УДК 536.21

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ТЕПЛОВИХ СТАЦІОНАРНИХ ПОЛІВ У ДВУШАРУВАТИХ КОНСТРУКЦІЯХ

Бойко С.Б., інж.
Таврійський державний агротехнологічний університет
Тел. (0619) 42-68-74, e-mail: svitlana.boiko@tsatu.edu.ua

Анотація **– запропоновано метод розрахунку двовимірних стаціонарних, періодичних по просторовій координаті, теплових полів у двошарових плитах. На верхній і нижній межах плити температура описується парними періодичними функціями з однаковими періодами. На спільної межі шарів виконується умова неперервності температурного поля і рівність теплових потоків. Шукані температури в кожному із шарів записано у вигляді тригонометричних рядів по косинусах. Сформульовано алгоритм розв'язання задачі. Наведено приклади результатів числових досліджень для різних характеристик шарів. Проведено порівняльний аналіз і зроблено висновки.**

Ключові слова **– двошарові плити, гармонійне рівняння, ряд Фур'є, закон Фур'є.**

Постановка проблеми. Елементами багатьох інженерних споруд є багатошарові плити, пластини, основи, оболонки. Це пов'язано з тим, що за рахунок шаруватості матеріалів можна досягти зменшення ваги, поліпшення звукоізоляційних, теплоізоляційних властивостей при зменшенні їх вартості. При розробленні відповідних споруд необхідно вміти розраховувати результати дій різних фізичних полів на двошарові конструкції. Особливий інтерес становить розробка аналітичних методів, оскільки в цьому випадку можна гарантувати необхідну точність обчислень і досліджувати вплив фізичних і механічних характеристик конструкцій на їх поведінку. Однак, такі розв'язки можна отримати лише у виняткових випадках. Одним із важливих видів фізичних полів є теплове поле. Таким чином, задача аналітичного опису теплового поля в двошаровій плиті з плоскопаралельними шарами актуальна.

Аналіз останніх досліджень. Докладніший аналіз побудови та застосування моделі, яка описує теплопровідність багатошарових конструкцій, наведено у роботі [1]. Розв'язанню деяких задач термопружності присвячено чимало фундаментальних досліджень, як, на-

© С.Б. Бойко

приклад, [2 – 4]. Відомі різні способи отримання точних і наближених аналітичних рішень. Метод однорідних рішень використовується в роботах [5,6]. Метод функцій Гріна, з використанням апарату узагальнених функцій, використовується в роботі [7]. Метод жорсткістних функцій до подібних задач застосовувався в [8]. Наближені методи аналізу термопружних багатошарових плівок обговорюються в [9].

Формулювання цілей статті. Метою публікації є отримання функції, які описують зміни температурного поля в двошарової плиті за допомогою розкладання в ряди Фур'є невідомих функції.

Основна частина. Розглянемо двошарову плиту, на верхній і нижній межах якої задана температура, причому теплове поле в плиті стаціонарне. Будемо розглядати двовимірну задачу, тобто вважаємо, що вздовж одного з напрямків температурне поле не змінюється. На верхній межі верхнього і нижній межі нижнього шарів температура описується парними періодичними функціями. На загальній межі шарів виконується умова неперервності температурного поля і рівність теплових потоків (закон Фур'є). Кожен шар характеризується товщиною h_i, коефіцієнтами теплопровідності α_i, де *i* номер шару Ставиться задача про визначення функцій, якими характеризуються зміни температурного поля в кожному шарі.

У кожному шарі вводимо локальну декартову систему координат з початком на верхній межі відповідного шару так, щоб осі OZ_i лежали на одній прямій і були спрямовані вглиб шару. Задача зводиться до розв'язання гармонійного рівняння для кожної з функцій $T_i(x,z)$, яка описує температуру в кожному шарі:

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} = 0\,. \tag{1}$$

Граничні умови задаються для верхньої межі верхнього шару і для нижньої межі нижнього шару

$$T_1(x,0) = f(x), \qquad T_2(x,h_2) = g(x). \tag{2}$$

Функції $f(x)$, $g(x)$ за умовою є періодичними з періодом $2b$ і парними, тому використовуємо розклад в ряди Фур'є

$$f(x) = \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot \cos\lambda_k x, \quad g(x) = \frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot \cos\lambda_k x, \tag{3}$$

де $$f_0 = \frac{2}{b}\int_0^b f(s)ds, \qquad g_0 = \frac{2}{b}\int_0^b g(s)ds$$

$$f_k = \frac{2}{b}\int_0^b f(s)\cos\lambda_k s ds, \qquad g_k = \frac{2}{b}\int_0^b g(s)\cos\lambda_k s ds, \ \lambda_k = \frac{\pi k}{b}. \tag{4}$$

На загальній межі шарів виконуються умови спряження

$$T_1(x, h_1) = T_2(x, 0), \tag{5}$$

$$\alpha_1 \frac{\partial T_1}{\partial z}(x, h_1) = \alpha_2 \frac{\partial T_2}{\partial z}(x, 0). \tag{6}$$

Шукані функції $T_i(x,z)$ будуть задовольняти умовам $T_i(x+2b, z) = T_i(x,z)$. Тому їх можна розкласти в тригонометричні ряди

$$T_i(x,z) = \frac{a_{i,0}(z)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}(z)\cos\frac{\pi k x}{b}. \tag{7}$$

Для визначення коефіцієнтів Фур'є підставимо (7) в (1). Після того, як розділимо гармоніки, будемо мати систему диференціальних рівнянь:

$$a''_{i,0} = 0, \ a''_{i,k} - \lambda_k^2 a_{i,k} = 0, \ k \in N.$$

Її розв'язок має вигляд

$$a_{i,0} = r_{i,0} + r_{i,1} z, \ a_{i,k} = l_{i,k} ch(\lambda_k z) + \tilde{l}_{i,k} sh(\lambda_k z). \tag{8}$$

Таким чином, температура в i-му шарі описується виразом

$$T_i(x,z) = \frac{r_{i,0} + r_{i,1} z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (l_{i,k} ch(\lambda_k z) + \tilde{l}_{i,k} sh(\lambda_k z))\cos(\lambda_k x). \tag{9}$$

Для розв'язання задачі потрібно знайти вісім коефіцієнтів $r_{i,0}$, $r_{i,k}$, $l_{i,0}$, $l_{i,k}$ $\tilde{l}_{i,0}$, $\tilde{l}_{i,k}$ для кожного шару.

Використовуючи граничні умови (2) і розвинення в ряди Фур'є (9) отримуємо рівності:

$$\frac{r_{1,0}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} l_{1,k}\cos(\lambda_k x)=\frac{f_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} f_{1,k}\cos(\lambda_k x),$$

$$\frac{r_{2,0}+r_{2,1}h_2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(l_{2,k}ch(\lambda_k h_2)+\widetilde{l}_{2,k}sh(\lambda_k h_2))\cos(\lambda_k x)=\frac{g_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} g_k\cdot\cos\lambda_k x.$$

З властивостей рядів Фур'є випливає, що амплітуди повинні збігатися:

$$r_{1,0}=f_0,\quad r_{2,0}+r_{2,1}h_2=g_0, \tag{10}$$

$$l_{1k}=l_k,\quad l_{2,k}\overline{C}_{2,k}+\widetilde{l}_{2,k}\overline{S}_{2,k}=g_k. \tag{11}$$

З умови спряження шарів (5) маємо

$$\frac{r_{1,0}+r_{1,1}h_1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(l_{1,k}\overline{C}_{1,k}+\widetilde{l}_{1,k}\overline{S}_{1,k})\cos(\lambda_k x)=\frac{r_{2,0}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} l_{2,k}\cos(\lambda_k x),$$

звідки визначаємо наступні рівняння

$$r_{1,0}+r_{1,1}h_1=r_{2,0}, \tag{12}$$

$$l_{1,k}\overline{C}_{1,k}+\widetilde{l}_{1,k}\overline{S}_{1,k}=l_{2,k}. \tag{13}$$

В рівняннях (11), (13) введені позначення

$$\overline{C}_{i,k}=ch(\lambda_k h_i),\ \overline{S}_{i,k}=sh(\lambda_k h_i).$$

Умова спряження (6) дає таку рівність

$$\frac{r_{1,1}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(l_{1,k}\lambda_k\overline{S}_{1,k}+\widetilde{l}_{1,k}\lambda_k\overline{C}_{1,k})\cos(\lambda_k x)=\Delta\frac{r_{2,1}}{2}+\Delta\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{l}_{2,k}\lambda_k\cos(\lambda_k x),$$

з якої отримуємо

$$r_{1,1}=\Delta r_{2,1}, \tag{14}$$

$$l_{1,k}\overline{S}_{1,k}+\widetilde{l}_{1,k}\overline{C}_{1,k}=\Delta\widetilde{l}_{2,k}. \tag{15}$$

Розв'язуючи систему рівнянь (10), (12), (14) знайдемо коефіцієнти для нульової гармоніки

$$r_{1,0} = f_0, \quad r_{1,1} = \frac{g_0 - f_0}{h_1 + \frac{1}{\Delta} h_2}, \quad r_{2,1} = \frac{g_0 - f_0}{\Delta h_1 + h_2}, \quad r_{2,0} = \frac{f_0 h_2 + \Delta g_0 h_1}{\Delta h_1 + h_2}. \qquad (16)$$

З системи рівнянь (11), (13) та (15) маємо

$$l_{1,k} = f_k, \qquad \tilde{l}_{1,k} = \frac{\Delta g_k - f_k(\Delta \overline{C}_{1,k}\overline{C}_{2,k} + \overline{S}_{1,k}\overline{S}_{2,k})}{\Delta \overline{S}_{1,k}\overline{C}_{2,k} + \overline{C}_{1,k}\overline{S}_{2,k}}, \qquad (17)$$

$$l_{2,k} = \frac{\Delta g_k \overline{S}_{1,k} + f_k \overline{S}_{2,k}(\overline{C}_{1,k}^2 - \overline{S}_{1,k}^2)}{\Delta \overline{S}_{1,k}\overline{C}_{2,k} + \overline{C}_{1,k}\overline{S}_{2,k}}, \quad \tilde{l}_{2,k} = \frac{g_k \overline{C}_{1,k} + f_k \overline{C}_{2,k}(\overline{S}_{1,k}^2 - \overline{C}_{1,k}^2)}{\Delta \overline{S}_{1,k}\overline{C}_{2,k} + \overline{C}_{1,k}\overline{S}_{2,k}}.$$

Таким чином, усі необхідні коефіцієнти для знаходження шуканих функції температур знайдені.

Тепер сформулюємо алгоритм обчислення стаціонарного теплового поля двошарової плити:

1. Знаходимо константи f_0, f_k та g_0, g_k за формулами (4).
2. Визначаємо константи $\overline{C}_{i,k}$ та $\overline{S}_{i,k}$ для кожного шару.
3. За формулами (16) та (17) послідовно знаходимо коефіцієнти $r_{i,0}, r_{i,k}, \ l_{i,0}, l_{i,k} \ \tilde{l}_{i,0}, \tilde{l}_{i,k} \ (i = 1{,}2)$.
4. За формулами (9) отримуємо вираз для теплового поля в кожному шарі.

Якщо межові умови на верхній та нижній межах плити описуються скінченими тригонометричними поліномами, то запропонований алгоритм дає точний розв'язок.

Наведемо розв'язки задачі про розподіл тепла в двошаровій плиті, шари якої мають однакові товщини, що дорівнюють $h_1 = h_2 = 1$. На верхній межі плити температура задана функцією $f(x) = T_0 \cos x$, де T_0- характерна температура, яка вимірюється в C^o. На нижній межі температура описується формулою $g(x) = T_0(1 + \cos x - \cos 2x)$, яка також є періодичною з періодом 2π.

На рис.1, 3 та 5 зображено розподіл температур у плиті в рамках одного періоду в системі координат, пов'язаній з першим шаром. В наведених графіках будується функція $\tilde{T}(x,z) = \dfrac{T(x,z)}{T_0}$.

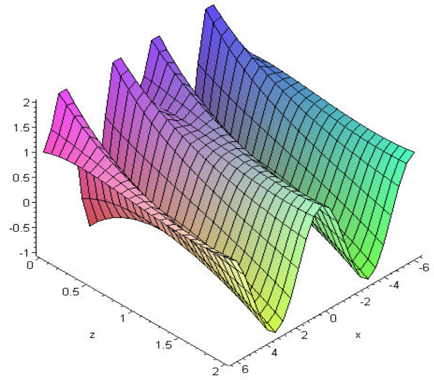

Рис. 1. Розподіл температур у випадку $\alpha_2 = \alpha_1$

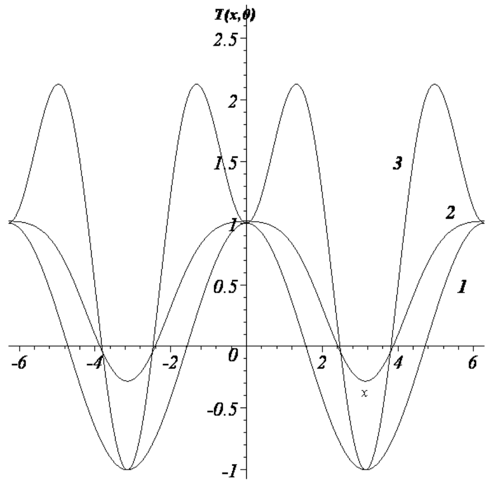

Рис. 2. Температура на межах шарів у випадку $\alpha_2 = \alpha_1$

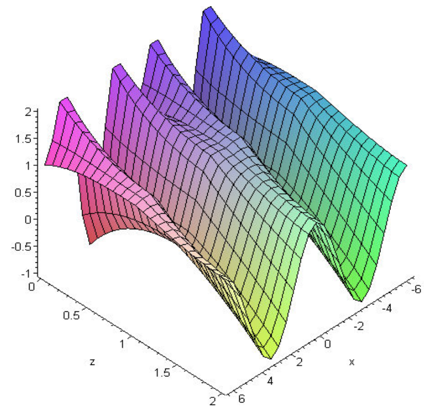

Рис. 3.Розподіл температур у випадку $\alpha_2 = 0{,}1\alpha_1$.

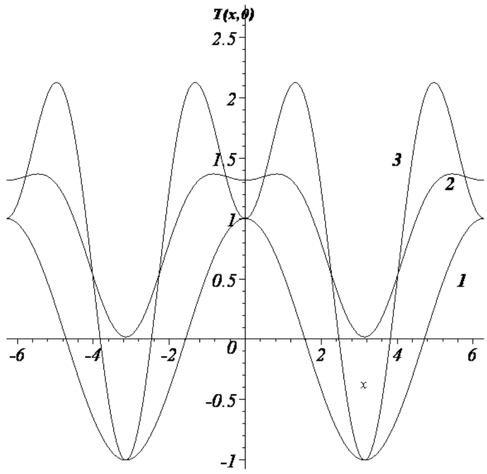

Рис. 4. Температура на межах шарів у випадку $\alpha_2 = 0{,}1\alpha_1$

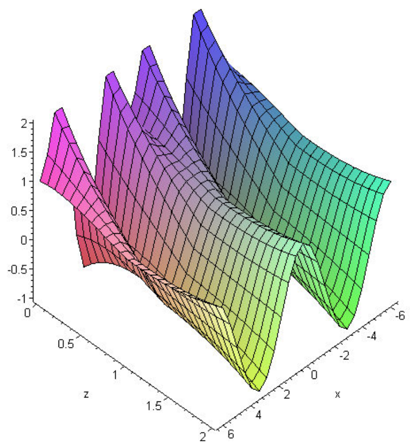

Рис. 5. Розподіл температур у випадку $\alpha_2 = 10\alpha_1$.

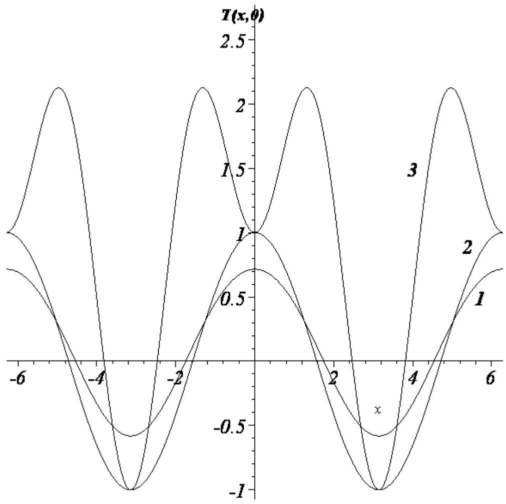

Рис.6. Температура на межах шарів у випадку $\alpha_2 = 10\alpha_1$

На рис.2, 4 та 6 зображено двовимірні графіки температури на межах шарів у рамках одного періоду, графіки пронумеровані цифрами 1, 2 та 3 відповідно верхній межі верхнього шару, контактної межі та нижньої межі нижнього шару.

На рис.1 та 2 наведено результати для значень $\alpha_1 = \alpha_2$, тобто для однорідної плити. На рис.3 та 4 – для значень $\alpha_2 = 0.1\alpha_1$. На рис.5 та 6 наведено результати для значень $\alpha_2 = 10\alpha_1$.

Як бачимо, збільшення коефіцієнта теплопровідності другого шару при незмінному коефіцієнті першого шару призводить до зменшення різниці температур між відповідними точками нижньої та верхньої межі цього шару. В другому шарі температура від'ємна, тобто ближча до температури на нижній межі. Це пояснюється тим, що нижній шар є кращими провідниками тепла, ніж перший шар.

Висновки. Запропоновано спосіб розв'язання задачі про двовимірний розподіл температур у двошаровій плиті з плоскопаралельними межами шарів. Вважається, що функції, які описують температуру на верхній та нижній межах, є парними та періодичними з однаковим періодом, тому алгоритм дає точний розв'язок.

Література.

1. *Ухин Д.В.* Математическая модель расчета температуры многослойной конструкции дорожной одежды в условиях перемены температур [Текст] / *Д.В. Ухин* // Вестник ВолгАСУ. Сер.: Стр-во и архит. 2010 – Вып. 17(36). – С.66 – 69.

2. *Подстригач Я.С.* Теплоупругость тел неоднородной структуры [Текст] / *Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно* // М.: Наука, 1984. – 368 с.

3. *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости [Текст] / *А.Д. Коваленко.* – К.: Наук. думка, 1970. – 307 с.

4. *Кудинов В.А.* Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций [Текст] / *В.А.Кадинов, Э.М. Карташов, В.В. Калашников* // М.: Высшая школа. – 2005. – 430 с.

5. *Алтухов Е.В.* Метод однородных решений в трехмерных задачах термоупругости для транспортных пластин [Текст] / *Е.В. Алтухов* // Теорет. и прикл. мех. – 2003. – №37. – С.8–13.

6. *Алтухов Е.В.* Однородные решения трехмерных задач о распространении гармонических волн в транспортных термоупругих пластинах [Текст] / *Е.В. Алтухов, В.П. Шевченко* // Доп. НАН України. – 2007. – №4. – С.49 – 53.

7. *Процюк Б.В.* Метод функцій Гріна в осесиметричних задачах пружності та термопружності кусково-однорідних ортотропних тіл

[Текст] / *Б.В. Процюк* // Мат. методи та фіз..-мех. поля. – 2000. – 43, №1. – С.94–101.

8. *Горынин Г.Л.* Метод жесткостных функций в задачах расчета многослойных стержней при температурных нагрузках [Текст] / *Г.Л.Горынин, Ю.В. Немировский* // Мат. методи та фіз..-мех. поля. 2012. – 55, №2. – С.144–155.

9. *Neng-Hus Zhang.* Thermoelastic stresses in multilayered beams [Text] / *Neng-Hus Zhang* // Thin Solid Films. – 2007. – 515 – P.8402–8406.

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫХ СТАЦИОНАРНИХ ПОЛЕЙ В ДВУХСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

С.Б. Бойко

Аннотация **- предложен метод расчета двумерных стационарных, периодических по пространственной координате, тепловых полей в двухслойных плитах. На верхней и нижней границах плиты температура описывается четными периодическими функциями с одинаковыми периодами. На совместной границе слоев выполняется условие непрерывности температурного поля и равенство тепловых потоков. Искомые температуры в каждом из слоев записаны в виде тригонометрических рядов по косинусам. Приведены примеры результатов численных исследований для различных характеристиках слоёв. Проведен сравнительный анализ и сделаны выводы.**

METHOD FOR DETERMINING THERMAL STATIONARY FIELDS IN TWO-LAYER PLATES

S. Boyko

Summary

The method of calculation of two-dimensional stationary periodic spatial coordinate, thermal fields in the. Supposed that the functions describing the temperature of the upper and lower limits are dual and periodical with similar periods. At joint the border of layers following condition of continuity of the temperature field and the equality of heat flows. The desired temperature in each layer are recorded in the form of trigonometric series of cosines. Are examples of results of numerical investigations. A comparative analysis and conclusions are made.