ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ, ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

УДК 004.925.8

ОБҐРУНТУВАННЯ ДЕЯКИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ КРИВИХ БЕЗЬЄ ДРУГОГО СТЕПЕНЯ

Ванін В.В., д.т.н.,
Вірченко Г.А., д.т.н.,
НТУ «Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського»
Шамбіна С.Л., к.т.н.
Російський університет дружби народів
Тел. (044) 204-94-46

Анотація **– головна мета статті полягає в обґрунтуванні деяких важливих властивостей кривих Безьє другого степеня, які широко використовуються під час комп'ютерного геометричного моделювання різноманітних технічних об'єктів.**

Ключові слова **– автоматизоване проектування, комп'ютерне геометричне моделювання, криві Безьє другого степеня, технічні об'єкти.**

Постановка проблеми. Основу автоматизованого проектування багатьох технічних об'єктів нині складають засоби комп'ютерного геометричного моделювання. Даний факт обумовлений тим, що серед великого числа розрахункових моделей геометричні займають особливе місце, пов'язане з їх об'єднуючою та узгоджувальною роллю при проведенні комплексної оптимізації створюваних виробів.

Тому задачі покращення існуючих засобів автоматизованого формоутворення на засадах удосконалення відповідного математичного апарату становлять актуальну наукову проблему.

Аналіз останніх досліджень. Опис кривих Безьє міститься у значній кількості літературних джерел, зокрема, [1, 2]. Це стосується не тільки визначення даних ліній, а й висвітлення їх різноманітних властивостей, особливо корисних для реалізації ефективного комп'ютерного геометричного моделювання під час автоматизованого проектування технічних об'єктів.

Формулювання цілей статті. Метою публікації є обґрунтування для кривих Безьє другого степеня деяких їх властивостей, що можуть бути застосовані при формоутворенні промислової продукції.

Основна частина. Розпочнемо з алгоритму Кастельжо [2], який дозволяє обчислювати потрібні координати точок кривої Безьє шляхом використання почергової лінійної інтерполяції суміжних вершин характеристичної ламаної та поступовим зменшенням числа її ланок.

На рис. 1 показано відповідну побудову поточної точки $\mathbf{r}(u)$ кривої Безьє другого степеня, що в декартовій системі координат Oxy визначається радіус-векторами $\mathbf{r}_0(x_0,y_0)$, $\mathbf{r}_1(x_1,y_1)$, $\mathbf{r}_2(x_2,y_2)$.

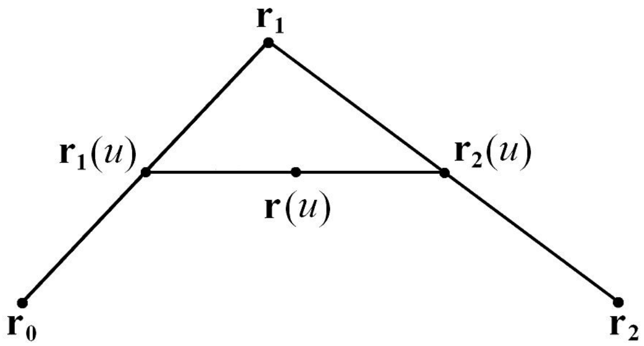

Рис. 1. Побудова поточної точки кривої Безьє
другого степеня за допомогою алгоритму Кастельжо

При цьому

$$\mathbf{r}_1(u)=(1-u)\mathbf{r}_0+u\mathbf{r}_1,\ \ \mathbf{r}_2(u)=(1-u)\mathbf{r}_1+u\mathbf{r}_2,$$
$$\mathbf{r}(u)=(1-u)\mathbf{r}_1(u)+u\mathbf{r}_2(u), \tag{1}$$

де $u\in[0,\ 1]$ – параметр.

На підставі співвідношень (1), застосувавши позначення $|\mathbf{r}_0\mathbf{r}_1|=a$, $|\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2|=b$ та $|\mathbf{r}_1(u)\mathbf{r}_2(u)|=c$, отримуємо

$$\begin{gathered}
|\mathbf{r}_0\mathbf{r}_1(u)|=|u(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)|=ua=a_1,\\
|\mathbf{r}_1(u)\mathbf{r}_1|=|(1-u)(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)|=(1-u)a,\\
|\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2(u)|=|u(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)|=ub,\\
|\mathbf{r}_2(u)\mathbf{r}_2|=|(1-u)(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)|=(1-u)b=b_2,\\
|\mathbf{r}_1(u)\mathbf{r}(u)|=|u(\mathbf{r}_2(u)-\mathbf{r}_1(u))|=uc=b_1,\\
|\mathbf{r}(u)\mathbf{r}_2(u)|=|(1-u)(\mathbf{r}_2(u)-\mathbf{r}_1(u))|=(1-u)c=a_2.
\end{gathered} \tag{2}$$

Згідно з формулами (2) одержуємо наведене на рис. 2 зображення, де додатковими тонкими лініями показані характеристичні трикутники $\mathbf{r}_0\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_0\mathbf{r}_1(u)\mathbf{r}(u)$, $\mathbf{r}(u)\mathbf{r}_2(u)\mathbf{r}_2$ з площами відповідно S, S_1, S_2.

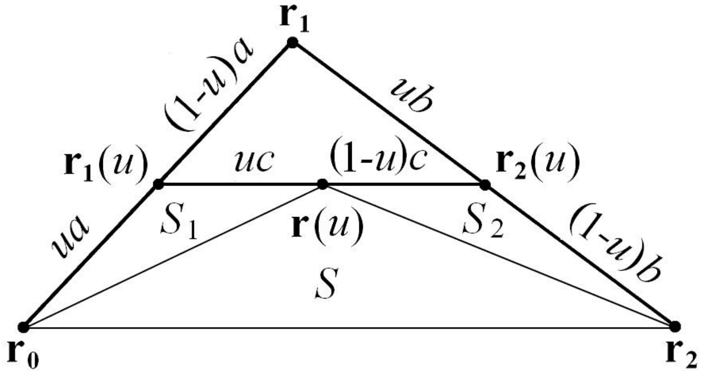

Рис. 2. Візуалізація співвідношень (2) при побудові поточної точки кривої Безьє другого степеня

Із залежностей (1) маємо аналітичний вираз для кривої Безьє другого степеня

$$\mathbf{r}(u)=(1-u)^2\mathbf{r}_0+2(1-u)u\mathbf{r}_1+u^2\mathbf{r}_2, \quad (3)$$

де $u\in[0,\ 1]$.

Під час комп’ютерного геометричного моделювання технічних об’єктів важливим фактором якості є додержання потрібної гладкості складених обводів. Кривина довільної плоскої лінії $\mathbf{r}(x(u),y(u))$, див. довідник [3], визначається співвідношенням

$$K=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}, \quad (4)$$

де через $\dot{x}, \ddot{x}, \dot{y}, \ddot{y}$ позначено відповідно першу і другу похідну від $x(u)$ та $y(u)$.

З формули (4) одержуємо залежність для радіуса R кривини

$$R=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}|}. \quad (5)$$

На основі виразу (3) запишемо

$$\dot{\mathbf{r}}(u) = 2(\mathbf{r}_0 - 2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)u + 2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0),$$
$$\ddot{\mathbf{r}}(u) = 2(\mathbf{r}_0 - 2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2). \quad (6)$$

Площа S трикутника $\mathbf{r}_0\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2$ визначається як

$$S = 0{,}5\left|(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)\times(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\right| =$$
$$= 0{,}5\left|(x_0 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_0 - y_1)\right|. \quad (7)$$

Обчислюємо, використавши співвідношення (5) … (7) та рис. 2, радіуси кривини в точках $\mathbf{r}_0$ і $\mathbf{r}_2$

$$R_0 = R(0) = \frac{(\dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2)^{3/2}}{\left|\dot{x}(0)\ddot{y}(0) - \ddot{x}(0)\dot{y}(0)\right|} =$$
$$= \frac{((2(x_1 - x_0))^2 + (2(y_1 - y_0))^2)^{3/2}}{\left|2(x_1 - x_0)2(y_0 - 2y_1 + y_2) - 2(x_0 - 2x_1 + x_2)2(y_1 - y_0)\right|} =$$
$$= \frac{((2(x_1 - x_0))^2 + (2(y_1 - y_0))^2)^{3/2}}{4\left|(x_0 - x_1)((y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)) - ((x_2 - x_1) - (x_1 - x_0))(y_0 - y_1)\right|} = \frac{a^3}{S},$$
$$R_2 = R(1) = \frac{(\dot{x}(1)^2 + \dot{y}(1)^2)^{3/2}}{\left|\dot{x}(1)\ddot{y}(1) - \ddot{x}(1)\dot{y}(1)\right|} =$$
$$= \frac{((2(x_2 - x_1))^2 + (2(y_2 - y_1))^2)^{3/2}}{\left|2(x_2 - x_1)2(y_0 - 2y_1 + y_2) - 2(x_0 - 2x_1 + x_2)2(y_2 - y_1)\right|} = \quad (8)$$
$$= \frac{((2(x_2 - x_1))^2 + (2(y_2 - y_1))^2)^{3/2}}{4\left|((x_0 - x_1) - (x_1 - x_2))(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)((y_2 - y_1) - (y_1 - y_0))\right|} = \frac{b^3}{S}.$$

Покажемо, що кутовий коефіцієнт k дотичної в точці $\mathbf{r}(u)$ кривої Безьє другого степеня збігається з відповідною величиною для відрізка $\mathbf{r}_1(u)\mathbf{r}_2(u)$, яка на підставі формул (1) дорівнює

$$k = \frac{y_{\mathbf{r}_2(u)} - y_{\mathbf{r}_1(u)}}{x_{\mathbf{r}_2(u)} - x_{\mathbf{r}_1(u)}} = \frac{(u-1)y_0 + (1-2u)y_1 + uy_2}{(u-1)x_0 + (1-2u)x_1 + ux_2}. \quad (9)$$

Аналогічний виразу (9) результат отримаємо із застосуванням співвідношень (6) у наступних залежностях

$$k=\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}(u)}{\dot{x}(u)}=\frac{(u-1)y_0+(1-2u)y_1+uy_2}{(u-1)x_0+(1-2u)x_1+ux_2},$$

що і треба було довести.

Оскільки ділянки початкової кривої Безьє другого степеня, які обмежені характеристичними трикутниками з площами S_1 та S_2, є двома частинами однієї лінії, то на основі формули (8) маємо

$$\frac{a_1^{\,3}}{S_1}=\frac{a^3}{S},\quad \frac{b_2^{\,3}}{S_2}=\frac{b^3}{S},\quad \frac{b_1^{\,3}}{S_1}=\frac{a_2^{\,3}}{S_2}. \tag{10}$$

З останнього виразу (10), використовуючи належні значення (2), встановлюємо властивість

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{b_1^{\,3}}{a_2^{\,3}}=\left(\frac{u}{1-u}\right)^3, \tag{11}$$

де $u\in[0,\ 1]$.

Залежність (11) також записується у вигляді

$$\frac{h_a}{h_b}=\frac{b_1^{\,2}}{a_2^{\,2}}, \tag{12}$$

де h_a та h_b – відстані відповідно від $\mathbf{r}_0$ та $\mathbf{r}_2$ до дотичної кривої Безьє другого степеня в точці $\mathbf{r}(u)$.

Відношення площ S_1 та S_2 можна встановити й на засадах застосування показаного на рис. 2 зображення та теореми про пропорційні відрізки.

Таким чином, нами подано, див. залежності (1) … (12), ряд важливих властивостей кривих Безьє другого степеня. Це стосується визначення різноманітних їх диференціальних та інтегральних характеристик, а також існуючих взаємозв'язків між ними, що дозволяє успішно розв'язувати відповідні позиційні та метричні геометричні задачі.

Висновки. У даній публікації для кривих Безьє другого степеня обґрунтовано деякі їх властивості, що можуть бути використані з метою підвищення ефективності автоматизованого проектування різноманітних технічних об’єктів. Проаналізований напрямок надалі доцільно розвивати шляхом проведення відповідних подальших наукових досліджень.

Література

1. *Роджерс Д.* Машинные основы машинной графики / Д. Роджерс, Дж. Адамс. – М.: Мир, 2001. – 604 с.
2. *Голованов Н.Н.* Геометрическое моделирование / Н.Н. Голованов. – М.: Физматлит, 2002. – 472 с.
3. *Бронштейн И.Н.* Справочник по математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1981. – 720 с.

ОБОСНОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ КРИВЫХ БЕЗЬЕ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

В.В. Ванин, Г.А. Вирченко, С.Л. Шамбина

Аннотация **– главная цель статьи состоит в обосновании некоторых важных свойств кривых Безье второй степени, которые широко используются при автоматизированном геометрическом моделировании различных технических объектов.**

JUSTIFICATION FOR SOME PROPERTIES OF BEZIER SECOND DEGREE CURVES

V. Vanin, G. Virchenko, S. Shambina

Summary

The main purpose of this article is a justification for some important properties of Bezier second degree curves, which are widely used for automated geometric modeling of various technical objects.