) складає абсолютний рух матеріальної точки по відношенню до основної системи координат. При цьому рухи (як переносний, так і відносний) як правило задаються залежностями у функції часу.

Відомий також натуральний (природний) спосіб задання руху матеріальної точки, при якому швидкість і прискорення розглядається в проєкціях на орти супровідного тригранника траєкторії (тригранника Френе). Однак, в наявній літературі не вдається знайти застосування тригранника Френе в якості рухомої системи координат, у якій здійснює відносний рух матеріальна точка. Розробці теорії складного руху матеріальної точки по горизонтальній площині із застосуванням тригранника Френе присвячено дане дослідження.

*Аналіз останніх досліджень.* Натуральний спосіб задання руху матеріальної точки вважається достатньо відомим і широко використовується у дослідженнях з багатьох питань галузі механізації сільського господарства та теорії сільськогосподарських машин. При цьому розглядається у переважній більшості простий рух матеріальних точок. Відомі приклади із застосуванням тригранника і формул Френе при розгляді руху твердого тіла в його системі, наприклад, літака [2]. У праці [3] розглянуто кінематику руху супровідного тригранника гвинтової лінії. В останніх наукових та навчальних публікаціях кінематика супровідного тригранника траєкторії, як твердого тіла, або взагалі не розглядається, або ж розглядається із посиланням на більш ранні дослідження та публікації [4]. Між тим, як показано в праці [5], тригранник і формули Френе можна успішно використовувати в задачах кінематики і динаміки складного руху матеріальної точки, зокрема при розгляді питань, що пов'язані з дослідженням сільськогосподарських машин.

*Формулювання мети статті.* Мета публікації – подальший розвиток теорії складного руху матеріальної точки по площині з застосуванням супровідного тригранника кривої і формул Френе.

*Основна частина.* В будь-якій точці кривої можна побудувати три взаємно перпендикулярні напрями. Одиничні орти вздовж них (дотична  $\bar{\tau}$ , головна нормаль  $\bar{n}$  і бінормаль  $\bar{b}$ ) утворюють супровідний (натуральний) тригранник кривої або тригранник Френе. Для плоскої кривої орти  $\bar{\tau}$  і  $\bar{n}$  знаходяться в площині кривої, а орт  $\bar{b}$  перпендикулярний до неї (див. рис. 1, а). Якщо рухати тригранник із заданою швидкістю  $v_A$  вздовж кривої, то можна визначити швидкість і прискорення будь-якої точки тригранника, величина і напрям яких залежатимуть від кривизни кривої. Швидкість точки тригранника складатиметься із швидкості полюса (початку координат  $A$ ) і швидкості цієї точки в обертальному русі тригранника навколо

миттєвої осі обертання, яка збігається із ортом біномалі  $\bar{b}$ . За певний проміжок часу  $\Delta t$  тригранник при русі вздовж кривої займе нове положення, внаслідок переміщення на відстань  $\Delta s$  і повертання на кут  $\Delta\alpha$  (рис. 1, б).

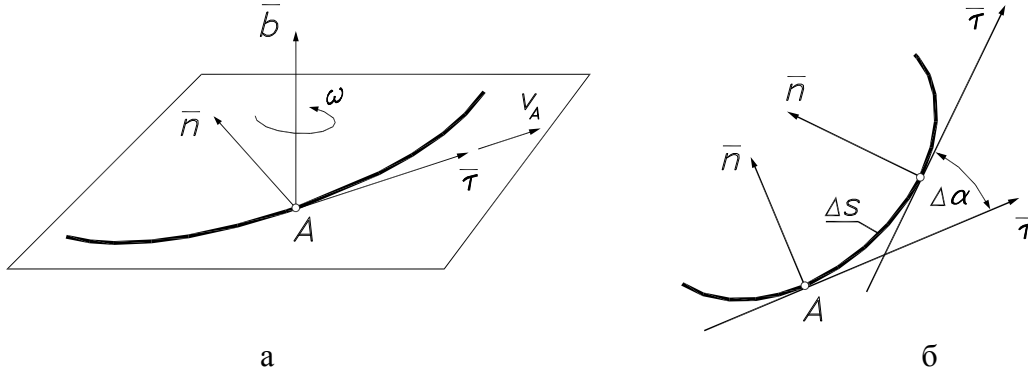


Рис. 1. Супровідний тригранник Френе кривої: а) положення вектора миттєвої осі обертання; б) до визначення кута повороту  $\Delta\alpha$  при переміщенні тригранника по кривій на відстань  $\Delta s$  (біномаль  $\bar{b}$  проєкціюється в точку).

Величину кутової швидкості  $\omega$  можна визначити, як граничне відношення приросту кута до приросту часу

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{d\alpha}{dt}. \quad (1)$$

Перейдемо від параметру часу  $t$  до дугової координати  $s$  (шляху вздовж дуги)

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds} \frac{ds}{dt} = v_A \frac{d\alpha}{ds} = v_A k, \quad (2)$$

де  $k$  – кривина кривої у поточній точці  $A$ .

Таким чином, величина кутової швидкості тригранника залежить від швидкості його руху по кривій і кривини самої кривої в точці, де знаходиться вершина тригранника.

Закріпимо жорстко в системі тригранника точку  $B$  і знайдемо її швидкість. Радіус-вектор  $\bar{r}_B$ , який визначає положення точки  $B$  відносно нерухомої системи координат  $Oxy$  (рис. 2), можна задати за допомогою двох векторів:  $\bar{r}_A$ , який визначає положення вершини тригранника в системі координат  $Oxy$  і  $\bar{\rho}$ , який визначає положення точки  $B$  у системі тригранника. Величина радіус-вектора  $\bar{r}_B$  буде дорівнювати

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{\rho}. \quad (3)$$

Нехай в системі супровідного тригранника точка  $B$  задана вектором  $\bar{\rho} = \text{const}$ , складові якого в проєкціях на одиничні вектори (орти) мають значення  $\rho_\tau$  і  $\rho_n$  (рис. 2).

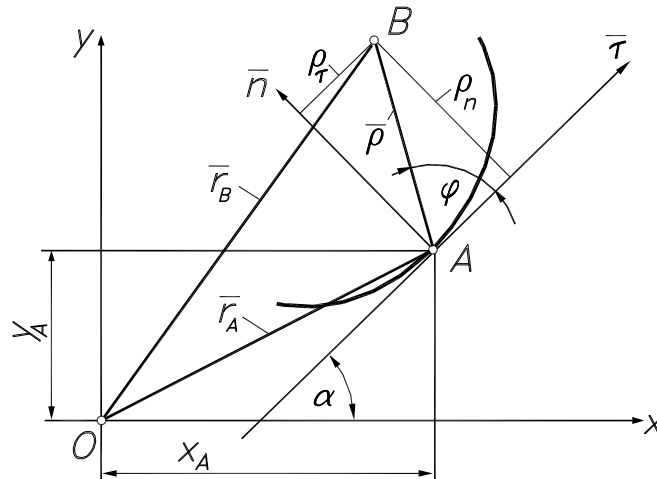


Рис. 2. Положення точки  $B$  у двох системах координат: нерухомій  $Oxy$  і рухомому триграннику кривої  $\bar{\tau}\bar{\eta}\bar{b}$ .

Запишемо векторну суму (3) в проекціях на осі нерухомої системи координат  $Oxy$ . Матимемо:

$$\begin{aligned}x_B &= x_A + \rho_\tau \cos \alpha - \rho_n \sin \alpha; \\y_B &= y_A + \rho_\tau \sin \alpha + \rho_n \cos \alpha.\end{aligned}\quad (4)$$

Продиференціювавши (4) по часу  $t$ , знайдемо проекції швидкості точки  $B$  на координатні осі нерухомої системи:

$$\begin{aligned}\frac{dx_B}{dt} &= \frac{dx_B}{ds} \frac{ds}{dt} = v_A \frac{dx_B}{ds} = v_A (x'_A - \rho_\tau \alpha' \sin \alpha - \rho_n \alpha' \cos \alpha); \\ \frac{dy_B}{dt} &= \frac{dy_B}{ds} \frac{ds}{dt} = v_A \frac{dy_B}{ds} = v_A (y'_A + \rho_\tau \alpha' \cos \alpha - \rho_n \alpha' \sin \alpha).\end{aligned}\quad (5)$$

У виразах (5) здійснено перехід від параметру часу  $t$  до дугової координати  $s$  – довжини дуги кривої. У цьому випадку складові виразів (5) набувають геометричного змісту [7]

$$x'_A = \cos \alpha; \quad y'_A = \sin \alpha; \quad \alpha' = k. \quad (6)$$

Із врахуванням (6) проекції абсолютної швидкості точки  $B$  у (5) на осі нерухомої системи координат запишуться так:

$$\begin{aligned}v_{Bx} &= x'_B = v_A [(1 - k\rho_n) \cos \alpha - k\rho_\tau \sin \alpha]; \\ v_{By} &= y'_B = v_A [(1 - k\rho_n) \sin \alpha + k\rho_\tau \cos \alpha].\end{aligned}\quad (7)$$

Результат (7) можна отримати також за відомою формулою [4]

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{\rho}, \quad (8)$$

де перша складова  $\bar{v}_A$  є швидкістю полюса  $A$ , а друга  $\bar{\omega} \times \bar{\rho}$  – швидкістю точки  $B$  навколо полюса. Їх відповідно можна знайти таким чином:



$$\begin{aligned}
 v_{Ax} &= \frac{dx_A}{dt} = \frac{dx_A}{ds} \frac{ds}{dt} = v_A \frac{dx_A}{ds} = v_A x'_A = v_A \cos \alpha; \\
 v_{Ay} &= \frac{dy_A}{dt} = \frac{dy_A}{ds} \frac{ds}{dt} = v_A \frac{dy_A}{ds} = v_A y'_A = v_A \sin \alpha. \\
 \bar{\omega} \times \bar{\rho} &= \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & v_A k \\ \rho_\tau \cos \alpha - \rho_n \sin \alpha & \rho_\tau \sin \alpha + \rho_n \cos \alpha & 0 \end{vmatrix},
 \end{aligned} \tag{9}$$

звідки

$$\bar{\omega} \times \bar{\rho} = \left\{ -v_A k (\rho_\tau \sin \alpha + \rho_n \cos \alpha); \quad v_A k (\rho_\tau \cos \alpha - \rho_n \sin \alpha) \right\}. \tag{10}$$

Здійснивши додавання складових проекцій (9) і (10) на відповідні осі координат, отримаємо уже відомий результат (7).

А тепер покажемо, як не дуже складно знаходити абсолютну швидкість точки  $B$  у проекціях на орти супровідного тригранника кривої. Для порівняння зробимо це спочатку за формулою (8), а потім із застосуванням формул Френе. Знайдемо вектор  $\bar{\omega} \times \bar{\rho}$  в проекціях на орти тригранника

$$\bar{\omega} \times \bar{\rho} = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ 0 & 0 & v_A k \\ \rho_\tau & \rho_n & 0 \end{vmatrix} = -\bar{\tau} v_A k \rho_n + \bar{n} v_A k \rho_\tau. \tag{11}$$

Зважаючи на те, що швидкість полюса  $A$  за напрямом збігається із ортом  $\bar{\tau}$ , тобто  $\bar{v}_A = v_A \bar{\tau}$ , перепишемо вираз (8) із врахуванням (11)

$$\bar{v}_B = v_A \left[ \bar{\tau} (1 - k \rho_n) + \bar{n} k \rho_\tau \right]. \tag{12}$$

Геометрична сума складових (7) і (12) дасть однаковий результат

$$v_B = v_A \sqrt{(1 - k \rho_n)^2 + k^2 \rho_\tau^2}. \tag{13}$$

Тепер розглянемо альтернативний варіант із застосуванням формул Френе. Векторне рівняння (3) в системі супровідного тригранника запишеться так

$$\bar{R}_B = \bar{r}_A + \bar{\tau} \rho_\tau + \bar{n} \rho_n. \tag{14}$$

Якщо вважати, що координати  $\rho_\tau$  і  $\rho_n$  при русі тригранника по кривій не змінюються, тобто точка  $B$  закріплена в триграннику нерухомо, то її абсолютну швидкість можна знайти диференціюванням виразу (14) по часу  $t$ . Однак, положення тригранника на кривій залежить від дугової координати  $s$ , тому при



диференціюванні (14) потрібно перейти від незалежної змінної  $t$  до дуги  $s$

$$\frac{d\bar{R}_B}{dt} = \frac{d\bar{R}_B}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v_A \frac{d\bar{R}_B}{ds} = v_A \left[ \frac{d\bar{r}_A}{ds} + \frac{d\bar{\tau}}{ds} \rho_\tau + \frac{d\bar{n}}{ds} \rho_n \right]. \quad (15)$$

У виразі (15) похідна  $\frac{d\bar{r}_A}{ds} = \bar{\tau}$ , тобто це є одиничний орт дотичної. Решта похідних –  $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$  і  $\frac{d\bar{n}}{ds}$  – є відомими формулами Френе,

які мають кінематичну інтерпретацію [6]. Це основні формули диференціальної геометрії, у яких незалежною змінною служить дугова координата  $s$  (наводимо спрощений варіант для плоскої кривої)

$$\bar{\tau}' = k\bar{n}; \quad \bar{n}' = -k\bar{\tau}, \quad (16)$$

де  $k$  – кривина кривої, яка задається натуральним рівнянням  $k = k(s)$ .

Формули Френе (16) дають можливість швидко і просто одержати похідні по дуговій координаті  $s$  від ортів  $\bar{\tau}$  і  $\bar{n}$  в проекції на ці орти. У кінематичній інтерпретації похідні (16) є проекціями швидкостей кінців одиничних ортів  $\bar{\tau}$  і  $\bar{n}$  на ці орти в обертальному русі тригранника [6]. Із врахуванням (16) вираз (15) приймає точно такий же вигляд, як було одержано в (12). Таким чином, застосування формул Френе (16) дає можливість дуже просто знаходити швидкість точки  $B$  у обертальному русі навколо полюса  $A$ , яку в іншому випадку потрібно знаходити як векторний добуток (11). Ще більш ефективно вони працюють при знаходженні абсолютної швидкості точки  $B$  у складному русі, до розгляду якого перейдемо далі.

Тепер вважатимемо, що точка  $B$  рухається в системі супровідного тригранника, тобто вектор  $\bar{\rho}$  є функцією часу:  $\bar{\rho} = \bar{\rho}(t)$ . В такому випадку абсолютна швидкість точки  $B$  визначиться як сума переносної швидкості, яку можна знайти за формулою (12), і відносної, яку одержимо диференціюванням вектора  $\bar{\rho}$  по часу  $t$ . Однак, переносна швидкість є функцією дугової координати  $s$ , тому відносна швидкість теж має бути приведена до цієї незалежної змінної

$$\bar{v}_r = \frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}}{ds} \frac{ds}{dt} = v_A \frac{d\bar{\rho}}{ds}. \quad (17)$$

Розпишемо векторне рівняння (17), яке визначає відносну швидкість в системі тригранника, на дві складові по напрямних ортів  $\bar{\tau}$ ,  $\bar{n}$  і додамо до переносної швидкості (12). Після групування членів і винесення швидкості полюса  $v_A$  за дужки, абсолютну швидкість точки  $B$  у проекціях на орти тригранника можна записати

$$\bar{v}_B = v_A [\bar{\tau}(1 - k\rho_n + \rho'_\tau) + \bar{n}(k\rho_\tau + \rho'_n)]. \quad (18)$$



Покажемо, як просто можна одержати результат (18) за допомогою формул Френе. Для цього продиференціюємо вираз (14) за умови, що координати  $\rho_\tau$  і  $\rho_n$  є функціями дугової координати  $s$

$$\overline{R}'_B = \overline{\tau} + \overline{\tau}'\rho_\tau + \overline{\tau}\rho'_\tau + \overline{n}'\rho_n + \overline{n}\rho'_n. \quad (19)$$

Підставивши в (19) вирази похідних ортів тригранника із формул Френе (16), одержимо

$$\begin{aligned} \overline{R}'_B &= \overline{\tau} + nk\rho_\tau + \tau\rho'_\tau - \tau k\rho_n + \overline{n}\rho'_n = \\ &= \overline{\tau}(1 - k\rho_n + \rho'_\tau) + \overline{n}(k\rho_\tau + \rho'_n). \end{aligned} \quad (20)$$

Порівнюючи вирази (18) і (20), можна зробити висновок, що диференціювання рівняння (14) із застосуванням формул Френе дає абсолютну швидкість точки, заданої в системі тригранника змінною відстанню  $\overline{\rho} = \overline{\rho}(s)$  в проекціях на орти тригранника при швидкості руху тригранника по кривій  $v_A = 1$  м/с. У випадку, коли швидкість  $v_A$  відмінна від одиниці, необхідно кожен проекцію помножити на величину  $v_A$ . Отже, можна сформулювати наступне правило:

Якщо точка в системі рухомого супровідного тригранника кривої задана радіус-вектором у формі (14), то для знаходження її абсолютної швидкості в проекціях на орти цього ж тригранника необхідно продиференціювати рівняння (14) по дуговій координаті кривої  $s$  із застосуванням формул Френе і отриманий результат помножити на швидкість руху вершини тригранника по кривій.

Положення точки  $B$  у системі супровідного тригранника кривої можна задати також в полярній системі координат – відстанню  $\overline{\rho}$  і кутом  $\varphi$ , відлік якого здійснюється від орта  $\overline{\tau}$  (рис. 2). В такому випадку положення точки  $B$  у системі тригранника у векторній формі запишеться так

$$\overline{R}_B = \overline{r}_A + \overline{\tau}\rho\cos\varphi + \overline{n}\rho\sin\varphi. \quad (21)$$

Щоб одержати абсолютну швидкість точки  $B$ , потрібно вираз (21) продиференціювати по дуговій координаті  $s$  [маючи на увазі, що  $\rho = \rho(s)$  і  $\varphi = \varphi(s)$ ], застосувати формули Френе (16) і отриманий результат помножити на швидкість руху вершини тригранника  $v_A$

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A \left\{ \overline{\tau} [1 + \rho' \cos\varphi - \rho(k + \varphi') \sin\varphi] + \overline{n} [\rho' \sin\varphi + \rho(k + \varphi') \cos\varphi] \right\}. \quad (22)$$

Модуль абсолютної швидкості точки  $B$  для формул (18) і (22) відповідно запишеться:

$$v_B = v_A \sqrt{(1 - k\rho_n + \rho'_\tau)^2 + (k\rho_\tau + \rho'_n)^2}; \quad (23)$$

$$v_B = v_A \sqrt{(\rho' + \cos\varphi)^2 + [\sin\varphi - \rho(k + \varphi')]^2}. \quad (24)$$





Тепер перейдемо до знаходження абсолютної траєкторії точки  $B$ , тобто траєкторії у нерухомій системі координат  $Oxy$ . Залежності  $\rho_\tau = \rho_\tau(s)$ ,  $\rho_n = \rho_n(s)$  або  $\rho = \rho(s)$ ,  $\varphi = \varphi(s)$  задають траєкторію руху у системі супровідного тригранника, тобто траєкторію відносного руху. Сума відносного і переносного рухів точки  $B$  дасть траєкторію її абсолютного руху. Отже нам потрібно перейти від векторних рівнянь (14) або (21) до їх координатного запису в проекції на осі нерухомої системи координат. Завдяки руху тригранника положення його вершини  $A(x_A, y_A)$  в системі  $Oxy$  змінюватиметься в залежності від дугової координати  $s$ . Координати вершини  $A$  в проекціях на осі нерухомої системи  $Oxy$  можна знайти, якщо відома залежність  $k = k(s)$  – так зване натуральне рівняння кривої. Формули переходу мають вигляд [7]

$$x_A = \int \cos \alpha ds; \quad y_A = \int \sin \alpha ds, \quad (25)$$

де  $\alpha = \alpha(s)$  – закономірність зміни кута  $\alpha$  (рис.2) при русі вершини  $A$  по кривій і який теж визначається із залежності  $k = k(s)$  [7]:

$$\alpha = \int k ds. \quad (26)$$

Абсолютну траєкторію точки  $B$  у системі координат  $Oxy$  одержимо при паралельному переносі вершини  $A$  вздовж осей на величини (25) і одночасному переході від координат точки  $B$  ( $\rho_\tau$ ,  $\rho_n$  або  $\rho \cos \varphi$ ,  $\rho \sin \varphi$ ) в системі тригранника до координат точки  $B(x_B, y_B)$  в нерухомій системі координат. Для цього суміщаємо їх осі за рахунок повороту тригранника навколо бінормалі на кут  $\alpha = \alpha(s)$ . Після повороту, додаванню і підстановки (26) в (25) векторне рівняння (14) запишеться в проекціях на осі нерухомої системи координат:

$$\begin{aligned} x_B &= \rho_\tau \cos(\int k ds) - \rho_n \sin(\int k ds) + \int \cos(\int k ds) ds; \\ y_B &= \rho_\tau \sin(\int k ds) + \rho_n \cos(\int k ds) + \int \sin(\int k ds) ds. \end{aligned} \quad (27)$$

Оскільки параметричні рівняння (27) описують абсолютну траєкторію, то їх диференціюванням по параметру  $s$  можна знайти складові і модуль абсолютної швидкості точки  $B$  в залежності від  $s$ :

$$\begin{aligned} x'_B &= (1 - k\rho_n + \rho'_\tau) \cos(\int k ds) - (k\rho_\tau + \rho'_n) \sin(\int k ds); \\ y'_B &= (1 - k\rho_n + \rho'_\tau) \sin(\int k ds) + (k\rho_\tau + \rho'_n) \cos(\int k ds); \\ v_B(s) &= \sqrt{x_B'^2 + y_B'^2} = \sqrt{(1 - k\rho_n + \rho'_\tau)^2 + (k\rho_\tau + \rho'_n)^2}. \end{aligned} \quad (28)$$





Порівнюючи останній вираз (28) і вираз (23) робимо висновок, що вони подібні. Для повної аналогії потрібно останній вираз (28) помножити на швидкість  $v_A$ , що і зрозуміло, оскільки ми в такому випадку перейдемо від виразу  $v_B = v_B(s)$  до виразу  $v_B = v_B(t)$ .

Застосувавши аналогічне перетворення координат по відношенню до векторного рівняння (21), одержимо параметричні рівняння абсолютної траєкторії точки  $B$ :

$$\begin{aligned} x_B &= \rho \cos \varphi \cos\left(\int k ds\right) - \rho \sin \varphi \sin\left(\int k ds\right) + \int \cos\left(\int k ds\right) ds; \\ y_B &= \rho \cos \varphi \sin\left(\int k ds\right) + \rho \sin \varphi \cos\left(\int k ds\right) + \int \sin\left(\int k ds\right) ds. \end{aligned} \quad (29)$$

Рівняння (29) можна записати в більш компактному вигляді, застосувавши тригонометричні формули для суми і різниці кутів:

$$\begin{aligned} x_B &= \rho \cos\left(\varphi + \int k ds\right) + \int \cos\left(\int k ds\right) ds; \\ y_B &= \rho \sin\left(\varphi + \int k ds\right) + \int \sin\left(\int k ds\right) ds. \end{aligned} \quad (30)$$

Аналогічно попередньому випадку диференціюванням (30) по параметру  $s$  ми можемо знайти складові і модуль абсолютної швидкості точки  $B$   $v_B = v_B(s)$ , множенням якої на  $v_A$  отримаємо результат, одержаний нами раніше в (24).

Розглянемо наступні приклади. За напрямну (вихідну) криву, по якій рухається супровідний тригранник із швидкістю  $v_A$ , приймемо ланцюгову лінію, натуральне рівняння якої має вигляд

$$k = \frac{a}{a^2 + s^2}, \quad (31)$$

де  $a$  – постійна величина.

Абсолютну швидкість можна знайти за формулами (18) та (23) і абсолютну траєкторію за рівняннями (27) у випадку, коли відносний рух у триграннику заданий залежностями  $\rho_r = \rho_r(s)$  і  $\rho_n = \rho_n(s)$ . Якщо ж ці залежності мають вигляд  $\rho = \rho(s)$  і  $\varphi = \varphi(s)$ , то потрібно скористатися формулами (22), (24) і (30). Приймемо другий варіант і розглянемо кінематику точки  $B$  при деяких залежностях  $\rho = \rho(s)$  і  $\varphi = \varphi(s)$ . Після підстановки (21) в (30) та інтегрування одержимо:

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{\rho}{\sqrt{a^2 + s^2}} (a \cos \varphi - s \sin \varphi) + a \operatorname{Arsh} \frac{s}{a}; \\ y_B &= \frac{\rho}{\sqrt{a^2 + s^2}} (a \sin \varphi + s \cos \varphi) + \sqrt{a^2 + s^2}. \end{aligned} \quad (32)$$



При підстановці в (32) заданих залежностей  $\rho = \rho(s)$  і  $\varphi = \varphi(s)$  отримаємо параметричні рівняння абсолютної траєкторії точки  $B$ . Абсолютну швидкість в проекціях на орти супровідного тригранника знайдемо із виразу (22), а її модуль – із виразу (24). На рис. 3 за рівняннями (32) побудовані абсолютні траєкторії точки  $B$  для різних залежностей  $\rho = \rho(s)$  і  $\varphi = \varphi(s)$ . Значення постійної  $a$  прийнято  $a = 25$ , зміна дугової координати  $s$  відбувалася в межах  $s = 0 \dots 100$ . При  $\rho = 0$  із рівнянь (32) одержуємо вихідну криву – ланцюгову лінію, яка на рис. 3 зображена потовщеною. На рис. 4 показано графіки зміни модуля абсолютної швидкості точки  $B$ , які побудовані в залежності від дугової координати  $s$ , за формулою (24) при  $v_A = 1$  м/с для траєкторій, зображених на рис. 3, в і на рис. 3, д.

Перейдемо до наступного етапу – знаходження абсолютного прискорення точки  $B$ . За класичною теорією воно визначається як геометрична сума трьох векторів

$$\overline{w}_B = \overline{w}_e + \overline{w}_r + 2\overline{\omega} \times \overline{v}_r. \quad (33)$$

Перший вектор із (33) носить назву переносного прискорення і визначається за формулою [4], стор. 208, формула (13.17)}

$$\overline{w}_e = \overline{w}_A + \overline{\varepsilon} \times \overline{\rho} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{\rho}), \quad (34)$$

де  $\overline{\varepsilon}$  – вектор кутового прискорення.

Знайдемо вирази для всіх складових виразу (34) та їх суму. Перший вектор  $\overline{w}_A$  прискорення початку координат тригранника знайдемо диференціюванням відповідної швидкості, при цьому від параметра часу  $t$  переходимо до дугової координати  $s$

$$\overline{w}_A = \frac{d\overline{v}_A}{dt} = \frac{d\overline{v}_A}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v_A \frac{d\overline{v}_A}{ds} = v_A \frac{d}{ds} (v_A \overline{\tau}) = v_A \left( \frac{dv_A}{ds} \overline{\tau} + v_A \frac{d\overline{\tau}}{ds} \right). \quad (35)$$

Вираз в (35)  $\frac{d\overline{\tau}}{ds}$  є першою із формул Френе (16). Із врахуванням (16) вираз (35) запишеться

$$\overline{w}_A = v_A \cdot v'_A \cdot \overline{\tau} + v_A^2 \cdot k \cdot \overline{n}. \quad (36)$$

У випадку, коли  $v_A = const$  прискорення вершини тригранника матиме одну складову, спрямовану по головній нормалі  $\overline{n}$ , а його модуль матиме значення  $v_A^2 \cdot k$  або  $v_A^2 / r$ , оскільки  $k = 1/r$ , де  $r$  – радіус кривини кривої. Це відоме так зване нормальне прискорення. Якщо ж швидкість руху тригранника змінна, то виникає ще одна складова, спрямована по дотичній – тангенціальне прискорення.

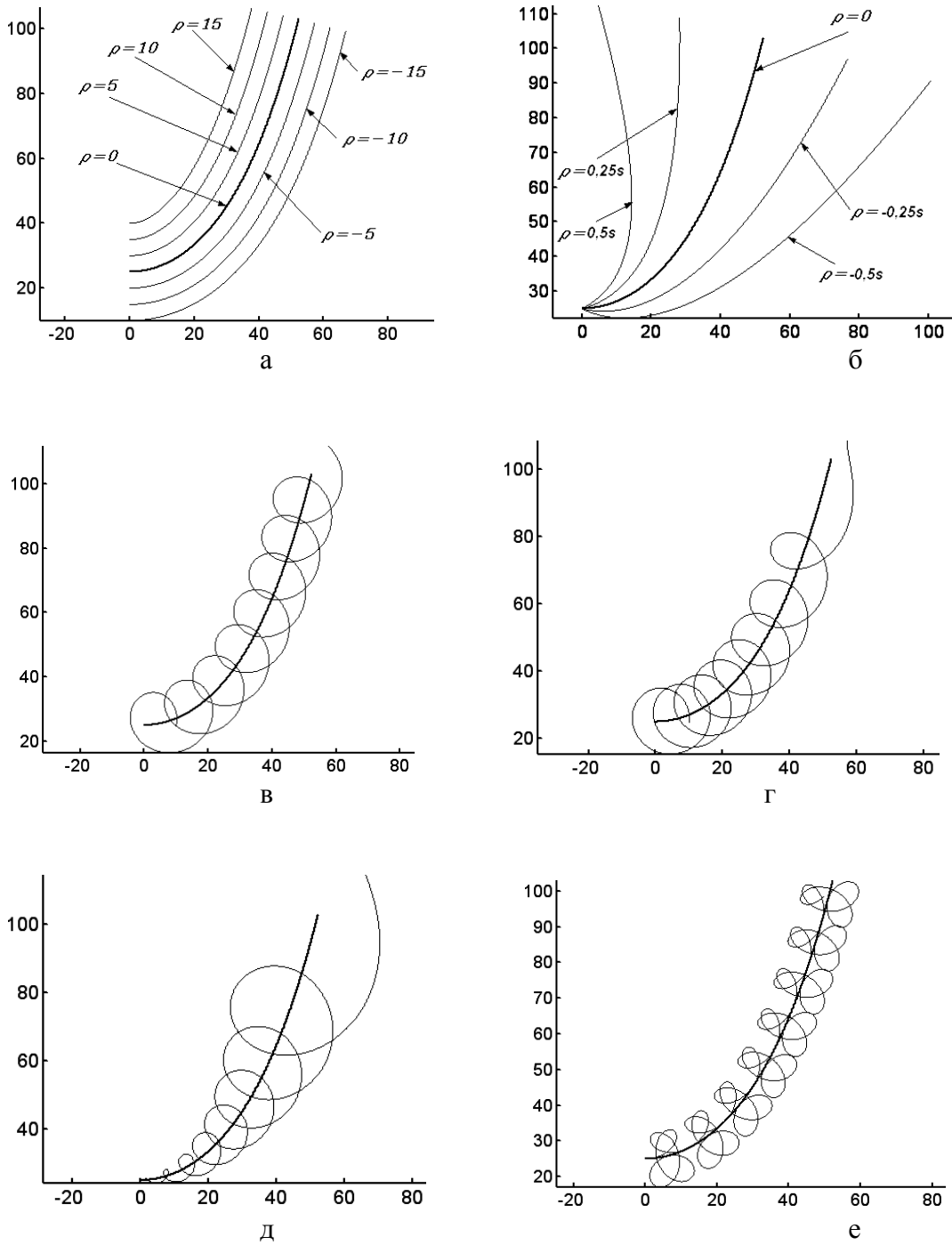


Рис. 3. Абсолютні траєкторії точки  $B$  для різних залежностей  $\rho = \rho(s)$  і  $\varphi = \varphi(s)$ , побудовані за рівняннями (32):  
а)  $\varphi = 90^\circ - const$ ;  $\rho = const$  (траєкторії – еквідистантні криві);  
б)  $\varphi = 90^\circ - const$ ;  $\rho = cs$  – змінюється за лінійною залежністю;  
в)  $\varphi = 0,5s$ ;  $\rho = 10 - const$ ;  
г)  $\varphi = s - 0,005s^2$ ;  $\rho = 10 - const$ ;  
д)  $\varphi = s - 0,005s^2$ ;  $\rho = 0,25s$ ; е)  $\varphi = 0,5s$ ;  $\rho = 10 \sin s$ .

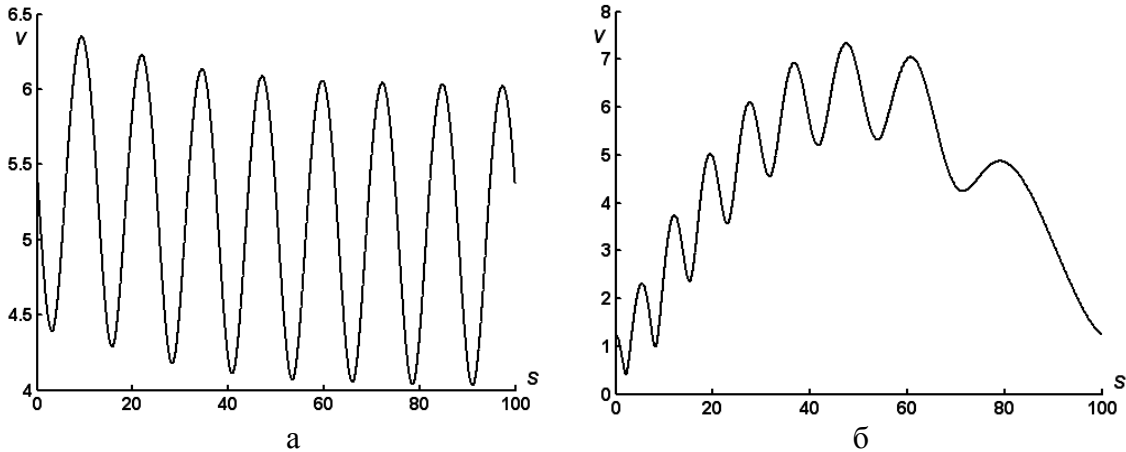


Рис. 4. Графіки зміни модуля абсолютної швидкості точки  $V$  у функції дугової координати  $s$  при  $v_A = 1 \text{ м/с}$ : а) графік зміни швидкості точки для її абсолютної траєкторії, показаної на рис. 3, в; б) графік зміни швидкості точки для її абсолютної траєкторії, показаної на рис. 3, д.

Отже, вираз (36) є відомою формулою для визначення прискорення руху точки по кривій, в якій замість змінної часу служить дугова координата  $s$ . До другої складової (34) входить вектор кутового прискорення  $\bar{\varepsilon}$ . Для його визначення продиференціюємо вектор кутової швидкості  $\bar{\omega}$ . Згідно (2) відома величина  $\omega: \omega = v_A \cdot k$ . Оскільки вектор  $\bar{\varepsilon}$  спрямований по бінормалі  $\bar{b}$ , то диференціювання дає

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v_A \frac{d\bar{\omega}}{ds} = v_A \frac{d}{ds} (\bar{b} \cdot v_A \cdot k) = v_A \left[ \bar{b}' \cdot v_A \cdot k + \bar{b} (v_A \cdot k)' \right]. \quad (37)$$

Із врахуванням формул Френе (16) і після подальшого диференціювання одержимо

$$\bar{\varepsilon} = \bar{b} \cdot v_A (v_A' \cdot k + v_A \cdot k'). \quad (38)$$

Тепер знайдемо векторний добуток  $\bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}$

$$\bar{\varepsilon} \times \bar{\rho} = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ 0 & 0 & v_A (v_A' \cdot k + v_A \cdot k') \\ \rho_\tau & \rho_n & \rho_b \end{vmatrix} = \quad (39)$$

$$= -\bar{\tau} \cdot v_A \cdot \rho_n (v_A' \cdot k + v_A \cdot k') + \bar{n} \cdot v_A \cdot \rho_\tau (v_A' \cdot k + v_A \cdot k').$$

Останню складову у виразі (34) – векторний добуток  $\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho})$  знаходимо аналогічно. Нижче наводимо остаточний результат:

$$\bar{\omega} \times \bar{\rho} = -\bar{\tau} \cdot \rho_n \cdot v_A \cdot k + \bar{n} \cdot \rho_\tau \cdot v_A \cdot k. \quad (40)$$

$$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) = -\bar{\tau} \cdot v_A^2 \cdot k^2 \cdot \rho_\tau - \bar{n} \cdot v_A^2 \cdot k^2 \cdot \rho_n. \quad (41)$$



Підставивши вектори (36), (39) і (41) в (34), після групування членів по відповідних напрямках ортів одержимо вектор переносного прискорення

$$\bar{w}_e = \bar{\tau}v_A[v'_A - \rho_n(v'_A k + v_A k') - v_A k^2 \rho_\tau] + \bar{n}v_A[v_A k + \rho_\tau(v'_A k + v_A k') - v_A k^2 \rho_n]. \quad (42)$$

Наступна складова у формулі (33) носить назву відносного прискорення, тобто це є прискорення точки  $B$  по відношенню до системи тригранника Френе. Його можна одержати диференціюванням виразу відносної швидкості. Саму ж відносну швидкість  $v_r$  одержимо, як похідну радіус-вектора  $\bar{\rho}$  в системі супровідного тригранника

$$\bar{v}_r = \frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v_A \frac{d\bar{\rho}}{ds}. \quad (43)$$

Після диференціювання виразу (43) одержимо

$$\bar{w}_r = \frac{d}{dt} \left( v_A \frac{d\bar{\rho}}{ds} \right) = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d}{ds} \left( v_A \frac{d\bar{\rho}}{ds} \right) = v_A (v'_A \bar{\rho}' + v_A \bar{\rho}''). \quad (44)$$

Розклавши вектор (44) по напрямках ортів тригранника, одержимо

$$\bar{w}_r = v_A [\bar{\tau}(v'_A \rho'_\tau + v_A \rho''_\tau) + \bar{n}(v'_A \rho'_n + v_A \rho''_n)]. \quad (45)$$

Нарешті третій, останній вектор із виразу (33), носить назву коріолісового прискорення. Його знаходимо, як подвоєний векторний добуток векторів кутової швидкості  $\bar{\omega} = \bar{b} \cdot v_A \cdot k$  і відносної швидкості  $v_r$  (43). Матимемо

$$2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ 0 & 0 & v_A k \\ v_A \rho'_\tau & v_A \rho'_n & 0 \end{vmatrix} = 2v_A^2 k (-\bar{\tau} \rho'_n + \bar{n} \rho'_\tau). \quad (46)$$

Підставивши (42), (45) і (46) в (33) і згрупувавши складові векторів за напрямками ортів тригранника, остаточно одержимо вираз для абсолютного прискорення точки  $B$

$$\begin{aligned} \bar{w}_B = \bar{\tau}v_A \left[ v'_A (1 - k\rho_n + \rho'_\tau) + v_A (\rho''_\tau - k'\rho_n - k^2 \rho_\tau - 2k\rho'_n) \right] + \\ + \bar{n}v_A \left[ v'_A (k\rho_\tau + \rho'_n) + v_A (\rho''_n - k'\rho_\tau - k^2 \rho_n + k + 2k\rho'_\tau) \right]. \end{aligned} \quad (47)$$

За формулою (47) можна знайти абсолютне прискорення точки  $B$  у складному русі, якщо відомий закон її руху у стичній площині тригранника  $\rho_\tau = \rho_\tau(s)$ ,  $\rho_n = \rho_n(s)$ , а сам тригранник рухається із заданою швидкістю  $v_A = v_A(s)$  вздовж плоскої кривої із відомим натуральним рівнянням  $k = k(s)$ . Слід підкреслити, що абсолютне



прискорення одержуємо в проекціях на осі рухомого супровідного тригранника кривої.

Знайдемо формулу абсолютного прискорення точки  $B$ , коли її рух задано рівнянням (21), тобто

$$\rho_\tau = \rho \cos \varphi, \quad \rho_n = \rho \sin \varphi. \quad (48)$$

Диференціювавши двічі (48) отримаємо:

$$\begin{aligned} \rho'_\tau &= \rho' \cos \varphi - \rho \varphi' \sin \varphi; \\ \rho'_n &= \rho' \sin \varphi + \rho \varphi' \cos \varphi; \\ \rho''_\tau &= (\rho'' - \rho \varphi'^2) \cos \varphi - (2\rho' \varphi' + \rho \varphi'') \sin \varphi; \\ \rho''_n &= (\rho'' - \rho \varphi'^2) \sin \varphi + (2\rho' \varphi' + \rho \varphi'') \cos \varphi. \end{aligned} \quad (49)$$

Підстановкою (49) у (47) одержуємо вираз для знаходження абсолютного прискорення точки  $B$  у випадку, коли її відносний рух заданий відстанню  $\rho = \rho(s)$  і кутом  $\varphi = \varphi(s)$

$$\begin{aligned} \bar{w}_B &= \bar{v}_A \{v'_A [1 + \rho' \cos \varphi - \rho(k + \varphi') \sin \varphi] + \\ &+ v_A [\rho'' - \rho(k + \varphi')^2] \cos \varphi - [2\rho'(k + \varphi') + k'\rho + \rho \varphi''] \sin \varphi\} + \\ &+ \bar{w}_A \{v'_A [\rho' \sin \varphi + \rho(k + \varphi') \cos \varphi] + \\ &+ v_A [\rho'' - \rho(k + \varphi')^2] \sin \varphi + [2\rho'(k + \varphi') + k'\rho + \rho \varphi''] \cos \varphi + k\}. \end{aligned} \quad (50)$$

Модуль вектора абсолютного прискорення точки  $B$  (47), яка задана проекціями на орти тригранника, або (50), де точка  $B$  задана відстанню  $\rho$  і кутом  $\varphi$ , визначається, як геометрична сума його проєкцій на орти  $\bar{\tau}$  і  $\bar{n}$

$$w_B = \sqrt{w_{B\tau}^2 + w_{Bn}^2}. \quad (51)$$

Формули (47), (50) для знаходження абсолютного прискорення одержані методами класичної теорії із знаходженням кожної складової: переносного прискорення, відносного прискорення і прискорення Коріоліса.

А тепер покажемо, як просто ці формули отримати за допомогою формул Френе, не вдаючися до знаходження кожної окремої складової абсолютного прискорення. В цьому полягає мета даного дослідження.

Знаходження вектора абсолютного прискорення точки  $B$  здійснюється диференціюванням виразів (18) або (22) абсолютної швидкості, так як це робиться при дослідженні звичайного руху. Щоправда, при цьому слід диференціювати по дуговій координаті  $s$ , оскільки вирази (18), (22) є її функціями. Диференціювання, наприклад, виразу (18) розпишемо детально із використанням формул Френе (16)





$$\begin{aligned}
\bar{v}_B' &= v_A' \left[ \bar{\tau}(1 - k\rho_n + \rho_\tau') + \bar{n}(k\rho_\tau + \rho_n') \right] + v_A \left[ \bar{\tau}(1 - k\rho_n + \rho_\tau') + \bar{n}(k\rho_\tau + \rho_n') \right]' = \\
&= v_A' \left[ \bar{\tau}(1 - k\rho_n + \rho_\tau') + \bar{n}(k\rho_\tau + \rho_n') \right] + \\
&+ v_A \left[ \bar{\tau}'(1 - k\rho_n + \rho_\tau') + \bar{\tau}(1 - k\rho_n + \rho_\tau')' + \bar{n}'(k\rho_\tau + \rho_n') + \bar{n}(k\rho_\tau + \rho_n')' \right] = \quad (52) \\
&= v_A' \left[ \bar{\tau}(1 - k\rho_n + \rho_\tau') + \bar{n}(k\rho_\tau + \rho_n') \right] + v_A \left[ \bar{n}k(1 - k\rho_n + \rho_\tau') + \right. \\
&\left. + \bar{\tau}(-k'\rho_n - k\rho_n' + \rho_\tau'') - \bar{\tau}k(k\rho_\tau + \rho_n') + \bar{n}(k'\rho_\tau + k\rho_\tau' + \rho_n'') \right].
\end{aligned}$$

Групуючи у виразі (52) складові за напрямками ортів  $\bar{\tau}$  і  $\bar{n}$ , одержимо

$$\begin{aligned}
\bar{v}_B' &= \bar{\tau} \left[ v_A'(1 - k\rho_n + \rho_\tau') + v_A(\rho_\tau'' - k'\rho_n - k^2\rho_\tau - 2k\rho_n') \right] + \\
&+ \bar{n} \left[ v_A'(k\rho_\tau + \rho_n') + v_A(\rho_n'' + k'\rho_\tau - k^2\rho_n + k + 2k\rho_\tau') \right]. \quad (53)
\end{aligned}$$

Порівнюючи вирази (47) і (53) бачимо, що вони відрізняються тільки множником  $v_A$ . Це і зрозуміло, оскільки вираз (18) ми диференціювали по дуговій координаті  $s$ . При диференціюванні по часу  $t$ , як це потрібно робити для знаходження прискорення, одержимо

$$\bar{w}_B = \frac{d\bar{v}_B}{dt} = \frac{d\bar{v}_B}{ds} \frac{ds}{dt} = v_A \frac{d\bar{v}_B}{ds}, \quad (54)$$

тобто із виразу (54) видно, що одержаний результат (53) потрібно помножити на швидкість  $v_A$ . Після цього вираз (53) буде аналогічний виразу (47). Таким же шляхом диференціювання виразу (22) можна одержати вираз (50).

Отже, було показано, як просто знаходити вектор абсолютного прискорення точки  $B$  у складному русі із застосуванням супровідного тригранника переносної траєкторії і формул Френе. Одержаний результат можна сформулювати у вигляді наступного правила:

**Якщо матеріальна точка в системі рухомого супровідного тригранника кривої задана радіус-вектором у формі (14), то для знаходження її абсолютного прискорення в проєкціях на орти цього ж тригранника необхідно продиференціювати вираз абсолютної швидкості (18) по дуговій координаті  $s$  із застосуванням формул Френе і отриманий результат помножити на швидкість руху вершини тригранника по кривій.**

Сформульоване правило також стосується формули (21), коли матеріальна точка в стичній площині тригранника описана в полярній системі координат, тобто потрібно диференціювати вираз (22) і отриманий результат помножити на швидкість руху вершини тригранника по кривій.

Розглянемо приклад, який висвітлює динаміку руху матеріальної точки в складному русі.



Причеп трактора, що містить плоский вантаж рухається із постійною швидкістю  $v_A$  по кривій, якою є ланцюгова лінія, задана натуральним рівнянням (31). В певний момент часу, по мірі зростання кривини кривої, він починає рухатися відносно причепа. Знайти відносну і абсолютну траєкторії руху вантажу, а також його швидкість, якщо місцезнаходження вантажу в причепі до початку ковзання і коефіцієнт тертя  $f$  відомі.

Нехтуючи розмірами вантажу, приймемо його за матеріальну точку, що знаходиться у передньому лівому куті причепа по ходу трактора. Цей кут приймаємо за вершину тригранника, який жорстко прив'язаний до причепа, причому орт  $\bar{\tau}$  спрямуємо по дотичній до ланцюгової лінії, вздовж якої рухається вказана точка причепа, а орт  $\bar{n}$  – в бік центра кривини кривої. Параметричні рівняння ланцюгової лінії після переходу від натурального рівняння до параметричних рівнянь згідно (25), (26) приймають наступний вигляд

$$x = a \operatorname{Arsh} \frac{s}{a}; \quad y = \sqrt{a^2 + s^2}. \quad (55)$$

Ця крива має вісь симетрії, яка проходить через вершину (при  $s = 0$ ), у якій кривизна найбільша і приймає значення  $k = 1/a$ . При русі тригранника по кривій із постійною швидкістю в напрямі вершини буде рости кривизна ланцюгової лінії, отже і відцентрова сила. В такому випадку може наступити момент, коли сила тертя буде подолана і почнеться відносний рух вантажу в системі тригранника (або причепа).

Для складання рівняння руху у вигляді  $m \overline{w_B} = \bar{F}$  потрібно знайти вираз абсолютного прискорення частинки  $B$ . Його одержимо із (47) при  $v'_A = 0$ . Оскільки прикладена сила тертя  $F = fmg$  діє в напрямі, протилежному відносній швидкості, то потрібно знайти проекції одиничного вектора дотичної до відносної траєкторії. Його проекції на орти  $\bar{\tau}$  і  $\bar{n}$  матимуть таке ж співвідношення, що і складові відносної швидкості  $\rho'_\tau$  і  $\rho'_n$  тобто

$$\frac{\rho'_\tau}{\sqrt{\rho'^2_\tau + \rho'^2_n}} \quad \text{і} \quad \frac{\rho'_n}{\sqrt{\rho'^2_\tau + \rho'^2_n}}. \quad (56)$$

Розпишемо векторне рівняння  $m \overline{w_B} = \bar{F}$  в проекціях на орти тригранника, взявши до уваги (50) і (56), а також те, що  $v_A = \text{const}$ . Після скорочення на масу  $m$  частинки, одержимо систему двох диференціальних рівнянь у вигляді:



$$v_A^2(\rho_\tau'' - k'\rho_n - k^2\rho_\tau - 2k\rho_n') = -fg \cdot \frac{\rho_\tau'}{\sqrt{\rho_\tau'^2 + \rho_n'^2}}; \quad (57)$$

$$v_A^2(\rho_n'' + k + k'\rho_\tau - k^2\rho_n + 2k\rho_\tau') = -fg \cdot \frac{\rho_n'}{\sqrt{\rho_\tau'^2 + \rho_n'^2}},$$

$$\text{де } k = \frac{a}{a^2 + s^2}; \quad k' = -\frac{2as}{(a^2 + s^2)^2}.$$

Графічне представлення результатів чисельного інтегрування системи (57) показано на рис. 5. Інтегрування здійснювалося при зміні дугової координати  $s$  від  $-80$  м до  $80$  м. Значення постійних прийнято:  $a = 25$ ;  $f = 0,35$ ;  $v_A = 10$  м/с. Із рис. 5, а видно, що відносний рух вантажу почався приблизно при  $s \approx -10$  м і закінчився при  $s \approx 25$  м, при цьому максимальна відносна швидкість досягла значення  $v_r \approx 0,8$  м/с.

Значення дугової координати  $s$ , при якому почався відносний рух, можна визначити і аналітичним шляхом. Відносний рух почнеться тоді, коли відцентрова сила у вершині тригранника (тобто при  $\rho_\tau = \rho_n = 0$ )  $F_c = mv_A^2 k$  перевищить силу тертя  $F_m = fmg$ . Прирівнявши ці сили і підставивши вираз  $k = k(s)$ , одержимо рівняння із невідомим значенням дугової координати  $s$  такого вигляду

$$\frac{m v_A^2 a}{a^2 + s^2} = fmg,$$

звідки

$$s = \sqrt{\frac{a}{fg} (v_A^2 - afg)}. \quad (58)$$

Розв'язок рівняння (58) при зазначених постійних показує, що відносний рух вантажу почнеться при  $s > -10,15$  м. Пройшовши шлях до симетричної точки при  $s = 10,15$  м, вантаж продовжує рух по кузову, але уже із сповільненням, оскільки величини відцентрової сили недостатньо для продовження такого руху.

Графік траєкторії відносного руху (рис. 5, б) показує, що вантаж у причепі зміститься приблизно на  $1,5$  м в бік протилежного борта і приблизно на  $0,2$  м в бік, протилежний напрямку руху трактора.

Графіки абсолютної траєкторії (рис. 5, в) показують, що для різних коефіцієнтів тертя відносний рух вантажу у причепі починається із різних точок ланцюгової лінії. Після припинення відносного руху абсолютною траєкторією вантажу є крива, паралельна ланцюговій лінії.

З графіка зміни абсолютної швидкості (рис. 5, г) видно, що після припинення відносного руху абсолютна швидкість вантажу буде більшою, ніж була до нього, оскільки займає інше положення в системі тригранника.

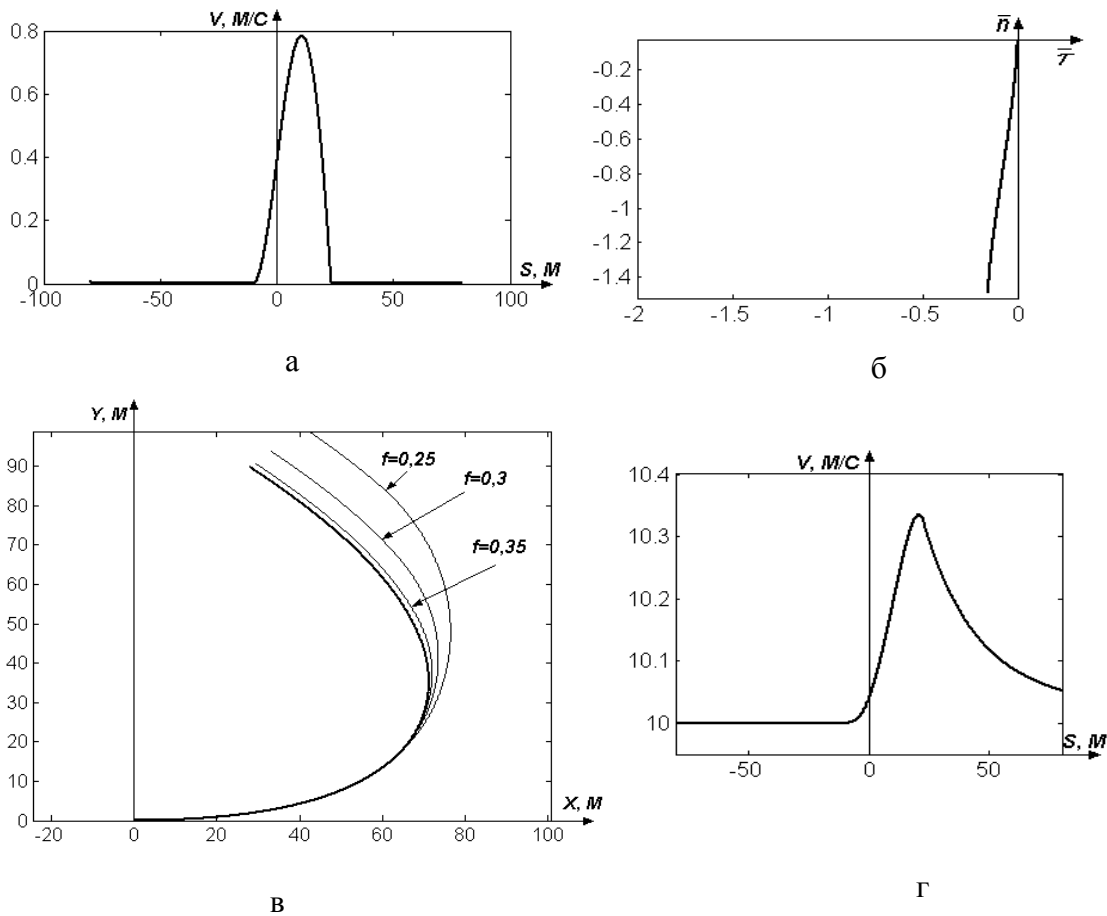


Рис. 5. Графіки залежностей, одержаних в результаті інтегрування системи (57): а) графік зміни відносної швидкості; б) траєкторія відносного руху в системі тригранника; в) ланцюгова лінія і абсолютні траєкторії руху (додатково показано при  $f = 0,3$  і  $f = 0,25$ ); г) графік зміни абсолютної швидкості.

Можливі й інші приклади дослідження схожих процесів.

*Висновки.* Застосування супровідного тригранника плоскої кривої за рухому систему координат, по відношенню до якої здійснюється відносний рух точки є цілком можливим при дослідженнях складного руху матеріальної точки по площині. Формули Френе дають можливість досить швидко і просто знаходити абсолютну швидкість матеріальної точки у складному її русі в проєкціях на орти тригранника та знаходити абсолютну траєкторію в нерухомій системі координат. При цьому, значно спрощується знаходження абсолютного прискорення точки у складному русі в проєкціях на орти тригранника, куди автоматично закладаються всі три його складові. Це дозволяє по новому розв'язувати задачі динаміки матеріальної точки в рухомій системі тригранника Френе.



Розроблений метод значно спрощує розв'язання задач складного руху матеріальної точки, що обумовлює його подальший розвиток та ефективне застосування.

*Література.*

1. *Василенко П.М.* Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин. / *П.М. Василенко* – Киев: Изд-во Укр. акад. сельск. наук, 1960. – 283 с.
2. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. / *А.И. Лурье* – М.: ФМ, 1961. – 823 с.
3. *Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.* Курс теоретической механики. В двух томах – Т. 1: Статика и кинематика. / *Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье* – М.: ГИТТЛ, 1954. – 379 с.
4. *Бутенин Н.В., Луиц Я.Л., Меркин Д.Р.* Курс теоретической механики. В двух томах – Т. 1: Статика и кинематика. / *Н.В. Бутенин, Я.Л. Луиц, Д.Р. Меркин* – 4-е изд., исправленное – М.: Наука, 1985. – 240 с.
5. *Пилипака С.Ф.* Дослідження руху матеріальної частинки по горизонтальному диску, який обертається навколо вертикальної осі, за допомогою рухомого натурального тригранника і формул Френе / *С.Ф. Пилипака* // *Механізація та електрифікація сільського господарства. Міжвідомчий тематичний науковий збірник.* – Глеваха, 2005. – Вип. 89. – С. 49-60.
6. *Пилипака С.Ф.* Кінематична інтерпретація руху супровідних тригранників Френе і Дарбу через внутрішні параметри кривих / *С.Ф. Пилипака* // *Науковий вісник Національного аграрного університету.* – К.: НАУ, 1998. – Вип.4. – С. 143-146.
7. *Милинский В.И.* Дифференциальная геометрия. / *В.И. Милинский* – Л.: КУБУЧ, 1934. – 332 с.

## **К ТЕОРИИ СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ ПО ПЛОСКОСТИ**

Бабка В.Н.

**Аннотация** – рассмотрено сложное движение точки, относительное перемещение которой происходит в подвижном трехграннике кривой, заданной натуральными уравнениями. Переносное движение трехгранника определяется дифференциальными характеристиками кривой. Доказана правомочность использования формул Френе для нахождения абсолютной скорости и ускорения точки в проекциях на орты подвижного трехгранника. Найдены абсолютные траектории движения, осуществлено визуализацию полученных результатов.



## **TO THE THEORY OF DIFFICULT MOTION OF FINANCIAL PARTICLE ON A PLANE**

V. Babka

### *Summary*

**The complicated driving of a point which relative transition of which happens in mobile three-edge of a curve given by the natural equations is considered. The portable driving of three-edge is determined by differential performances of a curve. Competence of usage of the Frenet's formulas for determination of absolute velocity of a point in projections to basis vectors of mobile three-edge is proved. The absolute trajectories of driving are retrieved visualization of the obtained outcomes is realized.**