УДК 514.18

ГЕОМЕТРИНЕ МОДЕЛЮВАННЯ Ω-ПОВЕРХОНЬ В ЗАДАЧАХ ОПТИМІЗАЦІЙНОГО ПОКРИТТЯ

Соболь О. М., д.т.н.
Національний університет цивільного захисту України,
Тел. (068) 962-81-39

Анотація **– в роботі розглянуто спосіб побудови ω-поверхонь в задачах оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками. Дослідження властивостей ω-поверхонь дозволило здійснити формалізацію обмежень даного класу задач.**

Ключові слова: **ω-поверхня, оптимізаційне покриття.**

Постановка проблеми. На теперішній час актуальною науково-прикладною проблемою є розробка нових методів обробки та оптимізаційного перетворення складної геометричної інформації для її подальшого ефективного використання. Це обумовлено тим, що із перетворенням геометричної інформації пов'язані задачі з різних галузей діяльності людини, які мають важливе теоретичне та практичне значення. Одним із перспективних напрямків досліджень в рамках зазначеної проблеми є розробка моделей та методів розв'язання задач оптимального покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками. Основним обмеженням даного класу задач є умова повного покриття заданої області, при цьому необхідно, щоб площі взаємного перетину об'єктів покриття, а також об'єктів покриття та доповнення заданої області до відповідного простору, були мінімальними. Ускладнює розв'язання даних задач те, що форма і розміри геометричних об'єктів покриття залежать від характеристик заданої області та визначаються з урахуванням місць розміщення початків локальних систем координат об'єктів покриття.

На теперішній час для формалізації обмежень в задачах оптимального покриття використовується клас ω-функцій, введений професором С. В. Яковлевим. Разом з тим, при застосуванні об'єктів покриття зі змінними метричними характеристиками аналітичне подання ω-функцій є надмірно громіздким, що практично унеможливлює одержання аналітичного розв'язку відповідних задач. У зв'язку з цим, існує необхідність в дослідженні геометричних властивостей даного класу функцій в задачах оптимізаційного покриття заданих областей об’єктами зі змінними метричними характеристиками.

Аналіз останніх досліджень. Основні властивості класу ω-функцій покриття наведені у роботі [1]. Постановка задачі оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об’єктами зі змінними метричними характеристиками, на прикладі задачі раціонального розміщення оперативних підрозділів для захисту рухомого складу та об’єктів залізничного транспорту, наведена у роботі [2]. Модель оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об’єктами зі змінними метричними характеристиками та дослідження її особливості наведено в роботах [3-4].

Формулювання цілей статті (постановка задачі). В даній роботі необхідно дослідити геометричні властивості ω-функцій в задачах оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об’єктами зі змінними метричними характеристиками та розробити спосіб побудови ω-поверхонь з метою формалізації обмежень даного класу задач.

Основна частина. Постановка задачі оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об’єктами зі змінними метричними характеристиками має наступний вигляд.

Нехай задано область покриття S_0, що являє собою, в загальному випадку, неопуклий багатозв’язний багатокутник у двовимірному просторі. Даній області належать області заборони (на розміщення початків локальних систем координат об’єктів покриття) S_0^{ν}, $\nu = 1, 2, \ldots, N_{\nu}$, - компоненти зв’язності, що являють собою неопуклі багатокутники.

Необхідно покрити область S_0 мінімальною кількістю геометричних об’єктів S_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ (опуклі та неопуклі однозв’язні багатокутники, кола), зі змінними метричними характеристиками таким чином, щоб виконувалися наступні обмеження:

- покриття всієї заданої області S_0

$$S_0 \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{N} S_i \right) = S_0; \tag{1}$$

- мінімум площі взаємного перетину геометричних об’єктів S_i

$$S_i \bigcap S_j \to \min; \; i = 1, 2, \ldots, N; \; j = i+1, \ldots, N; \tag{2}$$

- мінімум площі перетину об’єктів S_i з областями заборони S_0^{ν}

$$S_i \bigcap S_0^{\nu} \to \min; \; i = 1, 2, \ldots, N; \; \nu = 1, 2, \ldots, N_{\nu}; \tag{3}$$

- належність об'єктів S_i області S_0

$$cS_0 \bigcap S_i \to \min\,;\; i=1,2,\ldots,N\,;\; cS_0 \bigcup S_0 = R^2\,; \tag{4}$$

- спеціальні умови, що формують об'єкти покриття

$$p_i \in F_i\left(S_0\right);\; i=1,2,\ldots,N\,; \tag{5}$$

де $F_i\left(S_0\right)$ - множина форм і розмірів i-го об'єкта покриття.

Як було зазначено вище, для формалізації обмежень (1)÷(4) використовується клас ω-функцій. Для розробки моделі та обґрунтованого метода розв'язання задачі оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками необхідно зрозуміти, що являють собою умови оптимального покриття з геометричної точки зору, особливо за умови складності аналітичного подання ω-функцій для зазначених об'єктів покриття. У зв'язку з цим, розглянемо наступні твердження та визначення.

Твердження.1. ω-функція $\omega_\Omega\left(p_1;\ldots;p_N;x_1,y_1;\ldots;x_N,y_N\right)=0$, в загальному випадку, утворює ω-гіперповерхню у просторі $R^{2N+1+2\sum_{i=1}^{N} n_i}$, де n_i - кількість вершин i-го багатокутника покриття; p_i - координати вершин i-го об'єкта покриття; $\left(x_i,y_i\right)$ - координати початку локальної системи координат i-го об'єкта покриття в глобальній системі координат; $i=1,2,\ldots,N$.

Аналогічні твердження можна зробити для кіл, а також для кіл і багатокутників.

Приклад. Розглянемо ω-функцію для двох прямокутників $S_1\left(a_1,b_1\right)$ та $S_2\left(a_2,b_2\right)$: $\omega_\Omega\left(a_1,b_1;a_2,b_2;x_1,y_1;x_2,y_2\right)=0$. В даному випадку ω-функція утворює гіперповерхню у просторі R^9 (розмірність простору відповідає кількості параметрів ω-функції).

Властивість 1. Розглянемо ω-функцію для двох геометричних об'єктів S_1 та S_2 $\omega_\Omega\left(p_1;p_2;x_1,y_1;x_2,y_2\right)=0$. При фіксації координат вершин обох об'єктів відносно їх локальних систем координат та початку локальної системи координат об'єкта S_1 можна отримати тривимірну проекцію ω-гіперповерхні $\omega_\Omega\left(p_2\right)=\omega_\Omega\left(x_2,y_2\right)$.

Визначення 1. Множину точок, координати яких задовольняють рівнянню $\omega_\Omega\left(p_2\right)=\omega_\Omega\left(x_2,y_2\right)$ назвемо ω-поверхнею.

В даній роботі запропоновано спосіб комп'ютерного моделювання ω-поверхонь. Для цього розглянемо побудову даних поверхонь на прикладі взаємодії двох прямокутників S_1 та S_2 зі змінними метричними характеристиками.

Зазначений спосіб полягає в тому, що координати вершин обох прямокутників фіксуються у визначений момент часу, при цьому також фіксується положення локальної системи координат прямокутника S_1. В подальшому здійснюється комп'ютерне моделювання ω-поверхні, яку отримують у дискретному вигляді шляхом обчислення значень ω-функції при кожній зміні положення прямокутника S_2. Надалі відбувається зміна параметрів прямокутника S_2 та відбувається побудова наступної ω-поверхні. Таким чином, реалізація запропонованого способу дозволить отримати набір ω-поверхонь, що можуть у подальшому бути використані для представлення обмежень та оптимізації цільової функції в задачі покриття заданої області геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками.

Для побудови ω-поверхонь було розроблене алгоритмічне та програмне забезпечення. Розглянемо побудову ω-поверхні при трансляції прямокутника S_2 відносно прямокутника S_1. Нехай дані прямокутники мають наступні параметри: $a_1 = 7$; $b_1 = 3$; $a_2 = 5$; $b_2 = 2$. Тоді ω-поверхня буде мати вигляд, що наведений на рис. 1.

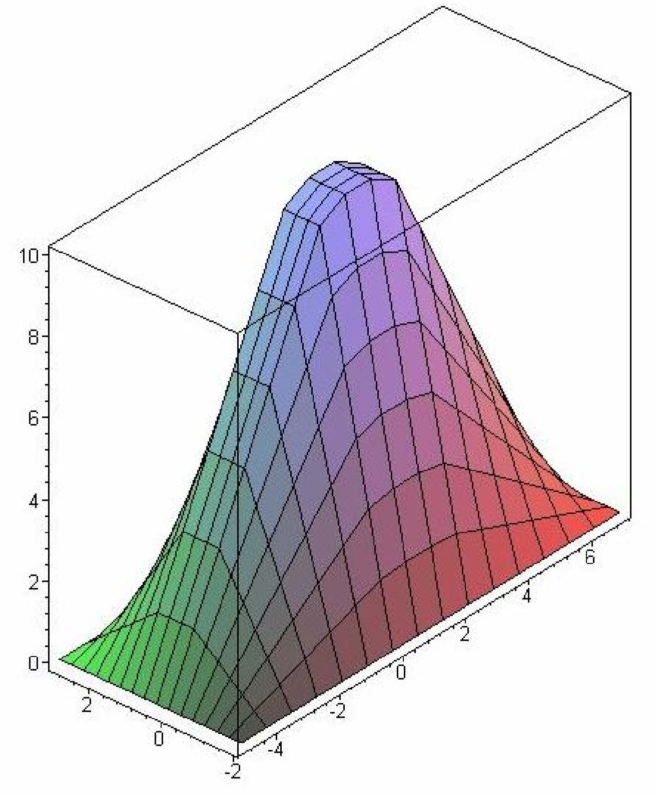

Рис. 1. ω-поверхня для двох прямокутників

Зафіксуємо параметри прямокутника S_1, при цьому розміри прямокутника S_2 будуть змінюватись. Це призведе до перетворень ω-поверхні, що наведені на рис. 2 – 5.

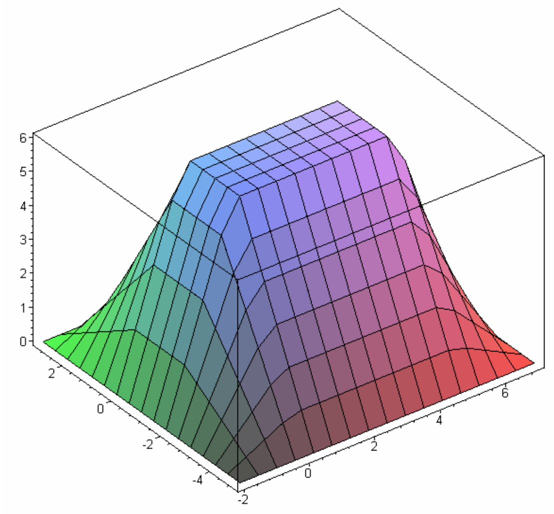

Рис. 2. ω-поверхня ($a_2 = 2,\ b_2 = 5$)

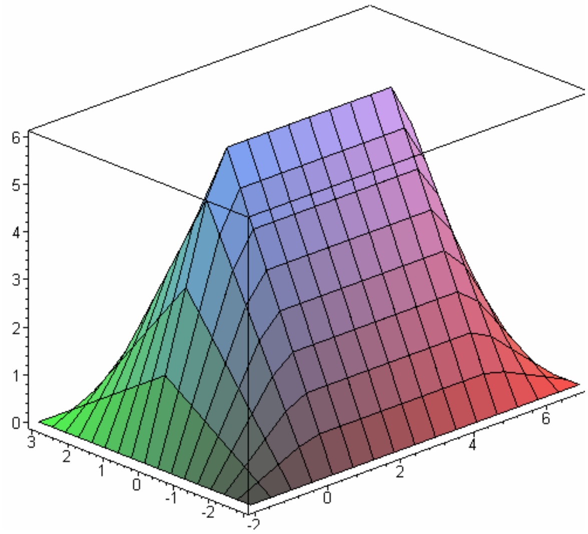

Рис. 3. ω-поверхня ($a_2 = 2,\ b_2 = 3$)

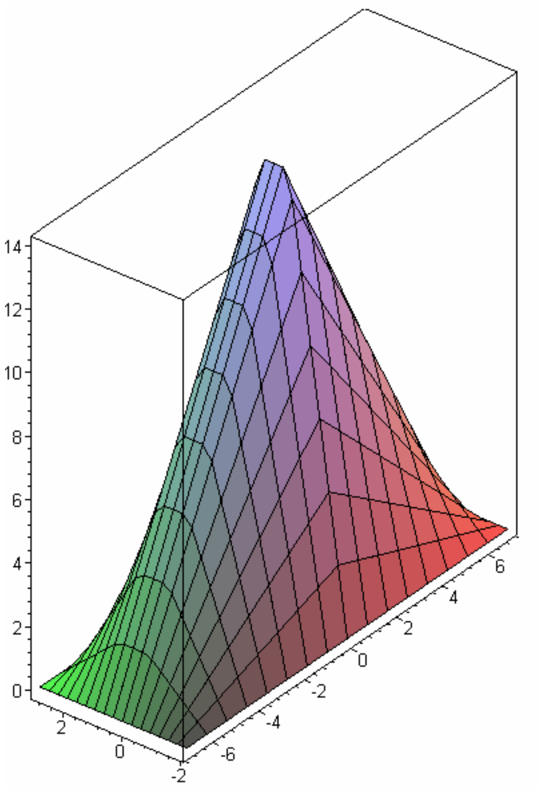

Рис. 4. ω-поверхня ($a_2 = 7,\ b_2 = 2$)

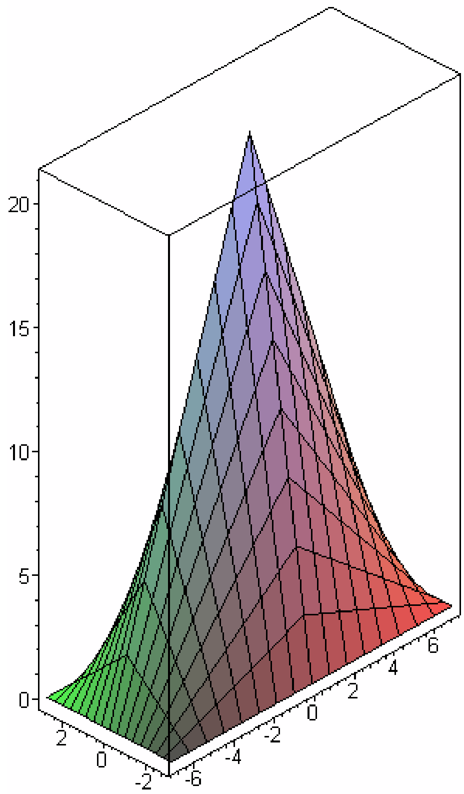

Рис. 5. ω-поверхня ($a_2 = 7,\ b_2 = 3$)

Дослідження ω-поверхонь дозволило сформулювати твердження та виявити основні їх властивості.

Твердження 2. Контур, що може бути отриманий шляхом перетину ω-поверхні для об'єктів S_1 та S_2 з площиною $x0y$, являє собою 0-рівень Ф-функції [1] для зазначених об'єктів.

Твердження. 3. ω-поверхня для геометричних об'єктів S_1 та S_2 зі змінними метричними характеристиками являє собою об'єднання фрагментів поверхонь, що можуть бути отримані під час кожної зміни координат вершин (радіусів) відповідних об'єктів (приклад: для прямокутників S_1 та S_2 ω-поверхня являє собою об'єднання фрагментів поверхонь, що наведені на рис. 1 – 5).

Виходячи з твердження 3, можна сформулювати наступну властивість.

Властивість 2. ω-поверхня для геометричних об'єктів S_1 та S_2 зі змінними метричними характеристиками, в загальному випадку, є незв'язною.

Висновки. В даній роботі розроблено спосіб комп'ютерного моделювання ω-поверхонь в задачах оптимізаційного покриття геометричних об'єктів. Використання даного класу поверхонь є доцільним у зв'язку із складністю аналітичного подання ω-функцій для геометричних об'єктів зі змінними метричними характеристиками. Досліджені геометричні властивості ω-поверхонь дозволили формалізувати обмеження та розробити ефективний та обґрунтований метод розв'язання задачі оптимізаційного покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками.

Література

1. *Стоян Ю.Г.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / *Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев.* – К.: Наукова думка, 1986. – 268 с.

2. *Комяк В.М.* Постановка задачі раціонального розміщення оперативних підрозділів для захисту рухомого складу та об'єктів залізничного транспорту / *В.М. Комяк, О.М. Соболь, В.О. Собина* // Проблеми надзвичайних ситуацій. Зб. наук. пр. УЦЗ України. – Харків: УЦЗУ, 2009. – Вип.9. – с. 56 62.

3. *Комяк В.М.* Загальна математична модель раціонального розміщення оперативних підрозділів для захисту рухомого складу та об'єктів залізниці / *В.М. Комяк, О.М. Соболь, В.О. Собина* // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон, 2009. – Вып. 2(35). – с. 241-246.

4. *Комяк В.М.* Особливості загальної математичної моделі визначення раціональної кількості та місць розташування оперативних підрозділів для захисту об'єктів залізниці / *В.М. Комяк, О.М. Соболь, А.Г. Коссе,*

В.О. Собина // Проблеми надзвичайних ситуацій. Зб. наук. пр. УЦЗ України. – Харків: УЦЗУ, 2009. – Вип.10. – с. 106-111.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ω-ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИОННОГО ПОКРЫТИЯ

А.Н. Соболь

***Аннотация* – в работе рассмотрен способ построения ω-поверхностей в задачах оптимизационного покрытия заданных областей геометрическими объектами с переменными метрическими характеристиками. Исследование свойств ω-поверхностей позволило формализовать ограничения данного класса задач.**

GEOMETRIC MODELING ω-SURFACES IN PROBLEMS OF OPTIMIZATION COVERING

O.M. Sobol

Summary

The paper considers a method for constructing ω-surfaces in problems of optimization covering defined areas by geometric objects with variable metric characteristics. Research the properties of ω-surfaces allows to formalize restrictions in the class of problems.