УДК 514.18

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДВОЛАНКОВИХ *S*-ПОДІБНИХ КРИВИХ

Борисенко В. Д., д.т.н.,
Устенко С. А., д.т.н.,
Друзь Є. І. , студент
Миколаївський національний університет імені В. О. Сухомлинського
Тел (0512) 71-30-25

***Анотація* – робота присвячена геометричному моделюванню дволанкової кривої, яка описується двома експонентами. Моделювання реалізується таким чином, щоб надати складеній кривій *s*-подібну форму.**

***Ключові слова* – геометричне моделювання, експоненціальна крива, друга похідна, дволанкова *s*-подібна крива.**

Постановка проблеми. В багатьох практичних застосуваннях, наприклад в судно- та турбобудуванні, є потреба в геометричному моделюванні так званих *s*-подібних кривих, характерним для яких є наявність в заданій точці перегину та забезпечення в ній певного кута нахилу дотичної. Крім того, крива має забезпечувати в початковій і кінцевій точках задані кути нахилу дотичних. Оскільки серед математичних кривих не виявлено таких, які б забезпечували накладені умови, то будемо формувати необхідну криву з двох ділянок, кожну з яких будемо описувати експоненціальною залежністю. Подібні криві застосовуються при проектуванні скелетних ліній профілів лопаток високонавантажених осьових компресорів потужних газотурбінних двигунів.

Формулювання цілей статті. Метою цієї статті є розробка методу геометричного моделювання дволанкової *s*-подібної кривої, що описується двома експоненціальними залежностями та забезпечує задані кути нахилу дотичної в початковій і кінцевій точках, а також в точці перегину. Крім того, розроблюваний метод має дозволяти впливати на величину другої похідної в початковій та кінцевій точках складеної кривої. У цих точках друга похідна має визначатися як деяка частка від екстремального значення другої похідної.

Аналіз останніх досліджень. У сучасній літературі з прикладної геометрії можна знайти достатньо різноманітних методів геометричного моделювання кривих, у тому числі складених [1 – 9]. При цьому застосовуються явні, неявні, параметричні форми подання кривих. Останніми роками набули популярності методи моделювання кривих в натуральній параметризації. Але, на жаль, авторам цієї роботи не вдалося виявити публікації, в яких будувалися складені криві за означених вище умов.

Основна частина. Моделювання дволанкових експоненціальних кривих виконується за умови, що незалежна змінна x варіюватиметься в межах від нуля до одиниці, тобто буде безрозмірною.

При моделюванні кривих застосовуються наступні граничні умови:

$$\text{при} \;\; x=0: \;\; y=0, \; y'=\mathrm{tg}\alpha_1, \; y''=P\cdot\left(y''\right)_{extr};$$
$$\text{при} \;\; x=1: \;\; y'=\mathrm{tg}\alpha_2, \; y''=Q\cdot\left(y''\right)_{extr},$$

де α_1, α_2 – кути нахилу дотичних до модельованої кривої в початковій і кінцевій її точках; P і Q – деякі параметри, менші за одиницю, які визначатимуть частку екстремального значення другої похідної також в початковій та кінцевій точках кривої, відповідно.

Для моделювання s-подібної дволанкової кривої цих граничних умов недостатньо. Тому додамо до записаних вище умов ще одну:

$$\text{при} \;\; x=s, \; y'=\mathrm{tg}\alpha_s.$$

Для щоб мати можливість впливати на другу похідну кривої, візьмемо рівняння кривої в такому вигляді, щоб у ньому була явно присутня друга похідна. Зокрема, рівняння експоненціальної кривої матиме наступний вигляд:

$$y''=b\left(x-s\right)e^{a\left(x-s\right)}. \tag{1}$$

У цьому рівнянні невідомими є два коефіцієнти a і b.

Відразу ж визначимося з екстремальним значенням цієї похідної. Відомо, що екстремальне значення другої похідної y'' буде мати місце, коли $y'''=0$, це відповідає координаті x

$$x_{extr} = s - \frac{1}{a},$$

а екстремальне значення другої похідної буде дорівнювати

$$y''_{\text{ext}} = -\frac{b}{ae}. \qquad (2)$$

Подвійним інтегруванням рівняння (1) отримаємо вираз для першої похідної та безпосередньо рівняння кривої

$$y' = \frac{b}{a^2} e^{a(x-s)} [a(x-s) - 1] + c; \qquad (3)$$

$$y = \frac{b}{a^3} e^{a(x-s)} [a(x-s) - 2] + cx + d. \qquad (4)$$

Як випливає з розгляду цих виразів, подвійне інтегрування призвело до появи ще двох невідомих коефіцієнтів c і d.

Визначимося з цими чотирма коефіцієнтами. Зазначимо, що до позначень цих коефіцієнтів будемо додавати індекси, які відповідатимуть першій та другій ділянкам дволанкової кривої.

Застосовуючи граничні умови для початкової точки першої ділянки, можна з рівняння (4) знайти вираз для коефіцієнта d_1:

$$d_1 = (a_1 s + 2) \frac{b_1}{a_1^3} e^{-a_1 s}.$$

Оскільки в цій точці відомий кут нахилу дотичної, то з виразу (3) можна знайти залежність для коефіцієнта c_1:

$$c_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 + (a_1 s + 1) \frac{b_1}{a_1^2} e^{-a_1 s}.$$

Скориставшись граничними умовами для точки перегину, з рівняння (3) отримаємо

$$c_1 = \mathrm{tg}\alpha_s + \frac{b_1}{a_1^2}.$$

Прирівнявши між собою два вирази для c_1, визначимо коефіцієнт b_1

$$b_1 = \frac{a_1^2(\mathrm{tg}\alpha_1 - \mathrm{tg}\alpha_s)}{1-(a_1 s+1)e^{-a_1 s}}.$$

Коефіцієнти b_1, c_1 і d_1 можна визначити, якщо буде відомим коефіцієнт a_1.

Розглянемо детально визначення цього коефіцієнта. З вище записаних граничних умов випливає, що друга похідна в початковій точці першої ділянки s-подібної кривої має бути певною часткою екстремального значення другої похідної, яке визначається за отриманим вище виразом (2).

Прирівнявши (1) з (2), помноженим на P після нескладних перетворень будемо мати:

$$P = a_1 s e^{(1-a_1 s)} \tag{5}$$

Оскільки параметр P задається з вихідними даними, то числовим розв'язанням рівняння (5) визначаємо величину коефіцієнта a_1, а отже й всі інші коефіцієнти, необхідні для побудови першої ділянки дволанкової s-подібної кривої.

Маючи всі коефіцієнти першої ділянки дволанкової експоненціальної кривої, розраховуємо за виразом (4) координати її кінцевої точки, яка надалі приймається за початкову точку другої ділянки.

Переходимо до визначення коефіцієнтів другої ділянки складеної кривої. В точці перегину, де координата x дорівнює величині s, відомий кут нахилу дотичної α_s. Це надає можливість з виразу (3) отримати залежність для коефіцієнта c_2:

$$c_2 = \mathrm{tg}\alpha_s + \frac{b_2}{a_2^2}. \tag{6}$$

При $x = s$ з рівняння (4) визначаємо координату y точки, яка знаходиться на межі між першою та другою ділянками дволанкової s-

подібної кривої. Знаходимо вираз для коефіцієнта d_2

$$d_2 = 2\left(\frac{b_2}{a_2^3} - \frac{b_1}{a_1^3}\right) + s(c_1 - c_2) + d_1.$$

Для кінцевої точки дволанкової кривої маємо $x = 1,\ y' = \mathrm{tg}\alpha_2$. Підставивши ці значення до залежності (3), отримаємо вираз для коефіцієнта c_2:

$$c_2 = \mathrm{tg}\alpha_2 - \frac{b_2}{a_2^2} e^{a_2(1-s)}[a_2(1-s) - 1]. \tag{7}$$

Сумісне розв'язання рівнянь (6) і (7) визначає коефіцієнт b_2:

$$b_2 = \frac{a_2^2(\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_s)}{1 + [a_2(1-s) - 1]e^{-a_2(1-s)}}.$$

Як і у випадку першої ділянки, другу похідну в кінцевій точці другої ділянки будемо визначати як деяку частку від екстремального значення другої похідної. Ця частка буде знаходитися завдяки коефіцієнту Q, який, як і коефіцієнт P, задається користувачем з вихідними даними. Отже, при $x = 1$ маємо $y'' = Q(y''_{\mathrm{ext}})$. Звідси

$$Q = (s-1)a_2 e^{1+a_2(1-s)}.$$

У цьому виразі тільки одна невідома величина, це коефіцієнт a_2, який також знаходиться числовим методом.

Таким чином, визначені всі коефіцієнти першої і другої ділянки дволанкової s-подібної кривої.

На підставі запропонованого методу розроблено програму розрахунків і візуалізації отриманих результатів моделювання дволанкової s-подібної кривої.

На рис. 1 наведено п'ять дволанкових кривих, які моделювалися з однаковими значеннями кутів $\alpha_1 = 10^\circ$, $\alpha_2 = 25^\circ$ і $s = 0{,}7$ та однаковими значеннями параметрів $P = Q$ для кожної модельованої кривої. Розбіжність кривих пояснюється тим, що вказані параметри варіювалися в межах від 0,1 до 0,9 з кроком 0,2. Нижня крива відповідає меншим значенням параметрів P і Q, верхня – найбільшим їх значенням. Маленькі кола на рис. 1 відповідають точці, в якій

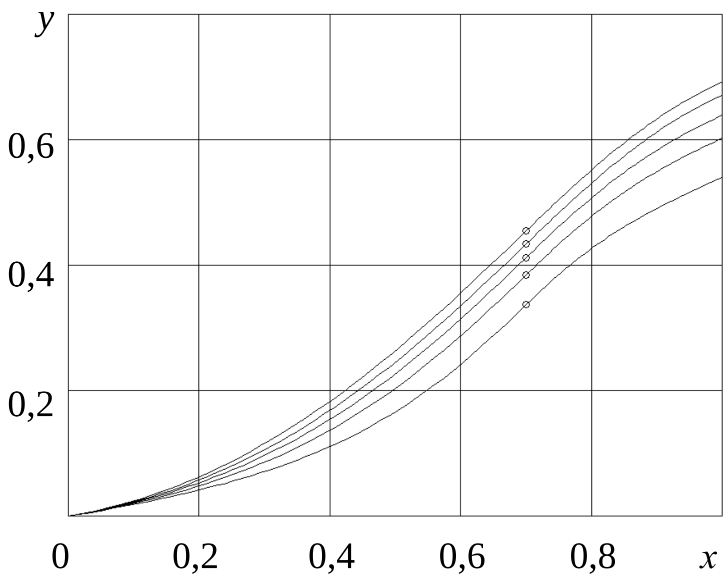

Рис. 1. Вплив параметрів P і Q на s-подібні криві

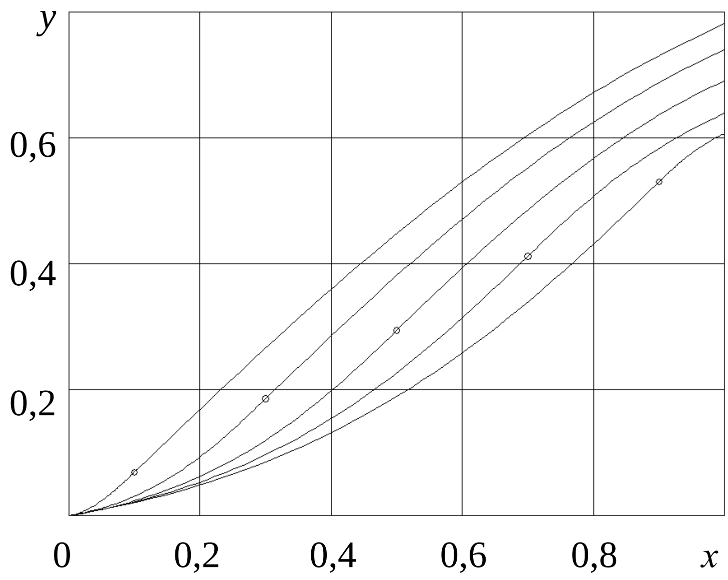

Рис. 2. Вплив абсциси точки перегину на s-подібні криві

відбувається перегин дволанкової s-подібної кривої. Зазначимо, що ордината кінцевої точки не задається, а визначається в процесі моделювання кривої. Отже, із збільшенням параметрів P і Q ордината кінцевої точки зростає.

На рис. 2 продемонстровано вплив координати s розташування точки перегину. Ця координата варіювалася в межах від 0,1 до 0,9 з кроком 0,2. Маленькі кола на цьому рисунку дозволяють визначитися, як ця координата впливає на характер проходження результуючих кривих. Криві моделювалися з тими з кутами, що й на попередньому рисунку. Щодо параметрів *P* і *Q*, то вони залишалися сталими і були рівними 0,5. Зазначимо, що при зменшенні *s* ордината кінцевої точки зростає.

Аналізуючи наведені графічні результати, можна прийти до висновку, що можна розробити алгоритм, за яким шляхом певного варіювання розглянутих вище параметрів можна забезпечити проходження дволанкової кривої через задану кінцеву точку модельованої кривої.

На рис. 3 для прикладу показані три теоретичні шпангоути кормової частини судна.

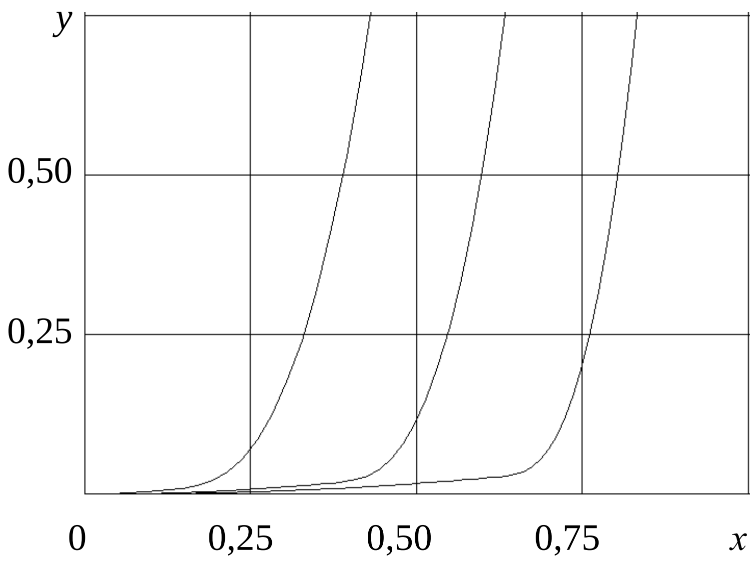

Рис. 3. Теоретичні шпангоути кормової частини судна

Висновки. Запропонований метод геометричного моделювання дволанкових *s*-подібних кривих базується на застосуванні ділянок експоненціальних кривих. Він дозволяє впливати на другі похідні в початковій та кінцевій точках модельованої кривої. Розроблений програмний продукт і проведені розрахунки підтвердили працездатність запропонованого методу. Подальші дослідження треба спрямувати на розробку заходів, які б забезпечували проходження складеної кривої через задану її кінцеву точку.

Література

1. *Агарков, О. Ю.* Моделювання складених кривих із застосуванням лінійних графіків розподілу кривини [Текст] / О.Ю. Агарков // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету "Прикладна геометрія та інженерна графіка". – Мелітополь: ТДАТУ, 2014. – Вип. 4. – Том 58. – С. 3 – 7.

2. *Борисенко В.* Моделювання плоских кривих у натуральній параметризації [Текст] / В. Борисенко, О. Агарков, К. Палько, М. Палько // Геометричне моделювання та інформаційні технології, 2016, № 1. – С. 23 – 27.
3. *Борисенко В.* Комп’ютерне моделювання плоских кривих стосовно до теоретичного креслення корпусу судна [Текст] / В. Борисенко, І. Устенко // Геометричне моделювання та інформаційні технології, 2016, № 2. – С. 22 – 28.
4. *Голованов, Н. Н.* Геометрическое моделирование [Текст] /Н.Н. Голованов. – М. : Физматлит, 2002. – 472 с.
5. *Устенко С.* Геометричне моделювання плоскої кривої із параболічною кривиною при заданому її відхилені від лінійного розподілу [Текст] / С. Устенко, О. Синявін // Геометричне моделювання та інформаційні технології, 2016, № 1. – С. 109 – 115.
6. *Фокс, А.* Вычислительная геометрия. Применение в проектирова-нии и на производстве [Текст] / А. Фокс, М. Пратт. – М.: Мир, 1982. – 304 с.
7. *Шикин, Е.В.* Кривые на плоскости и в пространстве [Текст] / Е.В. Шикин, М.М. Каменецкий. – М.: Фазис, 1997. – 325 с.
8. *Lockwood, E.H.* A book of curves [Text] / E. H. Lockwood. – Cambridge University Press, 1961. – 199 p.
9. *Farin, G.* Curves and surfacts for computer-aided geometric design: [a practical guide] [Text] / G. Farin. – Academic Press Inc., 1997. – 447 p.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХЗВЕННЫХ S-ОБРАЗНЫХ КРИВЫХ

В.Д. Борисенко, С.А. Устенко, Е.И. Друзь

Аннотация – работа посвящена геометрическому моделированию двухзвенной кривой, описываемой двумя экспонентами. Моделирование осуществляется таким образом, чтобы обеспечить составной кривой s-образную форму.

GEOMETRIC MODELING OF A TWO-TIER *S*-CURVE

V. Borisenko, S. Ustenko, E. Druz

Summary

The work is devoted to the geometric modeling of a two-tier curve described by two exponentials. Simulation is carried out so as to provide an integral s-shaped curve.