



УДК 514.18

## ЗАСТОСУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ МАТРИЦЬ ДЛЯ УТВОРЕННЯ ТОЧКОВИХ РІВНЯНЬ Б-ПОВЕРХОНЬ

**Адоньєв Є.О., к.т.н.,**

*Запорізький національний університет, Україна;*

*Тел.: (0619) 42-64-61*

**Верещага В.М., д.т.н.,**

**Найдиш А.В., д.т.н**

*Мелітопольський державний педагогічний університет*

*імені Богдана Хмельницького, Україна;*

*Тел.: (0619) 44-80-29*

*Анотація* – У точковому численні Балюби-Найдиша (БН-численні), для розв'язання задач інтерполяції, встановлюються внутрішні зв'язки між елементами геометричної фігури без розв'язання систем рівнянь. Якщо будь-яку геометричну фігуру, що визначена рівнянням у декартовій системі координат, представити методами точкового БН-числення рівнянням відносно локальної системи координат, отримаємо цілий ряд переваг. Зокрема, можливість управляти формою геометричної фігури через зміну положень вихідних точок, а функції-параметри, при цьому, лишаються сталими і визначають долю від одиниці участі кожної вихідної точки у визначенні будь-якої змінюваної точки. Така можливість є важливою для проведення комп'ютерних експериментів з моделлю з метою прийняття найкращого управлінського рішення щодо багатофакторних ситуацій або процесів.

Розглянуто різні геометричні фігури, для формування поверхонь Балюби (Б-поверхонь) з різною кількістю та різним розташування вихідних точок. Наведено методіку формування геоматриць для однакових та різних точкових рівнянь щодо ребер сегменту поверхні.

*Ключові слова* – геометрична інтерполяція, геоматриця, БН-числення, Б-криві, Б-поверхні.



*Постановка проблеми.* Побудова математичних моделей для ситуацій і процесів шляхом розв'язання систем рівнянь різного степеня, здебільшого, обмежує кількість залучених вихідних факторів, що є елементами процесу. Свідоме або несвідоме зменшення кількості вихідних факторів, у будь-якому випадку, знижує адекватність моделі процесу. Зменшення адекватності веде до підвищення похибки у прийнятті управлінських рішень.

Збільшення кількості факторів та можливість зміни, у процесі проведення комп'ютерних експериментів, кількості та якості цих вихідних факторів без зміни самої моделі є нагальною задачею у моделюванні багатofакторних процесів. Розв'язання цієї задачі потребує зміни методів побудови моделі, яка б не обмежувала, за кількістю та якістю, включених до неї вихідних факторів і не змінювалась сама зі зміною цих факторів. Окрім цього, модель, що буде будуватися за новими методами, не має бути чутливою до зміни розмірності факторів, що включені до неї. Під розмірністю фактору треба розуміти кількість параметрів-характеристик типомоделі фактору. У моделюванні часто виникає необхідність змінювати кількість показників, що характеризують типомодель, з метою визначення найкращого управлінського рішення.

Точкові інтерполяційні рівняння, які одержано за використанням точкового числення Балюби-Найдиша (БН-числення), названо кривими Балюби (Б-кривими), поверхнями Балюби (Б-поверхнями), або узагальнююча назва – фігурами Балюби (Б-фігурами).

Процес інтерполяції на базі геометро-математичного апарату точкового БН-числення, названо геометричною інтерполяцією, або геометричною кореляцією.

*Аналіз останніх досліджень і публікацій.* У роботах [1, 2] пропонується застосовувати метод головних компонент, факторний аналіз, тощо для підвищення адекватності моделі при обмеженій кількості вихідних факторів.

Поява у прикладній геометрії точкового БН-числення [3] надала можливість для створення нового методу моделювання багатofакторних ситуацій та процесів. Головною відмінністю точкового БН-числення у здійсненні інтерполяції є те, що точкова форма інтерполянта, у вигляді точкового рівняння, знаходиться на підставі встановлення сполучень між елементами або властивостями вихідної геометричної фігури. У той же час, у традиційних методах інтерполяції, для одержання рівняння інтерполянта, проводять розрахунки параметрів цього рівняння через розв'язання відповідних систем рівнянь.

*Формування цілей та завдання статті.* Запропонувати спосіб геометричної інтерполяції, що не обмежує, у межах раціонального, кількість вихідних факторів, кількість параметрів, які характеризують фактори та допускає можливість варіювати означеними кількостями.

*Основна частина.* Про інтерполяцію, у традиційному сенсі, достатньо повно викладено у роботі [4]. У роботі [5] розроблено методи дискретної інтерполяції дискретно поданих кривих і поверхонь.

Розглянемо три точкові рівняння:

$$M = A\bar{t}(1 - 2t) + C \cdot 4\bar{t}t + Bt(2t - 1), \quad (1)$$

$$M = A\bar{t}(1 - 3t) + C \cdot 4,5\bar{t}(1 - t) + B \cdot 0,5t(3t - 1), \quad (2)$$

$$M = A \cdot 0,5(1 - t)(2 - 3t) + C \cdot 4,5\bar{t}(1 - t) + Bt(3t - 2), \quad (3)$$

кожне з яких одержано за допомогою геометричних побудов, показаних на рис.1 за однієї відмінності щодо параметру  $t_C$  розташування точки  $C$ .

Для (1)  $t_C = \frac{1}{2}$ , для (2)  $t_C = \frac{1}{3}$ , для (3)  $t_C = \frac{2}{3}$ . Точкові рівняння (1), (2), (3) забезпечують проходження через наперед визначені точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , тобто, здійснюють геометричну інтерполяцію.

Виконаємо перевірку геометричної інтерполяції для першого рівняння за умови, що у точці  $A \rightarrow t = 0$ , у точці  $B \rightarrow t = 1$ , у точці  $C \rightarrow t = \frac{1}{2}$ .

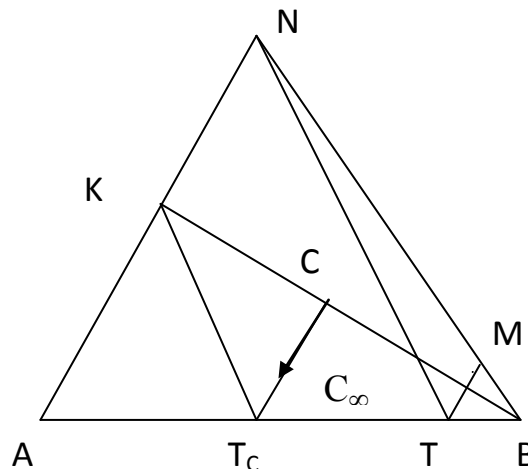


Рис.1. Схема одержання точкових рівнянь (1), (2), (3)



Для  $t=0$  (1) матиме вигляд:

$$M = A \cdot 1(1 - 2 \cdot 0) + C \cdot 4 \cdot 0 \cdot 1 + B \cdot 0 \cdot (2 \cdot 0 - 1), \rightarrow M = A.$$

$$\text{Для } t = \frac{1}{2}; M = A \cdot \frac{1}{2}(1 - 2 \cdot \frac{1}{2}) + C \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + B \cdot \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \frac{1}{2} - 1), \rightarrow M = C.$$

$$\text{Для } t=1; M = A \cdot 0(1 - 2 \cdot 1) + C \cdot 4 \cdot 1 \cdot 0 + B \cdot 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1), \rightarrow M = B.$$

Аналогічним чином, точкове рівняння (2) забезпечує геометричну інтерполяцію, тобто проходження через точки  $A, C, B$  для значень параметрів, відповідно,  $t=0, t=\frac{1}{3}, t=1$ . У результаті матимемо  $M=A; M=C; M=B$ .

Точкове рівняння (3) для  $t=0, t=\frac{2}{3}, t=1$  також інтерполуює, відповідно, точки  $A, B, C$ .

Застосуємо точкові рівняння (1), (2), (3) для двомірної геометричної інтерполяції сегменту поверхні (рис.2).

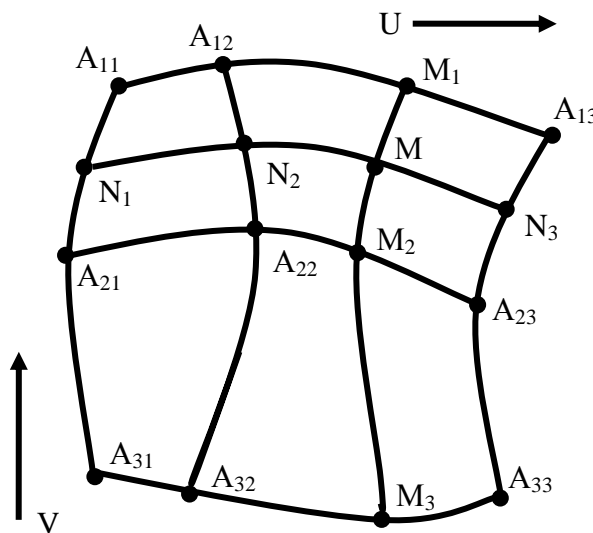


Рис. 2. Схема розташування вузлів для двомірної геометричної інтерполяції сегменту

У відповідності до схеми, запишемо рівняння (1), (2), (3) для напрямку  $u$ :



$$M_1 = A_{11} \bar{u}(1-3u) + A_{12} \cdot 4,5u(1-u) + A_{13} \cdot 0,5u(3u-1);$$

$$M_2 = A_{21} \bar{u}(1-2u) + A_{22} \cdot 4u \cdot \bar{u} + A_{23} \cdot u(2u-1); \quad (4)$$

$$M_3 = A_{31} \cdot 0,5\bar{u}(2-3u) + A_{32} \cdot 4,5u(1-u) + A_{33} \cdot u(3u-2),$$

де  $\bar{u} = (1-u)$ ;  $0 \leq u \leq 1$ .

Для напрямку  $v$ :

$$N_1 = A_{11} \bar{v}(1-3v) + A_{21} \cdot 4,5v(1-v) + A_{31} \cdot 0,5v(3v-1);$$

$$N_2 = A_{12} \bar{v}(1-2v) + A_{22} \cdot 4v \cdot \bar{v} + A_{32} \cdot v(2v-1); \quad (5)$$

$$N_3 = A_{13} \cdot 0,5\bar{v}(2-3v) + A_{23} \cdot 4,5v(1-v) + A_{33} \cdot v(3v-2),$$

де  $\bar{v} = (1-v)$ ;  $0 \leq v \leq 1$ .

У відповідності до методу рухомого симплексу [6], об'єднавши рівняння (4) та (5), дістанемо точкове рівняння поверхні:

$$M = A_{11} \bar{u}(1-3u) \cdot \bar{v}(1-3v) + A_{12} \cdot 4,5u(1-u) \cdot \bar{v}(1-2v) +$$

$$+ A_{13} \cdot 0,5u(3u-1) \cdot 0,5\bar{v}(2-3v) + A_{21} \bar{u}(1-2u) \cdot 4,5v(1-v) +$$

$$+ A_{22} \cdot 4u \cdot \bar{u} \cdot 4v \cdot \bar{v} + A_{23} \cdot u(2u-1) \cdot 4,5v(1-v) + \quad (6)$$

$$+ A_{31} \cdot 0,5\bar{u}(2-3u) \cdot 0,5v(3v-1) + A_{32} \cdot 4,5u(1-u) \cdot v(2v-1) +$$

$$+ A_{33} \cdot u(3u-2) \cdot v(3v-2).$$

Покажемо алгоритм складання точкового рівняння (6) із застосуванням геоматриць. Складемо геоматрицю параметрів  $U_{II}$  для точкових рівнянь (4) та для параметрів  $V_{II}$  у напрямку  $V$  для точкових рівнянь (5):

$$U_{II} = \left( \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \right); \quad V_{II} = \left( \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} \right). \quad (7)$$

Знайдемо геоматрицю параметрів  $A_{II}$ , помноживши геоматриці параметрів  $U_{II}$  та  $V_{II}$ :



$$\begin{aligned}
 A_{II} &= U_{II} \cdot V_{II} = \left( \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \right) \cdot \left( \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} \right) = \\
 &= \left( \begin{pmatrix} u_{11}v_{11} & u_{12}v_{12} & u_{13}v_{13} \\ u_{21}v_{21} & u_{22}v_{22} & u_{23}v_{23} \\ u_{31}v_{31} & u_{32}v_{32} & u_{33}v_{33} \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right), \quad (8)
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= u_{11}v_{11} = \bar{u}(1-3u) \cdot \bar{v}(1-3v), & a_{12} &= u_{12}v_{12} = 4,5u(1-u) \cdot \bar{v}(1-2v), \\
 a_{13} &= u_{13}v_{13} = 0,5u(3u-1) \cdot 0,5\bar{v}(2-3v), & a_{21} &= u_{21}v_{21} = \bar{u}(1-2u) \cdot 4,5v(1-v) \quad (9) \\
 a_{22} &= u_{22}v_{22} = 4u \cdot \bar{u} \cdot 4v \cdot \bar{v}, & a_{23} &= u_{23}v_{23} = u(2u-1) \cdot 4,5v(1-v), \\
 a_{31} &= u_{31}v_{31} = 0,5\bar{u}(2-3u) \cdot 0,5v(3v-1), & a_{32} &= u_{32}v_{32} = 4,5u(1-u) \cdot v(2v-1), \\
 a_{33} &= u_{33}v_{33} = \bar{u}(3u-2) \cdot v(3v-2)
 \end{aligned}$$

Параметри  $u_{ij}$  та  $v_{ij}$  з (7) для  $i = \overline{1, m}$ ;  $j = \overline{1, n}$  є характеристичними функціями геометричної інтерполяції тому, що для одного із значень параметру у межах  $0 \leq u : v \leq 1$  вони приймають одиницю, а для усіх інших значень параметрів  $u$  і  $v$  – дорівнюють нулю. Ці параметри  $u_{ij}$  та  $v_{ij}$  у дослідженнях названо Б-функціями.

Функції-параметри  $a_{ij}$  з (9) визначають долю від одиниці, з якою вихідна точка  $A_{ij}$  приймає участь у визначенні змінюваної точки  $M_{ij}$  на Б-поверхні з точкового рівняння (6).

#### Висновки.

Створений алгоритм формування точкових рівнянь для Б-поверхонь спрощує побудову інтерполяційних поверхонь, робить його безпомилковим. Застосування геоматриць у алгоритмі одержання рівняння Б-поверхні надає можливість для узагальнень щодо їхнього використання.

#### Література:

1. Харман Г. Современный факторный анализ. – М.: Статистика, 1972. – 489 с.
2. Овсянников Г.Н. Факторный анализ в доступном изложении: изучение многопараметрических систем и процессов. – М.: Книжный дом «Либроком», 2013, – 176 с.



3. *Балюба И. Г.* Точечное исчисление [учебное пособие] // И. Г. Балюба, В. М. Найдыш; под ред. Верещаги В. М. – Мелитополь: Изд-во МГПУ им. Б. Хмельницкого, 2015. – 234 с.
4. *Гончаров В.Л.* Теория интерполирования и приближения функций, 2-ое изд. перераб. — М.: Гос. изд. технико-теорет. лит., 1954. — 327 с.
5. *Найдиш В.М.* Дискретна інтерполяція. – Мелітополь: ВДП «Люкс», 2007. – 250 с.
6. *Давиденко І.П.* Конструювання поверхонь просторових форм методом рухомого симплексу: автореф. ... канд. техн. наук 05.01.01 / Іван Петрович Давиденко: Таврійський держ. агротехнол. ун-т. – Мелітополь, 2012. – 23 с.
7. *Адоньев С.О.* Розробка узагальненої техніки алгебраїчного формування Б-функцій для чотирьох точок / С.О. Адоньев, В.М. Верещага, К.Ю. Лисенко // Вісник НТУ «ХП». Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси. – Харків: НТУ «ХП», 2017 – №16(1238). – С. 17-23.

## ПРИМЕНЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ УРАВНЕНИЙ Б-ПОВЕРХНОСТЕЙ

Е.А. Адоньев, В.М. Верещага, А.В. Найдыш

### *Аннотация*

**В точечном БН-исчислении, для решения задач интерполяции, определяются внутренние связи между элементами геометрической фигуры без решения систем уравнений. Если любую геометрическую фигуру, определенную уравнением в декартовой системе координат, представить методами точечного БН-исчисления уравнением относительно локальной системы координат, получим целый ряд преимуществ. В частности, возможность управлять формой геометрической фигуры через изменение положений исходных точек, а функции-параметры, при этом, остаются неизменными и определяют долю от единицы участия каждой исходной точки в определении любой изменяемой точки. Такая возможность важна для проведения компьютерных экспериментов с моделью с целью принятия**



наилучшего управленческого решения относительно многофакторных ситуаций и процессов.

Рассмотрены различные геометрические фигуры, для формирования Б-поверхностей с разным количеством и разным размещением исходных точек. Приведена методика формирования геоматриц для одинаковых и разных точечных уравнений относительно ребер сегмента поверхности.

Ключевые слова – геометрическая интерполяция, геоматрица, БН-исчисление, Б-кривые, Б-поверхности.

## APPLICATION OF GEOMETRIC MATTRESSES FOR DETERMINATION OF POINTING EQUATIONS OF B- SURFACES

### *Summary*

Y. Adoniev, V. Vereshchaga, A. Naidysh

**In a point BN-calculation, for solving interpolation problems, internal connections between elements of a geometric figure are established without solving equations. If any geometric figure defined by the equation in the Cartesian coordinate system is represented by the methods of the point BN-calculation by an equation relative to the local coordinate system, we obtain a number of advantages. In particular, the ability to control the shape of a geometric figure by changing the positions of the source points, and function-parameters, while, remain stable and determine the fate of the unit of participation of each starting point in determining any changeable point. Such an opportunity is important for carrying out computer simulations with the model in order to make the best management decision for multifactorial situations or processes.**

**Different geometric shapes are considered, for the formation of B-surfaces with different numbers and different location of the source points. The method of forming a geometric for the same and different point equations with respect to the edges of the segment of a surface is given.**