



УДК 629.1, 631.3

ПОСТРОЕНИЕ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО ПРИВОДНОГО КОЛЕСА С ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДОЙ

Ковбаса В. П., д.т.н.,

Али Ахмед Кадем, аспирант*

*Национальный университет биоресурсов и природопользования
Украины,*

Тел.: 0445278895.

Аннотация – изложены результаты исследований взаимодействия деформируемого приводного колеса с деформируемой средой. В результате были установлены закономерности и зависимости величины зоны контакта колеса с почвой. Полученные результаты могут быть использованы при решении задач связанных с эксплуатацией, а в особенности проектировании движителей мобильных энергосредств и сельскохозяйственных машин.

Ключевые слова: взаимодействие колеса с почвой, распределение давления, зона контакта, смещение поверхности.

Постановка задачи. Во многих задачах, связанных с анализом взаимодействия рабочих органов и любых деформаторов с материалами и средами, возникает необходимость применения физических уравнений связи напряжений с деформациями. Такая связь может проявляться в виде существенного влияния упругих, вязких и пластических свойств. Для формализации материалов и сред в виде моделей с существенным проявлением отдельных видов этих свойств существуют фундаментальные законы и физические уравнения связи напряжений с деформациями (скоростями деформаций), но при сложных видах влияния свойств, в частности в случаях, когда проявляются все три свойства в равной мере, модели связи напряжений с деформациями построены для частичных случаев, т.е. только для нормальных или сдвиговых деформаций. Если такие модели построены для полных тензоров напряжений и деформаций, то их применение в полном виде не разрешает решить задачу о напряженно-деформированном состоянии среды или материала из-за того, что после подстановки этих физических уравнений в уравнения равновесия среды они становятся

© Ковбаса В. П., Али Ахмед Кадем,

* Научный руководитель – д.т.н., профессор Ковбаса В. П.



существенно нелинейными и становятся гиперболическими уравнениями в частных производных третьего порядка.

Анализ последних исследований. Задачи, связанные с анализом напряженно-деформированного состояния среды, возникают, в частности при анализе взаимодействия рабочих органов и колес машин с почвой. В последнем случае почва формализуется как сплошная среда со свойствами упругости, вязкости и пластичности. Правомерность такой формализации и результаты анализа взаимодействия рабочих органов с грунтом основываются на результатах исследований Кушнарева А.С., Ковбасы В.П., Золотаревской и др.

Постановка задания. Целью исследований являются нахождения физических уравнений связи напряжений со скоростями деформаций для материала или среды (в частности грунта) у которых существенно проявляются упруговязкие свойства.

Основная часть. *Определение физических уравнений связи напряжений со скоростями деформаций для грунтовой среды.* При существенном проявлении пластичности для определения условия пластического течения грунта может быть использован модифицированный критерий перехода в пластическое состояние (условие разрушения сплошности) Кулон-Мор [1]:

$$k = -\frac{3(\sigma \sin[\varphi] + \tau_0 \cos[\varphi])}{-3 + \sin[\varphi]}, \quad (1)$$

где σ – среднее (гидростатическое) напряжение;

φ – коэффициент внутреннего трения материала (почва);

τ_0 – напряжение начального сдвига материала (почва).

Величина второго инварианта девиатора с точностью до постоянного множителя связан с интенсивностью сдвиговых напряжений, которые в свою очередь связаны с величиной, которая характеризует свойства материала (почвы) [2]:

$$\begin{aligned} \tau_i &= \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{zy}^2)} = \\ &= \frac{\sqrt{2}\sigma}{3} = k \end{aligned} \quad (2)$$

Следует отметить, что решения упруго-вязкопластических задач связаны с чрезвычайными трудностями вследствие геометрической нелинейности уравнений. При этом решение задач вязкоупругости позволяет применить методы теории упругости, поскольку конечные уравнения сводятся к системе эллиптических уравнений, которые решаются с использованием бигармонических потенциальных уравнений. Результаты решения задач методами теории упругости позволяют оценить качественную характеристику протекания процесса, а рас-



хождение с результатами решения методами пластичности отличается от названных выше не более 10 % [3]. Поэтому, по нашему мнению, следует использовать методы теории упругости, которые позволят получить новые знания о контактном взаимодействии колеса с почвой.

Вследствие приложения нагрузки происходит вязкоупругое деформирование материала, при котором с увеличением скорости приложения нагрузки скорость деформации снижается пропорционально коэффициенту вязкости. Такую модель принято называть моделью Кельвина-Фойгта. При выводе уравнений связи напряжений со скоростями деформирования необходимо просуммировать девиаторные составляющие напряжений упругого и вязкого деформирования. Линейно упругая среда описывается обобщенным законом Гука.

Суммы компонентов напряжений упругой и вязкой составляющих могут быть записаны с учетом того, что компоненты деформаций и скоростей деформаций могут быть переписаны в виде, удобном для понимания типа уравнений и удобном для решения уравнений относительно компонентов деформаций:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E(\varepsilon_x[t](-1+\nu) - (\varepsilon_y[t] + \varepsilon_z[t])\nu)}{-1+\nu+2\nu^2} + \\ &+ \frac{2\mu((-7+11\nu)\varepsilon_x'[t] - (-2+7\nu)(\varepsilon_y'[t] + \varepsilon_z'[t]))}{-9+18\nu}; \\ \sigma_y &= \frac{E(\varepsilon_y[t](-1+\nu) - (\varepsilon_x[t] + \varepsilon_z[t])\nu)}{-1+\nu+2\nu^2} + \\ &+ \frac{2\mu((-7+11\nu)\varepsilon_y'[t] - (-2+7\nu)(\varepsilon_x'[t] + \varepsilon_z'[t]))}{-9+18\nu}; \\ \sigma_z &= \frac{E(\varepsilon_z[t](-1+\nu) - (\varepsilon_x[t] + \varepsilon_y[t])\nu)}{-1+\nu+2\nu^2} + \\ &+ \frac{2\mu((-7+11\nu)\varepsilon_z'[t] - (-2+7\nu)(\varepsilon_x'[t] + \varepsilon_y'[t]))}{-9+18\nu}; \\ \tau_{xy} &= \frac{E\gamma_{xy}[t]}{2(1+\nu)} + \mu(\gamma_{xy}'[t]); \tau_{yz} = \frac{E\gamma_{yz}[t]}{2(1+\nu)} + \mu(\gamma_{yz}'[t]); \\ \tau_{xz} &= \frac{E\gamma_{xz}[t]}{2(1+\nu)} + \mu(\gamma_{xz}'[t]).\end{aligned}\tag{3}$$



Значение компонент скоростей нормальных вязкоупругих деформаций определяются путем дифференцирования по времени последних выражений с учетом постоянных интегрирования:

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{e^{-\frac{3Et}{2\mu+2\mu\nu}} \left(e^{\frac{Et}{\mu+\mu\nu}} (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) - \frac{3(-1+2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{1+\nu} \right)}{6\mu};$$

$$\dot{\varepsilon}_y = \frac{e^{-\frac{3Et}{2\mu+2\mu\nu}} \left(e^{\frac{Et}{\mu+\mu\nu}} (2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z) - \frac{3(-1+2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{(1+\nu)} \right)}{6\mu}; \quad (4)$$

Среднее нормальное (гидростатическое) напряжение, которое сжимает элемент сухого трения в модели Бингама будет представлять:

$$\sigma = \frac{2e^{-\frac{3Et}{2\mu+2\mu\nu}} \mu(1+\nu)(\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z)}{9-18\nu} \quad (5)$$

Аналогично определяются компоненты скоростей сдвижных вязкоупругих деформаций, а из них компоненты сдвиговых напряжений:

$$\tau_{xy} = e^{-\frac{Et}{2\mu(1+\nu)}} \mu \dot{\gamma}_{xy}; \tau_{yz} = e^{-\frac{Et}{2\mu(1+\nu)}} \mu \dot{\gamma}_{yz}; \tau_{xz} = e^{-\frac{Et}{2\mu(1+\nu)}} \mu \dot{\gamma}_{xz}. \quad (6)$$

Время деформирования, которое входит в зависимости связи напряжений со скоростями деформаций, может быть определено по времени распространения волны напряжений:

$$t = \frac{l}{c} = \frac{l}{\sqrt{\frac{E(-1+\nu)}{(-1+\nu+2\nu^2)\rho}}}, \quad (7)$$

где l – расстояние, на котором затухает волна напряжений в данной среде;

c – скорость распространения волны напряжений [4]:

$$c = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}},$$

где λ - коэффициент Ляме.

Таким образом, уравнения (3) вместе с (5) определяют напряжения сжатия, которые действуют на элемент сухого трения и входят в уравнение (1).

Построение функций распределенных давлений в зоне контакта. В общем случае характер взаимодействия приводного колеса (активного) может быть представлен схематично, как изображено на рисунке 1.

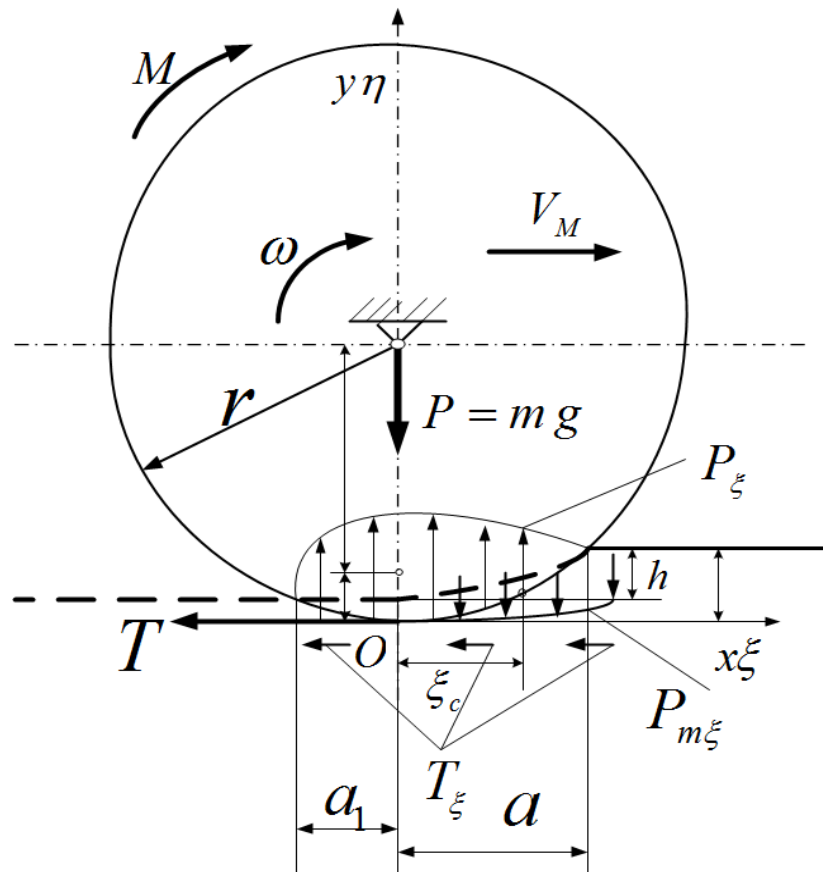


Рис. 1. Схема взаимодействия деформируемого приводного колеса с деформируемой средой

На схеме представлен характер взаимодействия активного деформируемого колеса с поверхностью в системе координат xOy , в которой мгновенный центр вращения колеса совпадает с центром системы координат O , а поверхность среды по которой движется колесо, совпадает с осью Ox . Уравнения, которые описывает поверхность колеса, представлены в системе координат $\xi O\eta$, совпадающей с системой координат среды (почвы). Уравнение поверхности колеса радиуса r в плоской системе координат имеет вид: $\eta = r - \sqrt{r^2 - \xi^2}$; $\xi = r - \sqrt{r^2 - \eta^2}$.

Как видно из рисунка 1, колесо нагружено весом $P = mg$, который сосредоточен в центре вращения колеса, крутящим моментом M , и силами сопротивления перемещению колеса в виде момента сопротивления перекачиванию, которые образуются, с одной стороны, распределенной горизонтальной реакцией грунта (реакция на составляющую крутящего момента относительно мгновенного центра вращения) на передней части зоны контакта произведением интегральной функции распределения давления тяжести на координату центра ее распределения по отношению к центру координат и, с другой стороны, распределением вертикальных составляющих в передней части зоны контакта, которые возникают за счет распределения давления от части крутящего момента относительно мгновенного центра обращения и распределенной реакции грунта от веса, которые также образуют момент сопротивления перекачиванию.

Поэтому, важным для решения задач есть определения функций распределения давления в вертикальном и горизонтальном направлениях в зависимости от сил, которые действуют на колесо и деформативных свойств как колеса, так и поверхности, с которой оно контактирует.

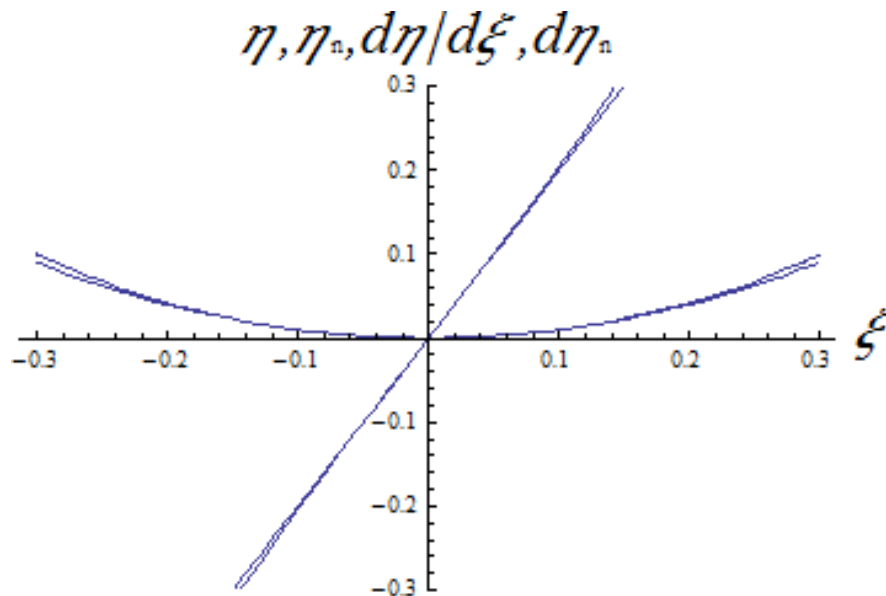


Рис. 2. Сравнение функций точных кривых контакта, их производных и их приближенных значений в пределах зоны контакта, $\xi \in \{-0.3, 0.3\}$ для радиуса $r = 0,5$

В первом приближении, поверхность, по которой распределены силы в плоскости контакта, может быть представлена на участке $a_1 - a$ зависимостью $\eta = r - \sqrt{r^2 - \xi^2}$, но следует отметить, что в дальнейшем интегрирование такой функции в аналитическом виде



может вызвать непреодолимые сложности, поэтому если разложить такую функцию в ряд Маклорена, то в первом приближении, она будет иметь вид $\eta_n = \xi^2/2r$. Сравнение точного выражения поверхности контакта и разложенной в ряд, которые приведены на рис. 2, и их первых производных свидетельствует о возможности использования упрощенной функции без ухудшения точности результатов.

Аналогичное представление поверхности зоне контакта принято в исследованиях А. Ю. Ишлинского [5].

Учитывая то, что вертикальное давление силы тяжести от действия колеса распределено по длине площадки контакта $\{a_1; a\}$, а сила, действующая на криволинейной линии, выражается криволинейным интегралом первого рода, то можно записать равенство:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\int \frac{P}{(a-a_1)} d\xi \right) = \frac{d}{d\xi} \left(\int \left(p_\xi \sqrt{1 + \left(\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\xi^2}{2r} \right) \right)^2} \right) d\xi \right),$$

Откуда распределение давления от действия силы тяжести, приходящейся на колесо, составит величину:

$$p_\xi = \frac{P}{(a-a_1) \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{r^2}}}. \quad (8)$$

Распределение касательной силы тяги в зоне контакта может быть определено аналогичным образом:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\int \frac{M}{r} d\xi \right) = \frac{d}{d\xi} \left(\int T_\xi \sqrt{1 + \left(\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\xi^2}{2r} \right) \right)^2} d\xi \right),$$

Откуда распределение давления от действия крутящего момента создается распределенной по пятну контакта касательной силы тяги:

$$T_\xi = \frac{M r \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{r^2}}}{(a-a_1)(r^2 + \xi^2)} \quad (9)$$

Крутящий момент, приложенный к колесу относительно мгновенного центра вращения, создает на участке контакта $\{0; a\}$ дополнительное вертикальное распределение давления, которое, аналогично предыдущим выкладкам, может быть выражено из равенства:



откуда рас-

$$\frac{d}{d\xi} \left(\int (M / (r / a)) d\xi \right) = \frac{d}{d\xi} \left(\int (-P_{m\xi} (\xi - a)^2) d\xi \right),$$

пределенное давление от момента сопротивления качению будет иметь вид:

$$P_{m\xi} = -\frac{aM}{r(a-\xi)^2} \quad (10)$$

Эти распределения давлений при последующих интегрированиях с целью определения границ контакта колеса с почвой, также приводят к непреодолимым трудностям при интегрировании, поэтому такие распределения могут быть разложены в ряды Маклорена, которые будут иметь следующий вид:

$$P_n = \frac{g m (2r^2 - \xi^2)}{2(a - a_1)r^2}; T_n = \frac{M (2r^2 - \xi^2)}{2(a - a_1)r^3};$$
$$P_{mn} = -\frac{M(a^2 + 2a\xi + 3\xi^2)}{a^3 r}, \quad (11)$$

где P_n, T_n, P_{mn} – разложенные в ряды распределения силы веса, касательной силы и силы момента сопротивления качению, соответственно.

О сходимости точных выражений и их разложений можно судить по приведенным графикам на рис. 3. Анализ этих графиков свидетельствует о практически полной идентичности точных представлений функций распределения давлений и тех же функций, представленных разложениями в ряды Маклорена.

Таким образом, получены аналитические зависимости распределения нормальной и касательной составляющей давления в зоне контакта деформируемого колеса с деформируемой поверхностью.

Исходя из проведенных исследований, следует отметить, что наибольшее влияние на величину зоны контакта оказывают деформативные свойства колеса, в отличие от деформативных свойств почвы. Это может объясняться кривизной поверхности колеса.

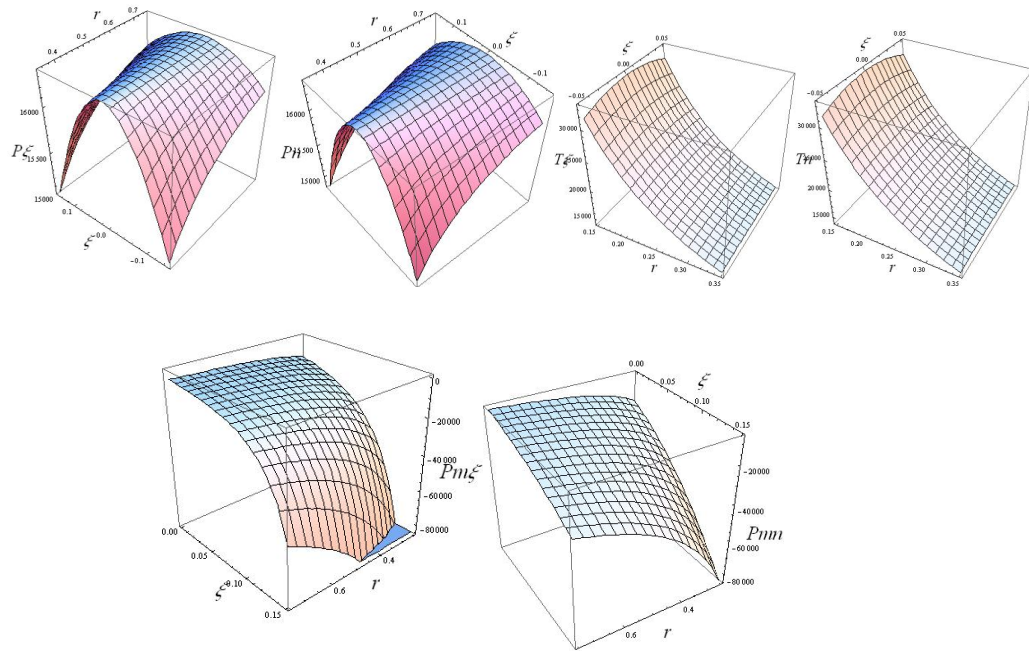


Рис. 3. Графики распределений давлений, построенные по точным выражениям и их разложением в ряды.

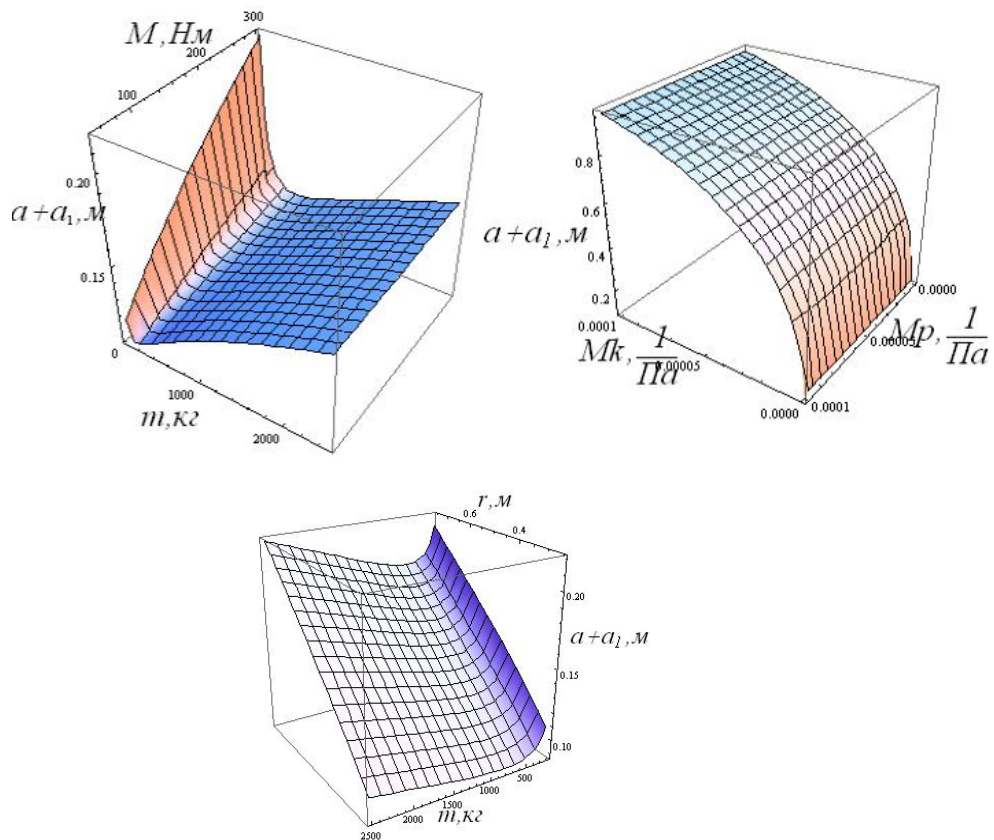


Рис. 4. Графики зависимости суммарной величины зоны контакта от деформативных свойств колеса, приложенной к колесу массы, крутящего момента и радиуса колеса.



Выводы. В процессе проведенных теоретических исследований взаимодействия деформируемого приводного колеса с деформируемым основанием (почвой) установлены следующие закономерности и зависимости:

– величина зоны контакта колеса с почвой существенно зависит от деформационных свойств как самого колеса, так и почвы, причем рост упругих постоянных колеса и почвы ведут к уменьшению этой величины;

– на длину зоны контакта оказывает влияние приложенная вертикальная составляющая – вес, приведенный к колесу, причем для случая приводного (активного) колеса величина передней зоны контакта не возрастает с увеличением веса, напротив возрастает задняя зона контакта, при этом крутящий момент, приложенный к колесу, наоборот, существенно влияет на величину передней части зоны контакта;

– увеличение радиуса колеса ведет к равномерному увеличению длины зоны контакта;

– в отношении величины смещений колеса и почвы, как в горизонтальном, так и в вертикальных направлениях, характеризуется существенным увеличением этих смещений в передней зоне контакта, что согласуется с большинством результатов исследований.

Литература:

1. Ковбаса В. П. До визначення фізичних рівнянь пружно-в'язко-пластичного середовища з умовою руйнування за модифікованим критерієм Кулона-Мора // Праці ТДАТУ. – Мелітополь, 2011.- Вип.11, т.2. – С. 161-174. www.nbu.gov.ua/portal/Chem_Biol/Ptdau/2011_11_2/index.html.
2. Ковбаса В. П. Фізичні рівняння деформування ґрунту з суттєвим проявом в'язкопластичних властивостей . // Motrol: Motorization and power industry in agriculture. – 2011. – Том 13В. – Р. 92-97. // Motrol: Motorization and power industry in agriculture. – 2011. – Том 13В. – Р. 145-156.
3. Ковбаса В. П. Фізичні рівняння деформування ґрунту з суттєвим проявом в'язкопластичних властивостей. Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України. Серія «техніка та енергетика АПК» Київ 2011. – Вип. 166, ч. 2. – с. 284-296
4. Надау А. Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надау.- М.: Мир, 1968. – 863 с.
5. Ишлинский А.Ю. Математическая теория пластичности/ А.Ю Ишлинский, Д.Д.Ивлев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 704 с.



ПОБУДОВА ТА ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧІ ВЗАЄМОДІЇ ДЕФОРМОВАНОГО ПРИВОДНОГО КОЛЕСА З ДЕФОРМОВАНИМ СЕРЕДОВИЩЕМ

В.П. Ковбаса, А.А. Кадем

Анотація – наведені результати досліджень взаємодії деформованого приводного колеса з деформованим середовищем. У результаті встановлені закономірності величини зони контакту колеса із ґрунтом. Отримані залежності можуть бути використані при вирішенні задач пов'язаних з експлуатацією, зокрема при проектуванні рушіїв мобільних енергозасобів та сільськогосподарських машин.

THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF COOPERATION BETWEEN WHEEL DRIVE THAT DEFORMS AND ENVIRONMENT THAT DEFORMS

V. Kovbasa, A. Kadem

Summary

This paper presents the results of cooperation between wheel drive that deforms and environment that deforms. As result it was established patterns and the dependence of the contact area with the ground wheels. The received results can be used in case of the solution of tasks connected to maintenance, and in particular design of working tools of agricultural and other machines.