

9. Машбиц Е.И. Психолого-педагогические проблемы компьютеризации обучения./ Машбиц Е.И. - М.: Педагогика. – 1988. – 191 с.

10. Національна доктрина розвитку освіти України у ХХІ ст. // Освіта. – 2001. – №60–61. – с. 4.

11. Петриця А. Н. Фізика. Методичні рекомендації з проведення лабораторних робіт у 7 і 8 класі / Петриця А. Н. / За редакцією професора С. П. Величка. – Кіровоград: ПП „Центр оперативної поліграфії „Авангард”, 2009. – 76 с.

12. Сосницька Н. Л. Сучасні шляхи підвищення ефективності викладання оптики/ Сосницька Н. Л. // Фізика та астрономія в школі. – 1998. - № 2. – С. 30 – 32.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРА

Кузьменко Ольга Степанівна – аспірантка кафедри фізики та методи її викладання КДПУ ім. В. Винниченка.

Наукові інтереси: проблеми дидактики фізики.

ІНТЕГРАТИВНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІЗНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ НА ОСНОВІ ВИЗНАЧЕНОГО СПОСОБУ

Василь КУШНІР, Ренат РІЖНЯК

В статті досліджуються проблеми використання обраного способу для розв'язування різних математичних задач з метою організації інтегративної навчальної діяльності учнів.

The article investigates the problems of using the selected method for solving various mathematical problems in order of integrative learning activities of students.

Постановка проблеми. Вивчення будь-якої навчальної діяльності завжди передбачає формування знань, умінь та навичок відповідного профілю або відповідної галузі. Процес об'єднання (інтеграції) розрізнених математичних знань та умінь відіграє важливу роль в організації навчальної діяльності учнів і вказує на такі способи регулювання навчальною діяльністю у процесі розв'язування математичних задач інтегративного змісту: набуття знань про задачу і формування зв'язків між компонентами цих знань; визначення та дослідження особливостей перетворення задачі; формування правил добору та послідовності застосування необхідних перетворень для розв'язання задачі; оцінка можливості використання відомого способу до розв'язування задачі.

Спочатку такі способи регулювання навчальною діяльністю є предметом засвоєння, а вже після формування умінь їх застосування суб'єктами навчальної діяльності перетворюються у способи регулювання саме навчальною діяльністю інтегративного характеру.

Аналіз раніше виконаних досліджень. Інтегративний підхід у навчанні дає можливість розглядати зміст навчання окремої дисципліни саме у процесі взаємодії з іншими навчальними дисциплінами, співставляти закономірності та закони навчальної дисципліни, яка вивчається, із закономірностями та законами природи. У [1] та [2] ми вже відзначали, що інтегративна лінія у шкільному курсі математики поступово знаходить більш детальну реалізацію у використанні навчальних математичних задач інтегративного змісту (описове означення поняття задачі інтегративного змісту було надане у цих роботах). Розв'язування таких задач потребує глибоких знань та винахідливості; тут не лише використовуються знання учнів з певної теми, а й виникає необхідність

проведення систематизації та узагальнення здобутих знань з різних розділів шкільного курсу математики в аспекті актуалізації її основних змістовних ліній [1], [3], що в свою чергу вимагає сформованості у суб'єкта навчання певного рівня математичної та інформаційної культури [2], [3].

Мета статті. Автори мають намір детально розглянути процес роботи над задачею у контексті оцінки можливості її розв'язування стандартним, наперед заданим (або знайденим) способом, цитуючи Д.Пойа – «погляд назад» [4]. Раніше ми досліджували використання способів організації етапів розв'язування задач (див. [1], [2], [5]). У даній роботі зупинимося на застосуванні у процесі розв'язування різних математичних задач одного і того ж способу (раніше виведеного факту) і, як наслідок, дослідимо методичну доцільність використання такого прийому у контексті формування в учнів інтегративних знань і умінь в оперуванні математичним матеріалом.

Виклад основного матеріалу. Під інтегрованим образом способу розв'язування групи математичних задач будемо розуміти цілісну структуру знань, умінь та навичок, якою необхідно володіти учневі (суб'єкту навчання) для оцінки можливості розв'язування наперед заданої групи математичних задач обраним способом (або з використанням відомої ідеї, чи заздалегідь вивченого факту). Зазначимо, що як не можна говорити про повний перелік задач, що можуть бути розв'язані обраним способом, так і немає сенсу говорити про найбільший (найповніший) обсяг інтегрованого образу способу розв'язування. Обсяг інтегрованого образу способу розв'язування групи математичних задач будемо визначати у відповідності до поставлених цілей навчальної

діяльності. Визначимо зміст інтегративної навчальної діяльності учнів при розв'язуванні математичних задач наперед обраним способом так:

- формування *інтегрованого образу способу розв'язування*, що представляє собою цілісну структуру знань, умінь та навичок, наявність яких у суб'єкта є умовою володіння обраним способом розв'язування;

- *аналіз* ознак та характеристик компонентів змісту інтегрованого образу способу розв'язування групи задач, їх *порівняння*;

- *абстрагування* від несуттєвих характеристик компонентів інтегрованого образу способу розв'язування групи задач;

- мисленне об'єднання компонентів інтегрованого образу способу розв'язування групи задач за їх істотними ознаками – *узагальнення*;

- розподіл компонентів інтегрованого образу способу розв'язування групи задач на взаємопов'язані класи за найбільш істотними ознаками за їхньою подібністю – *класифікація*;

- розділення та подальше об'єднання не окремих компонентів інтегрованого образу способу розв'язування групи задач, а їх класів (наприклад, у вигляді ієрархії) – *систематизація*;

- утворення нового знання про розв'язану групу задач – *синтез* нових знань.

Отже, основна **мета нашого дослідження** буде полягати у тому, щоб *визначити методичні умови, при яких використання для розв'язування групи математичних задач наперед обраного способу розв'язання буде набувати методичної доцільності з метою формування в учнів знань і умінь інтегративної діяльності при продуктивному оперуванні математичним матеріалом.*

Розглянемо проблему розв'язування математичних задач дослідження на прикладі використання знань про основну тригонометричну тотожність $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ та різних дробово-раціональних співвідношень, що можуть бути зведені через проведення заміни до названої тотожності (наприклад:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1 \text{ або } \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$$

та інші подібні).

Задача 1. Визначити найбільше та найменше значення виразу:

$$a \cdot \sin \alpha + b \cdot \cos \alpha,$$

де a та b – деякі дійсні числа, не рівні нулю одночасно.

Для розв'язування задачі слід помножити та поділити даний у задачі вираз на $\sqrt{a^2+b^2}$. Тоді отримаємо:

$$a \cdot \sin \alpha + b \cdot \cos \alpha = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \sin \alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \cos \alpha \right).$$

Оскільки

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1, \text{ то можна}$$

провести заміну $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ на $\cos \varphi$, а

вираз $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ замінити на $\sin \varphi$ (адже

виконується тотожність $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$). Скориставшись

формулою синуса суми двох кутів, даний у задачі вираз можна представити так:

$$a \cdot \sin \alpha + b \cdot \cos \alpha = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(\alpha + \varphi).$$

Очевидно, що за умови $-1 \leq \sin(\alpha + \varphi) \leq 1$ найбільшим

значенням виразу буде $\sqrt{a^2+b^2}$, а найменшим $-\sqrt{a^2+b^2}$.

Задача 2. Визначити властивості та побудувати графік функції:

$$y(x) = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x.$$

Спосіб розв'язування даної вправи аналогічний до розв'язаної раніше – зводимо задану функцію до вигляду:

$$y(x) = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(x + \varphi), \quad \text{де}$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Очевидно, що графік отриманої функції відрізняється від графіка функції $y(x) = \sin x$ паралельним перенесенням на вектор $(-\varphi; 0)$ та більшою в $\sqrt{a^2+b^2}$ рази амплітудою.

Очевидними тепер є і властивості отриманої функції.

Задача 3. Розв'язати рівняння: $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$ де a, b та c – деякі дійсні числа, не рівні нулю одночасно.

Для розв'язування використовуємо той же спосіб – ділимо обидві частини рівняння на $\sqrt{a^2+b^2}$. Отримаємо:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

а ввівши додатковий кут φ такий,

$$\text{що } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{і}$$

згорнувши ліву частину рівняння до синуса суми двох кутів, маємо:

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Отримане рівняння є елементарним і має загальні розв'язки

$$x = (-1)^k \cdot \arcsin\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) - \varphi + \pi k, \quad k \in Z$$

при умові, що $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$.

Таким же способом розв'язуються і подібні нерівності.

Очевидно, що вказані задачі можуть породжувати низку задач (чи окремі їхні серії) на застосування описаного способу їх розв'язування. Зазначимо, що тут ми маємо справу ще з однією методичною проблемою, а саме методичною доцільністю використання складання та розв'язування різних задач, породжених задачною темою у формуванні в учнів інтегративних знань і умінь при оперуванні математичним матеріалом.

З метою визначення змісту інтегративної навчальної діяльності учнів у процесі розв'язування зазначених математичних задач наперед заданим способом здійснимо структурний аналіз компонентів інтегрованого образу способу розв'язування та аналіз необхідних знань та умінь (а також їх взаємозв'язків), які слід актуалізувати та відтворити при виконанні зазначених

завдань. Результати такого аналізу показані на рис.1 у вигляді ієрархії компонентів інтегрованого образу способу розв'язування кожної задачі, яка сама по собі у практичному використанні є досить корисною; особливо це стосується підготовки на базі таких структурних аналізів уроків узагальнення та систематизації знань та умінь учнів або розробки з використанням подібних деталізованих схем системи завдань навчального чи контрольного характеру. Дійсно, подана схема ілюструє детальний аналіз компонентів інтегрованого образу способу розв'язування задач у розрізі: *основні поняття*, засвоєння або знання яких необхідне для розв'язування задачі обраним методом або способом; *основні математичні дії та уміння*, виконання яких має бути сформоване в учнів для вільного оперування математичним апаратом у процесі розв'язування; *узагальнені дії*, що мають бути сформовані для оволодіння обраним для розв'язування способом.

Понятійний апарат та уміння, якими повинен опанувати учень, щоб навчитися розв'язувати задачі типів 1-3 з використанням операції введення додаткового кута		
основні поняття	основні дії, уміння, виконання яких має бути сформоване в учнів	дії для оволодіння компонентами методу
синус та косинус кута	ділення двочлена на одночлен	розбиття основної задачі на підзадачі
вираз	доведення тотожностей	синтез розв'язання задачі на основі розв'яз. підзадач
функція	визначення найбільшого та найменшого значення виразу	проведення аналогії між рац. та тригоном. тотожностями
загальна схема дослідження функції	використання тригонометричних формул	зведення розв'язання задачі до введення додаткового кута
найбільше (найменше) значення	використання загальної схеми для дослідження функції	синтез нових задач
рівняння	побудова графіків функцій методом перетворень	узагальнення умови та розв'язання задачі
нерівність	преведення еквівалентних перетв. рівнянь та нерівностей	узагальнення способу розв'язання задачі
елемент. тригонометр. рівняння	розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь	
тотожність	визначення умов існування розв'язків тригоном. рівняння	
основна тригон. тотожність	розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей	
	визначення умов існування розв'язків тригоном. нерівності	

Рис. 1. Схема основних компонентів інтегрованого образу при виборі способу розв'язання задач.

Проведемо узагальнення схеми (рис.1), об'єднавши в одній моделі всі можливі компоненти побудованого інтегрованого образу способу розв'язування задач. Отримаємо перелік складних математичних умінь (очевидно, що структура кожного з цих умінь розкривається), які в свою чергу класифікуємо на взаємопов'язані класи за належністю до різних змістовних ліній шкільного курсу математики. На

рис. 2 якраз і зображений продукт систематизації – об'єднання класів компонентів інтегрованого образу способу розв'язування задач. Зв'язки між класами та компонентами інтегрованого образу і становлять продукт операції синтезу нових знань учнів, що набуваються у процесі використання наперед заданого способу розв'язування для різних математичних задач.

Використання введення додаткового кута при розв'язуванні задач 1-3				
Змістова функціональна лінія	Використання загальної схеми дослідження функції	Побудова графіків ф-й методом перетворень	Визначення властивостей функцій	
Змістова лінія геометричних перетворень	Використання геом. перетв. при побудові граф. функцій			
Змістова лінія розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем	Еквівалентні перетворення рівнянь та нерівн.	Розв'язування найпростіших тригоном. рівнянь	Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей	
Змістова лінія вивчення тотожних перетворень	Тотожні перетворення дробово-раціональних виразів	Тотожні перетворення тригонометричних виразів	Доведення тотожностей	
Загальноматематичні уміння	Побудова математичних моделей задач	Розбиття задачі на підзадачі та синтез розв'язання задачі на основі розв'язання підзадач	Використання введення додаткового кута	Використання аналогії між рац. та тригонометр. тотожностями

Рис. 2. Класифікація складних математичних умінь за належністю до різних змістовних ліній ШКМ.

Зазначимо, що вказані дві задачі не вичерпують можливих варіантів застосування описаного способу розв'язування. Мета написання даної статті потребує деталізації та розкриття методичних умов, при яких використання наперед обраного математичного факту при розв'язуванні різних математичних задач буде набувати методичної доцільності у контексті формування в учнів знань та умінь інтегративної діяльності при

продуктивному оперуванні математичним матеріалом.

Висновки.

1. Формування інтегрованого образу способу розв'язування задачі з уведенням додаткового кута передбачає детальний аналіз та порівняння ознак і характеристик окремих його компонентів.

2. Вибір множини задач, що розв'язуються наперед заданим способом здійснюється з урахуванням

загальної мети організації навчальної діяльності учнів і залежить лише від планування вчителем можливої широти навчальної діяльності учнів [6]. Тому, модель (схема, характеристики чи кінцевий результат) формування інтегрованого способу розв'язування математичних задач залежать, по-перше, від мети, поставленої вчителем. З іншого боку вибір вже готового способу розв'язування задачі як результат евристичної діяльності не може бути об'єктивно визначений як нераціональний – наперед обраний спосіб розв'язування певної задачі для формування умінь використання саме обраного вчителем способу на практиці однозначно є раціональним.

3. При формуванні інтегрованого образу обраного способу розв'язання серії задач вчитель організовує процес мисленого об'єднання компонентів цього образу за їхніми істотними ознаками; тому у процесі реалізації такого способу продуктивним для використання є метод узагальнення знань та умінь учнів.

4. У процесі планування та підготовки формування інтегрованого образу обраного способу розв'язання серії задач здійснюється розподіл компонентів інтегрованого образу на взаємопов'язані класи за найбільш істотними ознаками їх подібності; у процесі безпосереднього формування інтегрованого образу такого способу розв'язання задач відбувається систематизація – об'єднання компонентів інтегрованого образу у єдину цілісність з подальшим синтезом нових знань. Процес інтеграції знань,

умінь та навичок, що актуалізується для використання обраного способу розв'язування серії задач, зображений на рис. 1 та 2.

Отже, проведене дослідження дає підстави підтвердити доцільність використання обраного способу розв'язання серії задач з метою формування стійких умінь оперування математичним матеріалом.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Кушнір В., Ріжняк Р. Формування в учнів складних умінь використовувати моделювання у процесі розв'язування математичних задач інтегративного змісту // Математика в школі. – 2009. – № 5. – с. 13-17.
2. Кушнір В., Ріжняк Р. Розв'язування математичних задач інтегративного змісту засобами комп'ютерного моделювання // Математика в школі. – 2009. – № 10. – с. 34-39.
3. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.
4. Пойа Д. Как решать задачу. – Москва: Учпедгиз, 1959.
5. Кушнір В., Кушнір Г., Ріжняк Р. Системне моделювання процесу розв'язування текстових математичних задач: кібернетичний підхід // Постметодика. – 2009. – № 4 (88). – с. 22-27.
6. Кушнір В. Системний аналіз педагогічного процесу: методологічний аспект. – Кіровоград: КДПУ, 2001. – 340с.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Кушнір Василь Андрійович – доктор педагогічних наук, професор кафедри математики Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Ріжняк Ренат Ярославович – кандидат педагогічних наук, професор кафедри математики Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка, декан фізико-математичного факультету.

Наукові інтереси: методика навчання математики.