УДК 512.2

ПАРАМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ ПОВЕРХНІ ВІДНОСНО СИСТЕМИ ЇЇ ІНВАРІАНТНОГО ТРИГРАННИКА В ТОЧЦІ

Фролов О. В., к.т.н.
Донецький національний технічний університет
Тел/факс (062) 338-4885

***Анотація* – розглядається координатна система побудована на основі супровідного тригранника поверхні, осі якого розташовані за напрямками її нормалі та головних кривин у деякій точці на поверхні.**

***Ключові слова* – супровідний тригранник поверхні, головні напрямки, кривина, квадратичні форми поверхні.**

Постановка проблеми. Подальший розвиток геометричного моделювання об’єктів, що утворюються кінематичним способом, потребує застосування притаманним механіці засобів. Так, зазвичай, для визначення положення твердого тіла в кінематиці поряд з інерціальною (нерухомою) системою відліку розглядається рухома система незмінно пов’язана з тілом, що має початок у довільній точці тіла [1]. Особливу увагу, в цьому сенсі, притягує рухома система, яка має безпосередній зв’язок з формою тіла в цій точці, а, отже, не залежить від обраної параметризації поверхні тіла. Розгляд такої координатної системи, становить проблему, що досліджується в роботі.

Аналіз останніх досліджень. Аналогом тригранника Френе, що відіграє визначальну роль в теорії кривих, в теорії поверхонь слугує рухомий супровідний тригранник, що визначається в точці на поверхні. Вперше загальні принципи використання методу рухомого тригранника до дослідження поверхонь було запропоновано Г. Дарбу, що дозволило йому отримати значні результати в класичній теорії поверхонь [2]. Подальший розвиток цього методу пов’язаний з роботами Е. Картана, який виклав цим методом теорію кінцевих безперервних груп перетворень та розробив свій метод зовнішніх форм [3]. Систематичне використання цього методу можливо також знайти в працях С. П. Фінікова [4,5,6]. Застосування теорії тригранника до задач формоутворення поверхонь на станках з ЧПК можливо знайти в роботах С. П. Радзевича [8, 9].

На відміну від тригранника Френе, осі якого мають однозначно визначені напрямки незалежно від параметризації кривої лінії, призначення супровідного тригранника в точці поверхні натикається на труднощі, які призводять до введення припущень чи обмежень. Вимога взаємної ортогональності осей тригранника дозволяє призначити одну з осей за напрямком нормалі до поверхні, а дві другі розташувати у дотичній площині. Оскільки напрямки дотичних до координатних ліній поверхні в загальному випадку не є взаємно перпендикулярними, беруться до розгляду тільки ортогональні сітки чи вводиться “паразитний” параметр положення осей тригранника в дотичній площині. В такому випадку зміна параметризації поверхні призводить до невизначенності цих осей. Вимога ж інваріантності розташування осей тригранника потребує однозначного визначення напрямків головних кривин поверхні в точці [7]. Остання вимога цілком виключає із розгляду тільки дві відомі поверхні – площину та сферу, всі точці яких є омбілічними, а, отже, є більш прийнятною, оскільки не потребує спеціальної параметризації поверхні.

Отже, надалі в роботі розглядається супровідний тригранник поверхні, осі якого складають прямокутну систему та визначаються ортами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ та $\mathbf{e}_3$ у відповідності до напрямків двох головних кривин та нормалі до поверхні в точці. Такий тригранник, згідно з [3,6], будемо називати інваріантним тригранником Дарбу поверхні.

Формулювання цілей статті. За поданими параметричними рівняннями поверхні визначити положення її тригранника Дарбу в точці та скласти формули переходу від довільної системи координат, відносно якої розглядається поверхня, до системи, осі якої розташовані за напрямками її інваріантного тригранника у визначеній точці.

Основна частина. Розглянемо поверхню подану параметричними рівняннями відносно прямокутної декартової системи $Oxyz$

$$x = f(u,v),\ y = \varphi(u,v),\ z = \psi(u,v) \tag{1}$$

та точку M на ній, що визначається значенням параметрів u_0 та v_0.

При цьому згідно з попереднім вважається, що точка M не є омбілічною точкою поверхні.

Перейдемо до визначення положення осей супровідного тригранника в розглядуваній точці. Для цього будемо вважати відомими вирази перших та других часткових похідних рівнянь (1) та отриманих з них коефіцієнтів першої – E, F, G та другої – L, M, N квадратичних форм поверхні.

Напрямок одиничного вектора нормалі до поверхні в точці M – $\boldsymbol{e}_3$ визначається значенням косинусів трьох кутів - α_3, β_3, γ_3, що утворює цій вектор з ортами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ системи $Oxyz$. Розглядаючи $\boldsymbol{e}_3$ як векторний добуток одиничних векторів дотичних до ліній $u=const$ та $v=const$ в цій точці, отримаємо вирази косинусів [7]

$$\cos\alpha_3 = \frac{y_u z_v - z_u y_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \cos\beta_3 = \frac{z_u x_v - x_u z_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \cos\gamma_3 = \frac{x_u y_v - y_u x_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad (2)$$

де: x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v – вирази перших часткових похідних функцій (1), які беруться при значенні параметрів u_0 та v_0.

Визначення головних напрямків поверхні в поданій точці можливо здійснити двома шляхами:

- безпосередньо з виразів коефіцієнтів першої та другої квадратичних форм поверхні;
- з виразів головних кривин (або радіусів кривини) та коефіцієнтів квадратичних форм;

Перейдемо до першого способу визначення напрямків головних кривин в точці поверхні (1). Запишемо основну формулу для кривини нормального перерізу в точці [7]:

$$k = \frac{II}{I} = \frac{L\,du^2 + 2M\ du\,dv + N\ dv^2}{E\,du^2 + 2F\ du\,dv + C\ dv^2}. \quad (3)$$

Головні напрямки отримують з (3) як екстремальні значення цієї функції з аргументом $\frac{du}{dv}$, що призводить до рівності нулеві квадратичної форми [7]:

$$(LF - ME)du^2 + (LG - NE)dudv + (MG - NF)dv^2 = 0. \quad (4)$$

Якщо точка поверхні не є омбілічною, коефіцієнти рівняння (4) не дорівнюють одночасно нулеві, більш того для дійсності коренів цього рівняння дискримінант

$$(LG - NE)^2 + 4(LF - ME)(NF - MG) > 0.$$

Отже, можлива тільки одночасна рівність нулеві двох коефіцієнтів при квадратах диференціалів, тоді головні напрямки визначаються рівняннями $du = 0, dv = 0$, тобто в точці координатні лінії збігаються з лініями кривини.

Нехай дорівнює нулеві перший або третій коефіцієнт цього рівняння, тоді (4) можливо розкласти на два лінійних множника першим з яких можливо призначити диференціал dv (коли $(LF - ME) = 0$) або du (коли $(MG - NF) = 0$). Отримаємо два корені рівняння (4): перший - відповідно $dv = 0$ (або $du = 0$), другий - як співвідношення диференціалів $\frac{du}{dv}$ (або $\frac{dv}{du}$). Отже, однин з напрямків координатних ліній збігається з головним.

У випадках, що залишились (в тому числі, коли $(LG - NE) = 0$), маємо право поділити (4) на квадрат одного з диференціалів. Нехай це буде dv^2, тоді отримуємо розв'язок (4) у вигляді:

$$\frac{du}{dv} = \frac{NE - LG \pm \sqrt{(NE - LG)^2 + 4(LF - ME)(NF - MG)}}{2(LF - ME)} . \quad (5)$$

Оскільки рівняння (4) в загальному випадку має два корені, що визначаються співвідношенням диференціалів, позначимо перший з них як $\frac{du}{dv}$, а другий - $\frac{\delta u}{\delta v}$. Для визначення одиничних векторів головних напрямків поверхні – $\boldsymbol{e}_1$ та $\boldsymbol{e}_2$, отримаємо їх розкладення за векторами $\boldsymbol{r}_u$ та $\boldsymbol{r}_v$ дотичних до координатних ліній поверхні (1) за формулами [7]:

$$\boldsymbol{e_1} = \frac{\boldsymbol{r_u}\frac{du}{dv} + \boldsymbol{r_v}}{\sqrt{E\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2F\frac{du}{dv} + G}}, \quad \boldsymbol{e_2} = \frac{\boldsymbol{r_u}\frac{\delta u}{\delta v} + \boldsymbol{r_v}}{\sqrt{E\left(\frac{\delta u}{\delta v}\right)^2 + 2F\frac{du}{dv} + G}} . \quad (6)$$

Переходячи від векторної форми до координатної, маємо вирази напрямних косинусів цих векторів:

$$\cos\alpha_1 = \frac{x_u \dfrac{du}{dv} + x_v}{\sqrt{E\left(\dfrac{du}{dv}\right)^2 + 2F\dfrac{du}{dv} + G}}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{x_u \dfrac{\delta u}{\delta v} + x_v}{\sqrt{E\left(\dfrac{\delta u}{\delta v}\right)^2 + 2F\dfrac{du}{dv} + G}};$$

$$\cos\beta_1 = \frac{y_u \dfrac{du}{dv} + y_v}{\sqrt{E\left(\dfrac{du}{dv}\right)^2 + 2F\dfrac{du}{dv} + G}}, \quad \cos\beta_2 = \frac{y_u \dfrac{\delta u}{\delta v} + y_v}{\sqrt{E\left(\dfrac{\delta u}{\delta v}\right)^2 + 2F\dfrac{du}{dv} + G}};$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{z_u \dfrac{du}{dv} + z_v}{\sqrt{E\left(\dfrac{du}{dv}\right)^2 + 2F\dfrac{du}{dv} + G}}, \quad \cos\gamma_2 = \frac{z_u \dfrac{\delta u}{\delta v} + z_v}{\sqrt{E\left(\dfrac{\delta u}{\delta v}\right)^2 + 2F\dfrac{du}{dv} + G}}, \qquad (7)$$

де всі вирази похідних та коефіцієнтів квадратичних форм, що входять до (5) та (7) беруться при значенні параметрів, яким відповідає точка M.

Перейдемо до другого способу визначення головних напрямків. Насамперед отримаємо функції, що визначають головні кривини поверхні в точці. Це можливо зробити, наприклад, на основі відомих залежностей для гаусової та середньої кривин поверхні [7]. В результаті прийдемо до квадратного рівняння, корені якого:

$$k_{1,2} = \frac{LG - 2MF + EN \mp \sqrt{(NE - LG)^2 + 4(LF - ME)(NF - MG))}}{2(EG - F^2)}, \qquad (8)$$

де в правій частині (8) значення подвійного знаку надано у відповідності до напрямків (5), в чому можливо впевнитись безпосередньою підстановкою виразу для du через праву частину (5) та dv до (3).

Визначивши головні кривини, складемо на основі (3) дві квадратичних форми наступним чином:

$$A = II - k_1 I, \; \bar{A} = II - k_2 I. \qquad (9)$$

Форми (9) вирізняються тим, що мають дискримінант, який дорівнює нулеві, а, отже, можуть бути представлені у вигляді квадратів двох лінійних форм:

$$A = (a_1 du + b_1 dv)^2, \overline{A} = (a_2 du + b_2 dv)^2, \tag{10}$$

де коефіцієнти $a_i, b_i\ (i = 1,2)$ можуть бути отримані з (9) через дві головних кривини та чотири коефіцієнти квадратичних форм поверхні (два - першої та два - другої). Покажемо це на прикладі першої з форм (8), для цього представимо її у вигляді:

$$A = (L - k_1 E)\, du^2 + 2(M - k_1 F)\, du\, dv + (N - k_1 G)\, dv^2. \tag{11}$$

Рівність нулеві дискримінанта (11) надає можливість представити будь – який з коефіцієнтів при диференціалах через два інших. Отже, маємо три варіанти представлення a_1 та b_1:

$$a_1' = \sqrt{L - k_1 E}, a_1'' = \frac{M - k_1 F}{\sqrt{N - k_1 G}}, a_1''' = a_1';$$

$$b_1' = \frac{M - k_1 F}{\sqrt{L - k_1 E}}, b_1'' = \sqrt{N - k_1 G}, b_1''' = b_1''. \tag{12}$$

Згідно з (3) рівність нулеві першої з форм (9) визначає напрямок, якому відповідає перша з головних кривин поверхні в точці M. Отримаємо цей напрямок у вигляді:

$$\frac{du}{dv} = -\frac{b_1}{a_1}, \tag{13}$$

де a_1 та b_1 визначаються за формулами (12).

Аналогічним чином приходимо до визначення другого з головний напрямків через коефіцієнти другої з форм (10):

$$\frac{\delta u}{\delta v} = -\frac{b_2}{a_2}, \tag{14}$$

де вирази для a_2 та b_2 східні з (12), якщо замість k_1 записати k_2.

Вилучення з дискримінантів форм (9) коефіцієнтів при диференціалах надає можливість також представлення двох коефіцієнтів квадратичних форм поверхні (одно – першої форм, одного - другої) через вирази чотирьох інших коефіцієнтів та функції головних кривин. Наприклад, вирази a'_1, b'_1 та a'_2, b'_2 вилучають відповідні коефіцієнти $N - k_1 G$ та $N - k_2 G$. В такому випадку коефіцієнти N та G можуть бути представлені у вигляді:

$$N = \frac{k_1}{(k_1 - k_2)} b_2'^2 + \frac{k_2}{(k_2 - k_1)} b_1'^2, \; G = \frac{b_2'^2}{(k_1 - k_2)} + \frac{b_1'^2}{(k_2 - k_1)}.$$

Аналогічно, у другому варіанті представлення (a''_1, b''_1 та a''_2, b''_2) - коефіцієнти L та E можна записати через коефіцієнти M, N, F, G та головні кривини, у третьому варіанті - середні коефіцієнти квадратичних форм через вирази перших та других коефіцієнтів, та k_1, k_2.

Визначимо одиничні векторі головних напрямків – $\boldsymbol{e}_1$ та $\boldsymbol{e}_2$ у відповідності до (6), підставивши праву частину (13), (14) у чисельнику та вираз одного з коефіцієнтів першої квадратичної форми поверхні, отриманий згідно з попереднім. Зробивши перетворення, представимо результат у вигляді:

$$\boldsymbol{e_1} = n_1 \, \boldsymbol{r_u} + n_2 \, \boldsymbol{r_v}, \; \boldsymbol{e_2} = \bar{n}_1 \, \boldsymbol{r_u} + \bar{n}_2 \, \boldsymbol{r_v}, \tag{15}$$

де коефіцієнти n_1, n_2 та $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ матимуть вирази у відповідності до варіантів представлення (12):

- для першого варіанта

$$n'_1 = \frac{M - k_1 F}{(LF - ME)} \sqrt{\frac{L - k_2 E}{k_1 - k_2}}, n'_2 = \frac{L - k_1 E}{(ME - LF)} \sqrt{\frac{L - k_2 E}{k_1 - k_2}};$$

$$\overline{n}'_1 = \frac{M - k_2 F}{(LF - ME)} \sqrt{\frac{L - k_1 E}{k_2 - k_1}}, \overline{n}'_2 = \frac{L - k_2 E}{(ME - LF)} \sqrt{\frac{L - k_1 E}{k_2 - k_1}}.$$

- для другого варіанта

$$n''_1 = \frac{N - k_1 G}{(MG - NF)} \sqrt{\frac{N - k_2 G}{k_1 - k_2}}, n''_2 = \frac{M - k_1 F}{(NF - MG)} \sqrt{\frac{N - k_2 G}{k_1 - k_2}};$$

$$\overline{n}''_1 = \frac{N - k_2 F}{(MG - NF)} \sqrt{\frac{N - k_1 G}{k_2 - k_1}}, \overline{n}''_2 = \frac{M - k_2 F}{(NF - MG)} \sqrt{\frac{N - k_1 G}{k_2 - k_1}}.$$

- для третього варіанта

$$n'''_1 = \frac{1}{(LG - NE)} \left((N - k_1 G) \sqrt{\frac{L - k_2 E}{k_1 - k_2}} + (M - k_1 F) \sqrt{\frac{N - k_2 G}{k_1 - k_2}} \right),$$

$$n'''_2 = \frac{1}{(NE - LG)} \left((L - k_1 E) \sqrt{\frac{N - k_2 G}{k_1 - k_2}} + (M - k_1 F) \sqrt{\frac{L - k_2 E}{k_1 - k_2}} \right);$$

$$\overline{n}'''_1 = \frac{1}{(LG - NE)} \left((N - k_2 G) \sqrt{\frac{L - k_1 E}{k_2 - k_1}} + (M - k_2 F) \sqrt{\frac{N - k_1 G}{k_2 - k_1}} \right),$$

(16)

$$\overline{n}'''_2 = \frac{1}{(NE - LG)} \left((L - k_2 E) \sqrt{\frac{N - k_1 G}{k_2 - k_1}} + (M - k_2 F) \sqrt{\frac{L - k_1 E}{k_2 - k_1}} \right);$$

Порівнявши знаменники рівнянь (16) з коефіцієнтами (4) та беручи до уваги зауваження до цих коефіцієнтів, можна стверджувати, що в загальному випадку (коли дотичні до координатних ліній не визначають головні напрямки), маємо право обирати любий з трьох варіантів представлення. У випадку, коли один з головних напрямків в точці збігається з дотичною до координатної ліній $u = const$, можемо користуватися першим варіантом, та, навпаки, другим – коли дотична $v = const$ збігається з головним напрямком. Третій варіант можливо застосовувати в обох цих випадках. У випадку ж, коли обидва головні напрямки мають напрямки дотичних до координатних ліній, коефіцієнти рівнянь (15) набувають виразів:

$$n_1 = 0, n_2 = \frac{1}{\sqrt{G}}, \bar{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}, \bar{n}_2 = 0, \left(k_1 = \frac{N}{G}, k_2 = \frac{L}{E} \right).$$

Для напрямних косинусів головних напрямків будемо мати:

$$cos\,\alpha_1 = n_1 x_u + n_2 x_v, cos\,\alpha_2 = \bar{n}_1 x_u + \bar{n}_2 x_v;$$

$$cos\,\beta_1 = n_1 y_u + n_2 y_v, cos\,\beta_2 = \bar{n}_1 y_u + \bar{n}_2 y_v;$$

$$cos\,\gamma_1 = n_1 z_u + n_2 z_v, cos\,\gamma_2 = \bar{n}_1 z_u + \bar{n}_2 z_v,$$

де значення параметрів при обчисленні коефіцієнтів за формулами (16) відповідає точці M.

Отримавши вирази для напрямних косинусів осей тригранника Дарбу, призначимо осі $O'x'$, $O'y'$ та $O'z'$ рухомої прямокутної системи $O'x'y'z'$ у відповідності до напрямків $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ та $\boldsymbol{e}_3$ тригранника в точці M (x_0, y_0, z_0). Будемо мати звичайні формули перетворення координат:

$$x = x_0 + cos\,\alpha_1 x' + cos\,\alpha_2 y' + cos\,\alpha_2 z',$$

$$y = y_0 + cos\,\beta_1 x' + cos\,\beta_2 y' + cos\,\beta_2 z',$$

$$z = z_0 + cos\,\gamma_1 x' + cos\,\gamma_2 y' + cos\,\gamma_2 z'.$$

Формули зворотного перетворення:

$$x' = (x - x_0)\cos\alpha_1 + (y - y_0)\cos\beta_1 + (z - z_0)\cos\gamma_1,$$
$$y' = (x - x_0)\cos\alpha_2 + (y - y_0)\cos\beta_2 + (z - z_0)\cos\gamma_2, \quad (17)$$
$$z' = (x - x_0)\cos\alpha_3 + (y - y_0)\cos\beta_3 + (z - z_0)\cos\gamma_3.$$

Перед тим, як користуватися формулами перетворення необхідно зорієнтувати осі тригранника у відповідності до орієнтації простору правою чи лівою трійкою векторів ***i***, ***j***, ***k***. Наявність радикалів дозволяють визначити значення напрямних косинусів ортів тригранника лише з точністю до знаку, з іншого боку ці значення згідно з формулами аналітичної геометрії не є незалежними. Отже, можливо вчинити наступне: спочатку визначати будь-які два вектора трійки $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ та $\boldsymbol{e}_3$, а напрямні косинуси третього орту призначити, як координати векторного добутку отриманих векторів. Наприклад, за формулами (16) визначимо напрямні косинуси векторів $\boldsymbol{e}_1$ та $\boldsymbol{e}_2$, тоді для $\boldsymbol{e}_3$ будемо мати:

$$\cos\alpha_3 = \cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1\cos\beta_2,$$
$$\cos\beta_3 = \cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\cos\gamma_2,$$
$$\cos\gamma_3 = \cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\beta_1\cos\alpha_2.$$

Перехід від параметричних рівнянь поверхні (1) до рівнянь відносно системи супровідного тригранника здійснімо за рівняннями (17), підставивши замість старих координат x, y, z праву частину (1). При цьому звернемо увагу на чотири можливі випадки розташування поверхні відносно дотичної площини із визначеними на неї головними напрямками (варіанти симетрії).

Цим випадкам буде відповідати чотири варіанти розташування осей нової системи без зміни орієнтації простору. Перехід від одного до іншого випадку розташування поверхні здійснюється за рахунок одночасні зміни напрямків будь-якиї двох осей тригранника (рис.1).

Висновки. Отримані результати мають чисельну кількість застосувань в задачах прикладного кінематичного формоутворення поверхонь, розташування об’єктів відносно поверхні, геометричного моделювання рухів твердого тіла та контактних задач механіки.

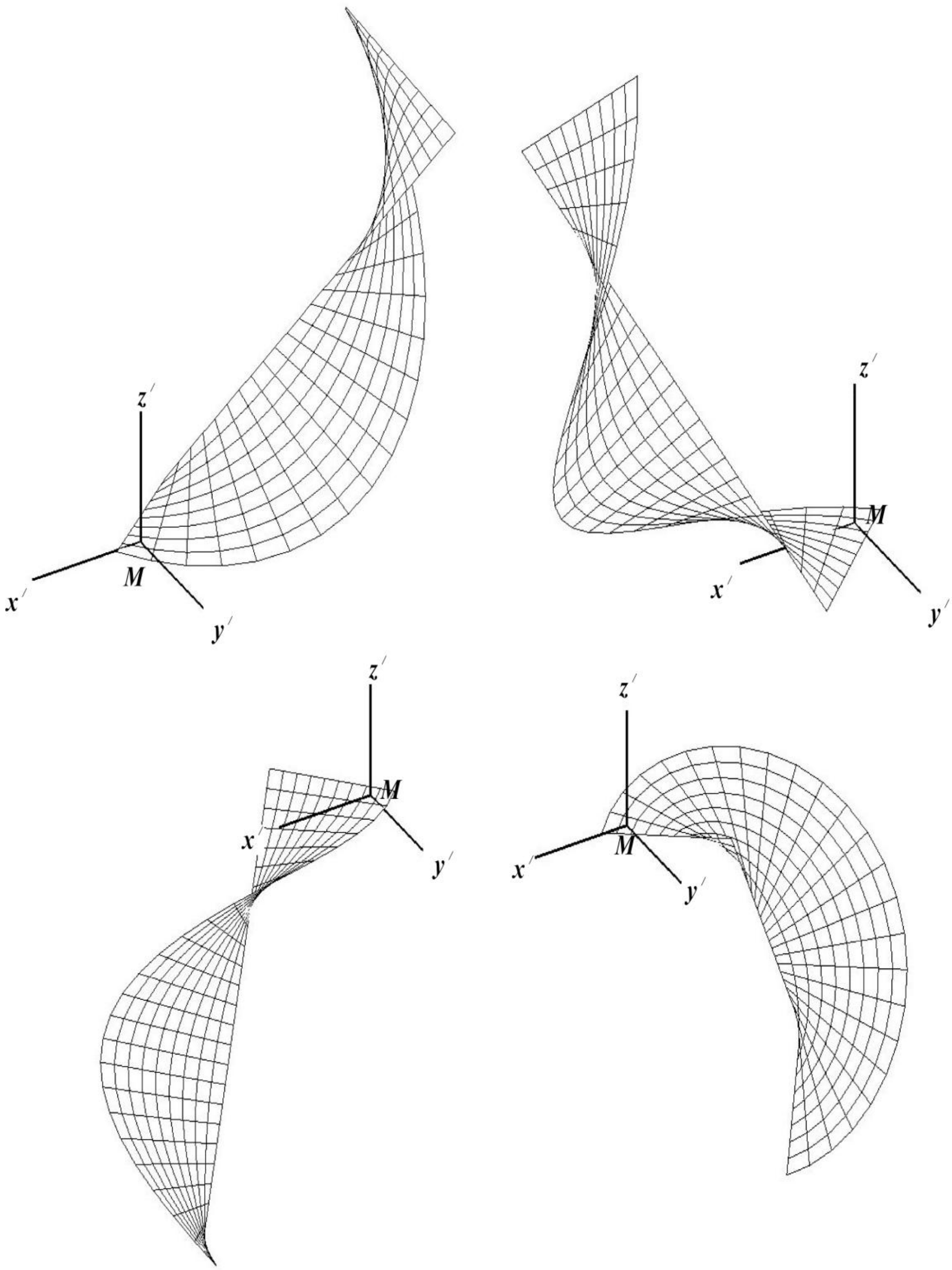

Рис. 1. Випадки розташування поверхні відносно системи її супровідного тригранника в точці

Література

1. *Лурье А. И.* Аналитическая механика /А.И.Лурье// – М.: Гос. изд-

во физ.-мат. лит-ры, 1961.- 824 с.
2. *Darboux G*. Leçons sur la théorie générale des surfaces /G. Darboux// Paris, Gautier – Villars, 1887 – I.– 514 p.
3. *Картан Э.* Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенная методом подвижного репера /Э.Картан// – М.: Изд-во Московского унив-та, 1963. – 368 с.
4. *Фиников С.П.* Проективно-дифференциальная геометрия /С.П.Фиников// М.- Л.: ОНТИ, 1937 – 264 с.
5. *Фиников С.П.* Теория конгруэнций /С.П.Фиников// М. – Л.: ГИТТЛ, 1950 – 530 с.
6. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии /С.П.Фиников// М. – Л.: ГИТТЛ, 1948 – 433 с.
7. *Бляшке В*. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Ейнштейна /В.Бляшке// М. - Л.: ОНТИ, 1935 – т.1. – 330 с.
8. *Радзевич С.П.* Формообразование поверхностей деталей. Основы теории / С.П.Радзевич// К.: Растан, 2001. – 592с.
9. *Stephen P*. Radzevich Geometry of surfaces: a practical guide for mechanical engineers /P.Stephen// 1st Edition, Wiley; 1 edition (March 4, 2013) – 264 p. (p.69)

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО СИСТЕМЫ ЕЕ ИНВАРИАНТНОГО ТРЕХГРАННИКА В ТОЧКЕ

Фролов О. В.

Аннотация

Рассматривается координатная система, построенная на основе сопровождающего трехгранника поверхности в заданной точке. Оси координат этой системы расположены по направлениям нормали к поверхности и направлениям главных кривизн в некоторой точке поверхности.

PARAMETRICAL EQUATIONS OF SURFACE CONCERNING A COORDINATE SYSTEM OF DARBOUX’S FRAME

O. Froloff

Summary

An assignment of the trihedron at the point of the surface causes the difficulties that lead to the introduction of assumptions or limitations. The requirement of the mutual orthogonality of the axes of the trihedral allows one of the axes to be recognized in the direction of the normal to the surface, and the other two are arranged in a tangent plane. The requirement of the invariance of the arrangement of the axes requires unambiguous determination of the directions of the main curvatures at the point. For this reason, at an umbilic point, the principal directions are undefined. Consequently, the basis of Darboux's frame, whose axes form a rectangular system and are determined by the unit vectors e_1, e_2 and e_3 in accordance with the directions of the two main curvatures and normal to the surface at the point, are considered in the paper.

A smooth regular surface could be specified uniquely by two independent variables. Therefore, we give a surface by expressing its rectangular coordinates x, y and z as functions of two Gaussian coordinates, u and v.

Determination of the main directions of the surface at the given point is carried out in two ways:

- directly from the expressions of the coefficients of the first and second fundamental forms of a surface;

- from the expressions of the main curvatures (or curvature radii) and the coefficients of fundamental forms.

The results of this paper have a number of applications: problems of applied kinematic forming of surfaces, the location of objects on the regular surface, geometric modeling of solid-state movements and contact problems of mechanics.