

сочетании с развитием интереса и мотивационных аспектов в учебном процессе, а также способствует активизации познавательной деятельности школьников.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Желонкина Тамара Петровна – старший преподаватель кафедры общей физики, УО «Гомельский госуниверситет им. Ф. Скорины».

Лукашевич Светлана Анатольевна – старший преподаватель кафедры теоретической физики, УО «Гомельский госуниверситет им. Ф. Скорины».

Никитюк Юрий Валерьевич – к.ф.-м.н., доцент, проректор по воспитательной работе, УО «Гомельский госуниверситет им. Ф. Скорины».

Круг научных интересов: современные технологии обучения в ВУЗе и средней школе.

**МЕТОДИЧНИЙ АНАЛІЗ КІНЕМАТИКИ ПРОЦЕСІВ
РОЗПАДУ ЧАСТИНОК ЗА ДОПОМОГОЮ ДІАГРАМИ
ДАЛІТЦА**

**Іван МОРОЗ, Володимир ІВАНІЙ, Роман ХОЛОДОВ,
Тетяна ГЕРАСИМОВА**

Обґрунтовано методику викладання в курсі спеціальної теорії відносності питань кінематики процесів розпаду частинок за допомогою діаграми Далітца. Запропонована методика розгляду процесу розпаду частинок із застосуванням законів збереження енергії та імпульсу сприяє фундаменталізації фізичної освіти та розширює можливості формування наукового світогляду майбутніх учителів фізики.

The technique of teaching in the course of special relativity on particle kinematics decay processes using diagrams Dalittsa. The method consider the decay particles using the laws of conservation of energy and momentum fundamentalization promotes physical education and enhances the formation of a scientific outlook of future physics teachers.

Постановка проблеми. Розвиток сучасної науки, впровадження її досягнень у виробництво та побут, прагнення вищої освіти України та інших країн колишнього Радянського Союзу до підготовки фахівців, здатних працювати за європейськими стандартами, потребує значного посилення фундаментальної компоненти у навчальному процесі всіх ВНЗ. Тому сучасні навчальні посібники та все науково-методичне забезпечення навчального процесу повинні ґрунтуватися на загальних теоріях, які є фундаментом усієї теоретичної підготовки. Таким фундаментом при підготовці фахівців фізико-математичного профілю, і особливо - вчителів фізики, є спеціальна теорія відносності (СТВ) з використанням сучасної коваріантної математичної мови [1,2].

Як показує аналіз літературних джерел, навчальних програм та навчальних посібників [2-5], студентам педагогічних навчальних закладів спеціальна теорія відносності викладається лише як теорія, яка уточнює і розширює межі застосування законів механіки на випадок руху тіл з великими швидкостями. Це значно звужує можливості загальноосвітнього і світоглядного впливу теорії відносності на студентську молодь і тому методичні розробки, що стосуються як власне курсів СТВ, так і використання методів СТВ у різних розділах фізики, видаються актуальними.

Мета статті – обґрунтувати методику викладання в курсі спеціальної теорії відносності питань кінематики процесів розпаду частинок за допомогою діаграми Далітца, спрямовану на розширення наукового світогляду майбутніх учителів фізики.

Виклад основного матеріалу. Зазвичай в існуючій навчально-методичній літературі застосування релятивістської динаміки і законів збереження

демонструється на прикладі розгляду системи 2-х частинок (злиття та розпад). Але аналіз, наприклад, розпаду частинки на три частини набагато складніший, ніж аналіз розпаду на дві частини. Нами, для знаходження кінематичних характеристик трьохчастинного розпаду, пропонується використовувати відому діаграму Далітца [2]. Її побудова та інтерпретація базуються на основних законах збереження. Побудуємо діаграму Далітца та розглянемо кілька випадків, які можливі при розпаді частинки, визначивши при цьому основні параметри розпаду. Розглянемо розпад частинки, що перебуває в стані спокою, з масою m за схемою: $a = a_1 + a_2 + a_3$ на частинки з масами m_1, m_2, m_3 та кінетичними енергіями T_1, T_2, T_3 відповідно. Для цього розглянемо площину (x, y) і введемо змінні

$$x = \frac{(T_2 - T_3)}{\sqrt{3}}, \quad y = T_1 \tag{1}$$

Згідно із законом збереження енергії, при розпаді (дефект мас) можна записати:

$$Q = (m - m_1 - m_2 - m_3)c^2 = T_1 + T_2 + T_3. \tag{2}$$

Розглянемо три крайні випадки, які задають три прямі на діаграмі:

- а) $T_1 = 0$ Ця умова задає пряму $y = 0$, що є віссю абсцис;
- б) $T_2 = 0$. Із співвідношень (1), (2) випливає $T_3 = Q - T_1, T_3 = -\sqrt{3}x, T_1 = y$, що дає рівняння прямої. $y = Q + x \cdot \sqrt{3}$
- в) $T_3 = 0$. Цей випадок аналогічний попередньому, він відповідає прямій

$$y = Q - x \cdot \sqrt{3}.$$

Таким чином, бачимо, що закон збереження енергії обмежує на площині (x, y) область, яка має форму рівностороннього трикутника (рис. 1) зі сторонами $2Q/\sqrt{3}$, де висота трикутника BO дорівнює енергії зв'язку Q .

Виберемо деяку точку D із координатами (x, y) , яка відповідає певному розпаду, і опустимо від неї на сторону AC перпендикуляр DM , величина якого дорівнює T_1 (це координата y точки D).

З'ясуємо зміст перпендикулярів KD, LD на сторони AB і CB відповідно. Розглянемо трикутник $\triangle ADM$. У ньому $AD = DM/\sin \angle DAM$. А в трикутнику $\triangle AKD$ ця ж сторона $AD = KD/\sin \angle KAD$. Прирівнюємо ці рівності, тоді маємо:

$KD = T_1 \frac{\sin \angle KAD}{\sin \angle DAM}$. Аналогічно із трикутників $\triangle MCD$ і $\triangle LCD$ можна дістати вираз для сторони LD : $LD = T_1 \frac{\sin \angle LCD}{\sin \angle DCM}$

Використовуючи відоме тригонометричне співвідношення

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha,$$

суму сторін KD і LD можна привести до вигляду:

$$KD + LD = T_1 \frac{\sin \angle KAD}{\sin \angle DAM} + T_1 \frac{\sin \angle LCD}{\sin \angle DCM} = T_1 \frac{\sin 60 \cdot \cos \angle DAM - \sin \angle DAM \cdot \cos 60}{\sin \angle DAM} + T_1 \frac{\sin 60 \cdot \cos \angle DCM - \sin \angle DCM \cdot \cos 60}{\sin \angle DCM} = T_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ctg} \angle DAM - \frac{1}{2} \right) +$$

$$T_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ctg} \angle DCM - \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} T_1 (\operatorname{ctg} \angle DAM + \operatorname{ctg} \angle DCM) - T_1.$$

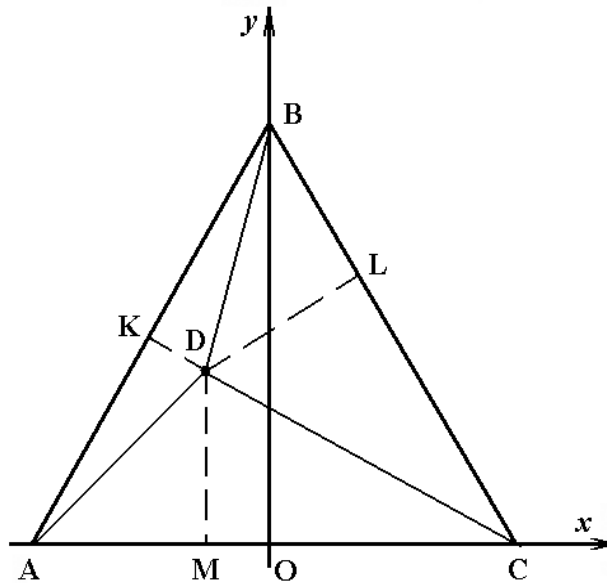


Рис. 1. Діаграма Далітца розпаду частинок за схемою $a = a_1 + a_2 + a_3$

у системі координат $x = \frac{(T_2 - T_3)}{\sqrt{3}}$, $y = T_1$.

Згідно з рис. 1, котангенси кутів $\angle DAM, \angle DCM$ дорівнюють:

$$\text{ctg} \angle DAM = \frac{AM}{MD}, \text{ctg} \angle DCM = \frac{MC}{MD},$$

що значно спрощує вираз для суми $(KD + LD)$: $KD + LD = \frac{\sqrt{3}}{2} AC - MD$.

Тобто сума всіх перпендикулярів, проведених із точки D , дорівнює висоті трикутника, яка є рівною Q : $MD + KD + LD = \frac{\sqrt{3}}{2} AC = Q$. Остаточна шукана сума

$KD + LD$ дорівнює: $KD + LD = Q - T_1 = T_2 + T_3$.

Як видно із рис. 1, для точки $D - x < 0$, тому в даній системі координат $T_2 < T_3$, тоді $KD = T_2$, а $LD = T_3$. Тобто, перпендикуляри з точки D на сторони трикутника дорівнюють кінетичним енергіям частинок, що утворюються при розпаді початкової частинки: $MD = T_1, KD = T_2, LD = T_3$.

Таким чином, для визначення кінетичних енергій частинок, які утворились у результаті розпаду, достатньо знати лише одну із них, інші дві визначаються уже з діаграми. Отже:

$$T_1 = y, T_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y + Q), T_3 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}x - y + Q). \tag{3}$$

Введених двох величин x і y достатньо для повного визначення через них величин імпульсу новоутворених частинок та кутів між імпульсами у системі відліку, пов'язаною із частинкою, яка розпадається (системі спокою частинки). Кінетичні енергії частинок можна виразити через x і y за допомогою співвідношень (1), (2):

Імпульс релятивістської частинки можна виразити через її кінетичну енергію:

$$p = \sqrt{E^2 - m^2 c^2} / c = \sqrt{T^2 + 2mTc^2} / c.$$

Тоді:

$$p_1 = \sqrt{y^2 + 2m_1 c^2} / c \tag{4}$$

$$p_2 = \sqrt{(\sqrt{3}x - y + Q)^2 + 2m_2 c^2 (\sqrt{3}x - y + Q)} / 2c, \tag{5}$$

$$p_3 = \sqrt{(Q - \sqrt{3}x - y)^2 + 2m_3 c^2 (Q - \sqrt{3}x - y)} / 2c. \tag{6}$$

У системі спокою частинки, яка розпадається, тобто в системі центра мас можна записати: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$. Геометричний зміст цього співвідношення – це трикутник на трьох векторах $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$. За теоремою косинуса маємо:

$$p_1^2 = p_2^2 + p_3^2 - 2p_2 p_3 \cos \angle p_2 p_3. \text{ Звідки: } \cos \angle p_2 p_3 = \frac{p_2^2 + p_3^2 - p_1^2}{2p_2 p_3}$$

Аналогічно косинуси двох інших кутів мають вигляд:

$$\cos \angle p_1 p_2 = \frac{p_2^2 + p_1^2 - p_3^2}{2p_2 p_1}, \quad \cos \angle p_1 p_3 = \frac{p_1^2 + p_3^2 - p_2^2}{2p_1 p_3}$$

У результаті, якщо ми знаємо величини кінетичних енергій частинок, які утворились при розпаді, ми можемо визначити їх імпульсні характеристики та кути розльоту між ними.

Згадаємо, що закон збереження енергії задає обмеження на змінні (x, y) (рівносторонній трикутник). Закон збереження трьохмірного імпульсу теж накладає власні обмеження і показує, що не всі точки всередині трикутника відповідають істинним шляхам розпаду частинок. Розглянемо приклади цих обмежень.

Випромінювання двох фотонів. Знайдемо на площині (x, y) область, всередині якої кінематично можливі розпади для наступного випадку: $m_2 = m_3 = 0, m_1 \neq 0$. Із фізичної точки зору цей приклад може відповідати випромінюванню збудженим ядром двох фотонів – частинок із нульовою масою: $A^* \rightarrow A + \gamma + \gamma$. Згідно з законом збереження імпульсу, в системі центру мас повинні виконуватись наступні умови:

$$p_1 + p_2 \geq p_3, p_1 + p_3 \geq p_2, p_3 + p_2 \geq p_1.$$

Розглянемо крайні випадки, які задаватимуть граничні лінії шуканої області.

а) $p_1 + p_2 = p_3$. Підставляємо в цю рівність співвідношення (4-6). З урахуванням $m_2 = m_3 = 0$, одержимо:

$$\sqrt{y^2 + 2m_1 c^2} y + \frac{1}{2}(Q + \sqrt{3}x - y) = \frac{1}{2}(Q - \sqrt{3}x - y),$$

або

$$x = -\sqrt{(y^2 + 2m_1 c^2 y)} / 3. \tag{7}$$

б) $p_1 + p_3 = p_2$. Аналогічно попередньому випадку маємо рівняння:

$$x = \sqrt{(y^2 + 2m_1 c^2 y)} / 3. \tag{8}$$

Ці два випадки відрізняються лише знаком. Для з'ясування геометричного змісту кривих, які описуються рівняннями (7-8), піднесемо до квадрату одне із

рівнянь (7, 8): $3x^2 = y^2 + 2m_1c^2y$, або $\frac{(y + m_1c^2)^2}{m_1^2c^4} - \frac{3}{m_1^2c^4}x^2 = 1$. Одержали рівняння гіперболи, гілка якої в області трикутника проходить через початок координат (рис.2. криві 1,2).

в) $p_3 + p_2 = p_1$. Остання крива задається рівнянням:

$$\frac{1}{2}(-\sqrt{3}x - y + Q) + \frac{1}{2}(-\sqrt{3}x - y + Q) = \sqrt{y^2 + 2m_1y},$$

або після спрощення: $y = \frac{(m - m_1)^2 c^2}{2m}$. Це рівняння прямої, паралельної осі x (крива 3 рис.2).

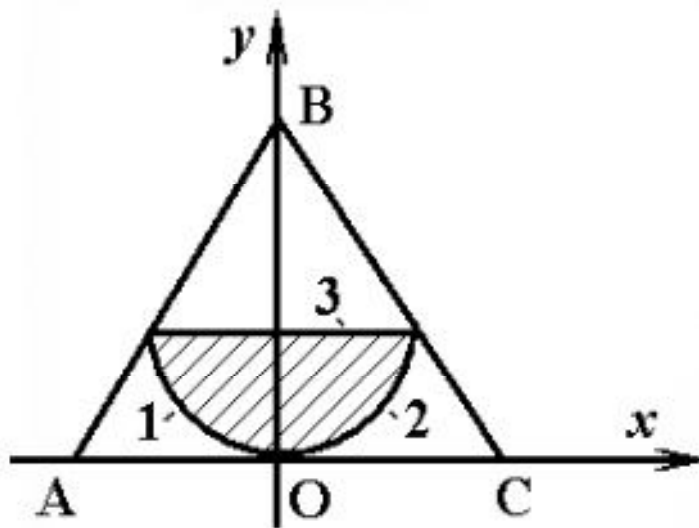


Рис.2. Діаграма Далітца для випадку розпаду за схемою $a \rightarrow a_1 + a_2 + a_3$, за умови, що $m_2 = m_3 = 0, m_1 \neq 0$.

Криві 1,2: $x = \mp \sqrt{(y^2 + 2m_1c^2y)/3}$, пряма 3: $y = (m - m_1)^2 c^2 / 2m$

Таким чином, шукана область обмежена кривими, які задаються рівняннями:

$$x = \pm \sqrt{(y^2 + 2m_1c^2y)/3}, y = (m - m_1)^2 c^2 / 2m.$$

Лише всередині цієї області можливі розпади за схемою $a \rightarrow a_1 + a_2 + a_3$. Поза нею не виконується закон збереження імпульсу.

Розпад μ і K -мезонів

Перейдемо до розгляду процесів з елементарними частинками, які реально спостерігаються на експерименті. Спочатку розглянемо розпад μ та K -мезонів. μ -мезон розпадається на електрон і два нейтрино (одне – антинейтрино електронне, друге – нейтрино мюонне)

$$\mu^- \rightarrow e^- + \tilde{\nu}_e + \nu_\mu. \tag{9}$$

Маса нейтрино – дуже мала величина (у порівнянні з масами інших елементарних частинок), тому нею можна знехтувати. K -мезон розпадається на пі-ноль-мезон, електрон і електронне антинейтрино

$$K^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \tilde{\nu}_e. \tag{10}$$

Відмітимо, що електрон, як правило, народжується ультра-релятивістським, тому у виразах (9, 10) його масою можна знехтувати.

Таким чином, обидві реакції відповідають попереднім умовам $m_1 \neq 0, m_2 = m_3 = 0$. Тоді для розпаду μ і K -мезонів справедлива діаграма Далітца, яка зображена на рисунку 2.

Максимальна кінетична енергія. Визначимо максимальну кінетичну енергію однієї із частинок, яка утворюється в результаті розпаду. Така енергія відповідає границі кінематичної області діаграми Далітца. Почнемо із кінетичної енергії T_1 масивної частинки ($m_1 \neq 0$). Оскільки $T_1 = y$, то, згідно з рис. 2, максимальна енергія відповідає прямій 3, для якої

$$T_{1\max} = \frac{(m - m_1)^2 c^2}{2m}. \quad (11)$$

Така енергія відповідає максимальному імпульсу першої частинки

$$p_{1\max} = \sqrt{y^2 - 2m_1 c^2 y} \Big|_{\max} = \frac{(m^2 - m_1^2)c}{2m}.$$

Відмітимо, що ця пряма відповідає випадку $p_3 + p_2 = p_1$. Оскільки друга і третя частинки мають нульові маси, то їх імпульси однаково напрямлені і, у даному випадку, мають бути однаковими за величиною $p_2 = p_3 = p_{1\max}/2$,

а значить кінетичні енергії дорівнюють:

$$T_2 = T_3 = p_{1\max} c/2. \quad (12)$$

Кінетичні енергії (11), (12) задають точку на діаграмі Далітца, яка знаходиться на середині прямої 3.

Максимуму кінетичної енергії для другої частинки $T_{2\max}$ відповідає крива 2 рис. 2, яка задається рівнянням (8). Підставляємо це рівняння у вираз (3) для T_2 : $T_2 \Big|_{\text{крива 2}} = \frac{1}{2}(Q - y + \sqrt{y^2 + 2m_1 c^2 y})$. Максимальне значення T_2 відповідає верхньому краю кривої 2, де $y = (m - m_1)^2 c^2 / 2m$, тобто

$$T_{2\max} = \frac{1}{2} \left(Q - \frac{(m - m_1)^2 c^2}{2m} + \sqrt{\left(\frac{(m - m_1)^2 c^2}{2m} \right)^2 + 2m_1 c^2 \frac{(m - m_1)^2 c^2}{2m}} \right).$$

З урахуванням $Q = (m - m_1)c^2$ і після спрощення, шукана величина має вигляд:

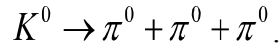
$$T_{2\max} = \frac{(m^2 - m_1^2)c^2}{2m}. \quad (13)$$

Верхній край кривої 2 визначається перетином кривої 2 і прямої 3, тоді для цієї ж точки перша частинка має енергію (11). Сума енергій (11) і (12) дорівнює: $\frac{(m - m_1)^2 c^2}{2m} + \frac{(m - m_1)^2 c^2}{2m} = (m - m_1)c^2 = Q$, тобто дорівнює всій енергії розпаду.

Звідки випливає, що третя частинка у цьому випадку нерухома $T_3 = 0$. Оскільки друга і третя частинки без масові і нічим не відрізняються, то максимальне значення для кінетичної енергії третьої частинки також визначається виразом (13).

Розпад K -нуль мезона на три π -нуль мезони

У цьому випадку початкова нерухома частинка розпадається на три частинки з однаковими масами. Дана реакція описується такою схемою:



Випишемо енергії спокою частинок (у мевах):

$$m_K c^2 = 498 \text{ Мев}, m_\pi c^2 = 135 \text{ Мев}.$$

Тоді енергія розпаду дорівнює: $Q = (m_K - 3m_\pi)c^2 \approx 75 \text{ Мев}$.

Ця величина майже вдвічі менша за енергію пі-мезона, тому новоутворені пі-мезони можна вважати нерелятивістськими.

У випадку нерелятивістського наближення імпульси кінцевих частинок, з урахуванням (3), дорівнюють:

$$p_1 = \sqrt{2m_\pi T_1} = \sqrt{2m_\pi y}, \tag{14}$$

$$p_2 = \sqrt{2m_\pi T_2} = \sqrt{m_\pi (Q - y + \sqrt{3}x)}, \tag{15}$$

$$p_3 = \sqrt{2m_\pi T_3} = \sqrt{m_\pi (Q - y - \sqrt{3}x)}. \tag{16}$$

Побудуємо діаграму Далітца для даного процесу, тобто знайдемо область на площині (x, y) , у якій виконуються закони збереження енергії та імпульсу. Як і в попередніх випадках, шукана область обмежується кривими, які визначаються рівняннями:

$$a) p_1 + p_2 = p_3, b) p_1 + p_3 = p_2, c) p_3 + p_2 = p_1. \tag{17}$$

Проаналізуємо перше рівняння $p_1 + p_2 = p_3$. Підставляємо в це рівняння імпульси (14-16) і, після зведення в квадрат і спрощення, маємо:

$$\sqrt{2m_\pi y} + \sqrt{m_\pi (Q - y + \sqrt{3}x)} = \sqrt{m_\pi (Q - y - \sqrt{3}x)} \rightarrow \sqrt{2y} = \sqrt{Q - y - \sqrt{3}x} - \sqrt{Q - y + \sqrt{3}x} \rightarrow$$

$$2y = \sqrt{(Q - y)^2 - 3x^2} + Q \rightarrow (2y - Q)^2 = (Q - y)^2 - 3x^2 \rightarrow 3x^2 + 3y^2 - 2yQ = 0$$

або остаточно: $x^2 + (y - \frac{1}{3}Q)^2 = (\frac{Q}{3})^2$.

У результаті ми дійшли висновку, що шуканою областю є круг з радіусом $R = Q/3$ і центром у точці з координатами $Z = (0, Q/3)$. Оскільки сторона трикутника діаграми Далітца, як було згадано раніше, дорівнює $2Q/\sqrt{3}$ (рис. 1), то коло з радіусом $R = Q/3$ має доторкатися до усіх трьох сторін трикутника (див. рис. 3). Відмітимо, що два останні рівняння в (17) дають ту ж саму діаграму Далітца.

Із рисунку 3 видно, що частинки матимуть максимальну енергію (сама верхня точка кола), яка дорівнює двом радіусам кола, тобто:

$$T_{\max} = 2Q/3. \tag{18}$$

Математично цю величину можна знайти із умови, що одна частинка (припустимо перша) має імпульс, який напрямлений протилежно двом іншим однаковим імпульсам і дорівнює подвоєному їх значенню:

$$\vec{p}_1 \uparrow \downarrow \vec{p}_2 \parallel \vec{p}_3, p_1 = 2p_2 = 2p_3.$$

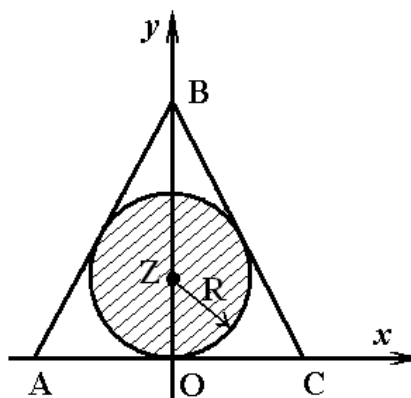


Рис. 3. Діаграма Далітца для розпаду за схемою $M \rightarrow m + m + m$, якщо новоутворені частинки – нерелятивістські

Звідси випливає: $T_2 = T_3 = T_1/2$, тоді енергія розпаду дорівнює:

$$Q = T_1 + T_2 + T_3 = 3T_1/2, \text{ що і дає максимальну енергію (18).}$$

Висновки.

Запропоновано методику розгляду у лекційній практиці процесу розпаду частинок на три частини, основу на використанні законів збереження енергії та імпульсу і побудові діаграми Далітца. Розгляд загальних закономірностей таких процесів демонструє їх прикладне значення і надає можливість формування наукового стилю мислення студентів у системі їхньої професійної підготовки.

Пропонована методика розгляду процесів розпаду частинок із застосування законів збереження і діаграми Далітца більшою мірою, ніж існуючі методики, відповідає рівню сучасної теоретичної фізики, сприяє фундаменталізації фізичної освіти і може бути рекомендована для використання викладачами у лекційній практиці.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Мороз И. А. Методика обоснования закона сохранения момента импульса в СТО / И.О. Мороз // Фен-Наука, 2014. – №1. – С. 27-29.
2. Мороз І.О. Спеціальна теорія відносності: навчальний посібник (гриф МОН України лист №1/11-3525 від 11.05.11) / І.О. Мороз, В.С. Іваній, Р.І. Холодов. – Суми: Видавництво «МакДен», 2011. – 336 с.
3. Мороз І.О. Особливості розгляду закону збереження імпульсу в курсі фізики педагогічних університетів / І.О. Мороз, В.С. Іваній, Р.І. Холодов // Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки. – Чернігів, 2011. – Випуск 89. – С. 338 – 347.
4. В.А.Угаров Специальная теория относительности / В.А.Угаров. – М.: Наука, 1969. – 303с.
5. В.І. Жданов Вступ до теорії відносності: навчальний посібник (гриф МОН України лист №1.4/18-Г-112 від 17.15.08) / В.І. Жданов. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2008. – 287 с.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Мороз Іван Олексійович – доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри фізики та методики навчання фізики Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка

Іваній Володимир Степанович – кандидат технічних наук, професор кафедри фізики та методики навчання фізики Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка

Холодов Роман Іванович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, провідний науковий співробітник Інституту прикладної фізики Національної академії наук України

Герасімова Тетяна Юріївна – магістрантка Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка

Коло наукових інтересів: Проблеми методики навчання фізики.