УДК 514.181.6 + 514.182

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ОРТОГОНАЛЬНИХ АКСОНОМЕТРИЧНИХ ПРОЕКЦІЙ

Журило А. Г., к.т.н.
Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»
Тел (057) 707-64-31

Анотація **- у статті розглянуті властивості ортогональних аксонометричних проекцій. Показано закономірність існування прямокутних і косокутних аксонометричних проекцій. Наведено принципи визначення площини аксонометричних проекцій на практиці.**

Ключові слова: ортогональні аксонометричні проекції, ДСТУ, прямокутні і косокутні аксонометричні проекції.

Постановка проблеми. Незважаючи на широкий розвиток комп'ютерної техніки та застосування її для виконання креслеників, появі вже декількох поколінь програм КОМПАС, AUTOCAD та їхніх аналогів, аксонометричні проекції широко використовуються у машинобудуванні та архітектурі. Для їх опанування потрібно знати основні властивості.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питання щодо точних графічних побудов має велику історичну давнину, беручи свій початок ще в роботах Архімеда, Евкліда та інших вчених. З вичерпною повнотою і строгою науковою обґрунтованістю теорія точних метричних побудов була розроблена математиком Гаспаром Монжем, який у 1795 – 1799 рр. опублікував результати своєї двадцятирічної роботи під назвою «Нарисна геометрія» [1].

Серед імен, з якими пов'язаний розвиток наукової праці в області аксонометричних проекцій, можна згадати видатних вітчизняних вчених: Н. М. Бескіна, О. О. Вольберга, Н. О. Глаголєва, Є. А. Глазунова, А. І. Добрякова, Д. І. Каргина, І. І. Котова, М. О. Риніна, С. О. Смирнова, М. Ф. Четверухіна, М. М. Юдицького [10-12].

У даний час теорія аксонометрії розроблена докладно і висвітлена в численних працях з нарисної геометрії. Питання ж практики побудови аксонометричних зображень висвітлені в літературі недостатньо. У практиці побудови аксонометричних

зображень часто виникають значні труднощі, обумовлені не тільки недостатньою підготовкою виконавця, але і складністю окремих задач, що вимагають спеціального роз'яснення [4-6, 8,9].

Існуючий стан справ ускладнюється ще й тому, що за останні 20..30 років практично не публікувалося робіт із практики побудови аксонометричних зображень та її основних законів. Ті ж роботи, що були опубліковані раніше, у більшості випадків розглядають аксонометричні проекції, не передбачені ГОСТ 2.317 – 69 або ДСТУ ISO 5456-3:2006 [2, 3].

Формулювання цілей статті. Метою статті є визначення основних властивостей та площини ортогональних аксонометричних проекцій на практиці [7, 10].

Наведені в статті дані дозволяють найбільш точно і чітко визначити принципи утворення аксонометричних осей і масштабів, знизити витрати праці і часу на виконання кресленика.

Основна частина. Для визначення ортогональної аксонометричної системи можна задати або аксонометричні осі цієї системи, або аксонометричні масштаби, але не можна довільним образом задавати одночасно аксонометричні осі і масштаби. Це було можливо зробити в загальній рівнобіжній аксонометрії (теорема Польке), але вже неможливо в аксонометрії ортогональній.

Отже, три вектори, що виходять з однієї точки і є аксонометричними масштабами в ортогональній аксонометрії, не будуть незалежними. Між ними повинно бути деяке співвідношення. Виникає питання про те, якому співвідношенню повинні задовольняти згадані три вектори, якщо вони є аксонометричними масштабами прямокутної аксонометрії.

Теорема, що дає відповідь на це питання, часто називається «основною теоремою ортогональної аксонометрії». Вона була сформульована без доведення вперше Карлом Гаусом у його курсі лекцій, прочитаних взимку 1839/40 рр у Гетингенському університеті.

Теорема Гауса. ***Якщо через L, M, N позначимо комплексні числа відповідним радіусам - векторам l, m, n, то умова $L^2 + M^2 + N^2 = 0$ є необхідною і достатньою для того, щоб згадані три радіуси – вектори служили ортогональною аксонометричною системою.***

Доведемо теорему [12], з урахуванням положень, наведених у роботах [2, 3].

Необхідність умови. Припустимо, що фігура *O'LMN* (рис. 1) дійсно є ортогональною аксонометричною системою координат. Це означає, що згадана фігура є ортогональною проекцією натуральної прямокутної декартової системи осей координат у просторі.

Зрозуміло, що в цьому випадку необхідно, щоб для комплексних чисел *L, M* та *N* виконувалася умова $L^2 + M^2 + N^2 = 0$.

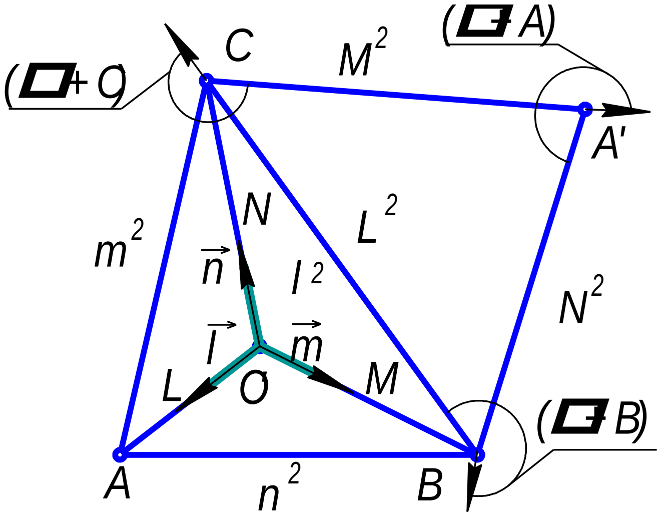

Рис. 1. Побудова ортогональної аксонометричної системи координат

Графічно це означає, що ламана лінія, яка зображує суму радіусів – векторів квадратів комплексних чисел L^2, M^2, N^2, повинна утворити трикутник. Тому що фігура *O'LMN* є, за припущенням, ортогональною аксонометричною системою, то існує деякий «трикутник спотворень», бісектрисами якого є осі *O'L, O'M* та *O'N.*

Припустимо, що Δ *ABC* є «трикутником спотворень» для даної системи. У такому випадку відомо, що сторони «трикутника спотворень» пропорційні квадратам аксонометричних масштабів l^2, m^2, n^2. Зокрема, можемо вважати, що довжини сторін Δ *ABC* відповідно дорівнюють числам l^2, m^2 та n^2. Розглянемо, як зв'язані між собою кути, утворені аксонометричними осями (або, інакше, радіусами – векторами відповідних комплексних чисел) з кутами «трикутника спотворень» *ABC.*

Кут між радіусами – векторами комплексних чисел *L* і *M* може бути виражений у такий спосіб: $\angle(L, M) = \pi - \frac{À}{2} - \frac{Â}{2}$, де A = $\angle ÂÀÑ$; $B = \angle ÀÂÑ$.

Але $\frac{À}{2} + \frac{Â}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{Ñ}{2}$, $\angle(L, M) = \frac{\pi}{2} + \frac{C}{2}$.

Якщо комплексні числа *L* та *M* подамо у показниковій формі, тобто

$L = l \bullet e^{i\varphi 1}$, $M = m \bullet e^{i\varphi 2}$, то для квадратів комплексних чисел одержимо

$L^2 = l^2 \bullet e^{i2\varphi 1}$, $M^2 = m^2 \bullet e^{i2\varphi 2}$.

Отже, при зведенні у квадрат комплексних чисел їхні амплітуди подвоюються. Тому, якщо кут, утворений радіусами – векторами двох даних комплексних чисел L і M позначимо через $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$, то після зведення цих чисел у квадрат, кут, утворений їхніми радіусами - векторами, стане дорівнювати:

$$2\delta = 2(\varphi_2 - \varphi_1) = 2\varphi_2 - 2\varphi_1,$$

звідки робимо висновок, що після зведення у квадрат комплексних чисел, кут, утворений їхніми радіусами – векторами, подвоївся. Тому можемо написати:

$$\angle(L^2, M^2) = 2\angle(L, M) = 2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{C}{2}\right) = \pi + C.$$

Аналогічно $\angle(M^2, N^2) = \pi + A$, $\angle(N^2, L^2) = \pi + B$.

Побудуємо тепер трикутник $A'BC$, симетричний «трикутнику спотворень» ABC щодо сторони BC. Так як довжина відрізка BC дорівнює l^2, тобто збігається з модулем комплексного числа L^2, то можемо вважати, що вектор комплексного числа L^2 зображується відрізком BC. Вектор комплексного числа M^2 утворить з ним кут (π +C). Отже, він зображується відрізком CA'. Справді , як видно з рисунка, вектор CA' утворить з вектором BC кут (π + C).

Крім того, $|CA'| = M^2$. Нарешті, вектор комплексного числа N^2 утворить кут (π + A) з вектором комплексного числа M^2. Тому він зображується відрізком $A'B$, довжина якого дорівнює N^2.

Таким чином, ламана лінія, що зображує суми векторів, які складаються, чисел L^2, M^2, N^2, утворить трикутник BC - CA' - $A'B$, тобто ламана лінія є замкнутою.

Отже, $L^2 + M^2 + N^2 = 0$. Таким чином, теорема доведена.

Достатність умови. Припустимо тепер, що є три радіуси - вектори: l, m, n, для яких відповідні комплексні числа позначені буквами L, M, N (рис. 2).

Нехай для згаданих комплексних чисел виконується умова $L^2 + M^2 + N^2 = 0$

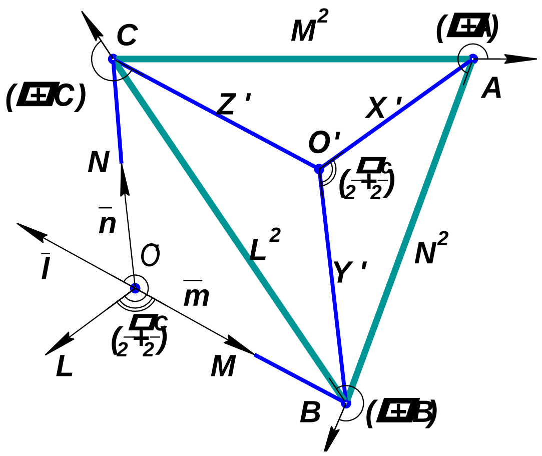

Рис. 2. Побудова радіусів - векторів l, m, n як аксонометричних масштабів

Доведемо, що в такому випадку три радіуси - вектори *l, m, n* можна розглядати як аксонометричні масштаби по осях деякої прямокутної аксонометричної системи.

Побудуємо векторну ламану, що зображує суму радіусів – векторів квадратів комплексних чисел L^2, M^2, N^2. *Ця ламана лінія повинна бути замкнутою, тому що, за припущенням*, $L^2 + M^2 + N^2 = 0$.

Отже, згадана ламана являє собою трикутник, що позначено буквами *ABC*. Оскільки довжини сторін цього трикутника *ABC* виражаються квадратами довжин радіусів - векторів l^2, m^2, n^2, то можна розглядати трикутник *ABC* як «трикутник спотворень» для аксонометричної системи, масштабами якої є відрізки, відповідно рівні за довжиною *l, m, n.* Щоб побудувати осі цієї аксонометричної системи, треба провести бісектриси «трикутника спотворень». Позначимо бісектриси буквами X′, Y′, Z′, а точку їх перетину — буквою *O′*.

Залишається тепер довести, що кути, утворені бісектрисами, відповідно дорівнюють кутам, утвореним даними радіусами – векторами *l, m, n.* Будемо позначати для стислості, як і раніше, кути трикутника спотворень тими ж буквами, що і його вершини. Тоді, як видно з кресленика, маємо для кута аксонометричних осей (*X′, Y′*) наступний вираз:

$$\angle(X', Y') = \pi - \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{C}{2}.$$

Аналогічні вирази можна одержати для кутів, утворених іншими аксонометричними осями.

З іншого боку, якщо вектори комплексних чисел L^2 і M^2 утворять кут, який позначимо буквою δ [$\angle(L^2, M^2) = \delta$], то кут векторів комплексних чисел *L* і *M* буде виражатися у вигляді:

$$\angle(L, M) = \frac{\delta}{2} + k \bullet \pi.$$

З кресленика видно, що $\angle(L^2, M^2) = \pi + C$. Таким чином, знайдемо квадратні корені з комплексних чисел і одержимо: $\angle(L, M) = \frac{\pi}{2} + \frac{C}{2} + k \bullet \pi$.

Аналогічні вираження можна визначити і для інших кутів між векторами даних комплексних чисел.

Отже, кути, утворені радіусами – векторами *l, m, n,* дорівнюють кутам між відповідними осями аксонометричної системи або відрізняються від них на ціле число π. Останнє означає, що на осях *X′, Y′, Z′* аксонометричні масштаби *l, m, n* можуть бути відкладені від початку координат *O′* у двох протилежних напрямках. Однак щоразу при цьому одержимо ортогональну аксонометричну систему. Таким чином, доводиться достатність умови.

Узагальнюючи наведені теоретичні питання, відзначимо, що класично у курсах інженерної графіки та нарисної геометрії розглядається метод паралельного аксонометричного проеціювання. Сутність цього методу полягає в тому, що тіло, яке проецюють, відносять до деякої довільної системи координат (*X, У, Z*) і потім проецюють паралельними променями на площину разом із координатною системою. Цю площину називають *площиною аксонометричних проекцій* або *площиною картин*, проекції ортогональних осей координат *X', У', Z'* — *аксонометричними осями*.

ГОСТ 2.317 – 69 передбачає застосування *прямокутних* і *косокутних* аксонометричних проекцій. (Якщо промені, що проецюють, спрямовані до площини картини під кутом $\varphi = 90°$, проекція є *прямокутною*, а якщо кут $\varphi \neq 90°$, то проекція є *косокутною*).

Висновки та перспективи подальшого дослідження. Доведено, що ламана лінія, що зображує суми векторів, є замкнутою.

Три радіуси - вектори *l, m, n* можна розглядати як аксонометричні масштаби по осях деякої прямокутної аксонометричної системи.

Їхнє положення визначає прямокутні і косокутні аксонометричні проекції.

Наочні аксонометричні зображення можуть варіюватися в дуже широких межах: від ілюзорного зображення до схематичного креслення. Але властивості загальної рівнобіжної аксонометрії суттєво відрізняються від ортогональної аксонометрії.

Література

1. *Гордон В. О.* Курс начертательной геометрии: учебник / В. О. Гордон, М. А. Семенцов - Огиевский. – М.: Наука, 1976. – 432 с.
2. ЕСКД. ГОСТ 2.317-69 Единая система конструкторской документации. Аксонометрические проекции. М.: Издательство стандартов, 1969. – 8 с.
3. ДСТУ ISO 5456-3:2006. Кресленики технічні. Методи проеціювання. Частина 3. Аксонометричні проекції. К.: Держспоживстандарт України, 2008. – 12 с.
4. *Журило А. Г.* Методика построения аксонометрических проекций тел вращения на примере изометрической проекции цилиндра / А. Г. Журило // Вестн. НТУ «ХПИ». — 2007. – № 11. – С. 78 – 81.
5. *Журило А. Г.* Методика построения аксонометрических проекций тел вращения на примере изометрической проекции конуса / А. Г. Журило // Вестн. НТУ «ХПИ».— 2005. – № 57. – С. 65 – 68.
6. *Журило А. Г.* Побудова деяких геометричних тіл у диметрії / А. Г. Журило // Вестн. НТУ «ХПИ». — 2008. – № 43. – С. 128 – 131.
7. *Журило А. Г.* Теоретичні та практичні основи аксонометрії [Текст] / А. Г. Журило. Навч. посібник. Х.: НТУ «ХПІ». — 2010. - 196 с.

8. *Журило А. Г.* Основна теорема аксонометрії – теорема Польке-Шварца та її практичне використання / А. Г. Журило, Є. М. Сівак, І. Ю. Адашевська // Комп'ютерно - інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. — 2015. - №19. - С. 198-202. Видавництво Луцького національного технічного університету.
9. *Журило А. Г.* Построение аксонометрических изображений без вторичных проекций / А. Г. Журило, Е. М. Сивак, И. Ю. Адашевская // Сборник трудов XI Международной заочной конференции «Развитие науки в XXI веке» Харьков. — 2016. Ч. 1. Стр. 95-101.
10. *Журило А. Г.* Деякі питання щодо умовностей і спрощень при побудові аксонометричних проекцій / А. Г. Журило, Є. М. Сівак, І. Ю. Адашевська // Комп'ютерно - інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. — 2016. - № 22. - С. 13-17. Видавництво Луцького національного технічного університету.
11. *Каменев В. И.* Аксонометрические проекции: Альбом чертежей / В. И. Каменев. — Москва–Свердловск: Гос. изд - во машиностроит. лит., 1946. – 72 с.
12. *Ланюк А. В.* Аксонометрические проекции: учебник / А. В. Ланюк. — М. : Гос. изд - во лит - ры по строительству и архитектуре, 1956. – 176 с.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНЫХ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

А.Г. Журило

Аннотация - рассмотрены свойства аксонометрических проекций. Показана закономерность существования прямоугольных и косоугольных аксонометрических проекций. Приведены принципы определения плоскости аксонометрических проекций на практике.

SOME PROPERTIES OF ORTHOGONAL AXONOMETRIC PROJECTION

A. Zhurilo

Summary

The article considers the properties of axonometric projections. Shows the pattern of existence of rectangular and oblique-angled axonometric projections. The following guidelines define the plane of the axonometric projection in practice.