Ю.И. Волков, Н.М. Войналович
Центральноукраинский государственный педагогический университет имени Владимира Винниченко

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ КАК ОСНОВНОЕ СРЕДСТВО ПЕРЕЧИСЛИТЕЛЬНОЙ КОМБИНАТОРИКИ

Мы предлагаем один из возможных вариантов изложения теории производящих функций и показываем как это (на конкретных примерах) можно применять для решения различных проблем дискретной математики.

Ключевые слова: *рекуррентности, производящая функция, степенные ряды.*

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Войналович Наталія Михайлівна – доцент кафедри математики, доцент, кандидат педагогічних наук.

Коло наукових інтересів: методика навчання математики, дискретна математика.

Волков Юрій Іванович – професор кафедри математики, професор, доктор фізико-математичних наук.

Коло наукових інтересів: математичний аналіз, теорія ймовірностей і математична статистика, дискретна математика.

УДК 373.51

О.М. Вороний
Центральноукраїнський педагогічний університет імені Володимира Винниченка

ДІОФАНТОВІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ

Методом доцільних задач описано основні способи розв'язування діофантових рівнянь, які доступні учням загальноосвітніх шкіл. Добірку задач зроблено із завдань Всеукраїнських олімпіад юних математиків та завдань контрольних робіт учнівської Малої Академії Наук.

Ключові слова: *Діофант, учні, рівняння, розв'язок, цілі числа, спосіб, множники, локалізація.*

Постановка проблеми. Діофантовими рівняннями називають алгебраїчні рівняння або систему алгебраїчних рівнянь з цілими коефіцієнтами, тобто рівняння

$$P(x, y, \ldots, z) = 0,$$

де $P(x, y, \ldots, z)$ многочлен n-го степеня; розв'язки діофантових рівнянь шукають на множині цілих або раціональних чисел.

Основна мета. Передбачається, що діофантові рівняння мають невідомих більше, ніж рівнянь.

Аналіз раніше виконаних праць. Розв'язування діофантових рівнянь – одна з найдавніших математичних задач. Однак, незважаючи на те, що систематичне вивчення таких рівнянь започатковане давньогрецьким математиком Діофантом ще в третьому столітті, теорія найпростіших рівнянь – рівнянь першого степеня $ax + by = c$ була завершена тільки на початку XVII століття. Повна теорія рівнянь другого степеня $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ була створена спільними зусиллями багатьох математиків і підсумована до початку XIX століття видатним німецьким математиком К. Гаусом. Важливих успіхів у дослідженні діофантових рівнянь вищих степенів було досягнуто лише на початку XX століття.

Про складність діофантових рівнянь можна судити з такої події. На II Міжнародному Конгресі математиків, що відбувся у Парижі в серпні 1900 р., німецький математик Д. Гілберт зробив доповідь «Математичні проблеми», де сформулював, на його думку, найбільш важливі задачі, дослідження яких стимулювало б подальший розвиток математики. Серед них за номером 10 була така: «Нехай є довільне діофантове рівняння з довільним числом невідомих і з цілими раціональними коефіцієнтами; потрібно вказати загальний метод, використовуючи який можна за скінченну кількість кроків встановити, має дане рівняння розв'язки в раціональних числах чи ні». На розв'язання цієї проблеми пішло понад піввіку, над нею працювало багато видатних математиків. І тільки в 1972 році російський математик Ю. Матіясевич довів, що десята проблема Гільберта нерозв'язна.

Основні результати дослідження. Зрозуміло, що вивчення діофантових рівнянь у загальноосвітніх школах не передбачене навчальними програмами. Але і діофантові рівняння, і задачі, що зводяться до діофантових рівнянь, часто пропонуються учасникам різних математичних змагань: олімпіад, турнірів, фестивалів; членам Малої академії наук – на контрольних роботах. Успішне розв'язання таких завдань не потребує додаткової інформації, а вимагає від учнів твердих знань шкільної математики, логічного мислення, вміння застосовувати свої знання у нестандартних ситуаціях. Водночас юним математикам корисно також знати деякі способи розв'язування діофантових рівнянь. Найчастіше розв'язки діофантових рівнянь вдається знайти, використовуючи такі прийоми.

1. Виразити в рівнянні одну змінну через іншу, а іншу змінну вибрати так, щоб ця змінна була цілою.

2. Розкласти ліву частину рівняння на множники за умови, що права частина рівняння є цілим числом, і замінити рівняння сукупністю систем простіших рівнянь.

3. Використовуючи особливості рівняння, виділити (локалізувати) множину, на якій можуть міститися його розв'язки, а потім безпосередньою перевіркою знайти їх.

Наведемо приклади діофантових рівнянь, на яких проілюструємо названі способи розв'язування.

1. Знайти усі пари натуральних чисел m, n, які задовольняють рівність $mn - n + m = 2004.$ (*Всеукраїнська олімпіада юних математиків* (*ВОЮМ*), *IV етап,2003-2004р р., 8 кл.*)

Р о з в' я з а н н я. 1-*й спосіб*. Виразимо n через m: $n = \dfrac{2003}{m-1} - 1, m \neq 1$. Оскільки 2003 просте число, то права частина цієї рівності буде цілим числом тільки за умови, що $m-1 = \pm 1$ або $m-1 = \pm 2003$. У першому випадку дістаємо $m = 2, n = 2002$ і $m = 0, n = -2004$, у другому маємо $m = 2004, n = 0$ і $m = -2002, n = -2$. Шуканою парою чисел є тільки пара $m = 2, n = 2002$.

2-й спосіб. Подамо ліву частну рівняння у вигляді добутку двох множників: $(m-1)(n+1) = 2003$. Зрозуміло, що здобуте рівняння рівносильне сукупності двох систем $\begin{cases} m-1 = 2003, \\ n+1 = 1 \end{cases}$ і $\begin{cases} m-1 = 1, \\ n+1 = 2003. \end{cases}$ Звідси $m = 2004, n = 0$ і $m = 2, n = 2002$. Умову задачі задовольняє тільки пара $m = 2, n = 2002$.

2. Знайти усі пари цілих чисел x і y, що задовольняють рівність

$x^4 + x^3y + 2x^2 + y + 1 = x^3 + x$. (*ВОЮМ, 2013-2014 р., ІІ етап, 9 клю*).

Р о з в' я з а н н я. Виконаємо рівносильні перетворення рівняння:

$$x^4 + x^3y + 2x^2 + y + 1 = x^3 + x \Leftrightarrow y(x^3+1) = -x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^3+1} \Leftrightarrow y = -x + 1 - \frac{2(x^2 - x + 1)}{x^3+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -x + 1 - \frac{2}{x+1},\ x \neq -1.$$

(Якщо $x = -1$, то з рівняння дістаємо $4 = -2$). Очевидно, що y буде цілим, якщо $x+1 = \pm 1$ або $x+1 = \pm 2$. Обчислюючи y при відповідних значеннях x, дістаємо шукані пари чисел $(-3;5), (-2;5), (0;-1), (1;-1)$.

3. На множині натуральних чисел розв'язати рівняння $2n^2m = 3n^2 + 5m.$

(*МАН, секція «Математика», 11 кл.,2001- 2002 рр.*).

Р о з в' я з а н н я. Розв'язуватимемо рівняння способом розкладання лівої частини на множники за умови, що права частина є цілим числом. Для цього виконаємо наступні рівносильні перетвореня рівняння:

$$2n^2m = 3n^2 + 5m \Leftrightarrow n^2(2m-3) = 5m \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\,n^2(2m-3) - 2\cdot 5m + 15 - 15 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\,n^2(2m-3) - 5(2m-3) = 15 \Leftrightarrow (2\,n^2 - 5)(2m-3) = 15.$$

Оскільки $15 = 1\cdot 15 = 3\cdot 5 = 5\cdot 3 = 15\cdot 1$, а $2m - 3 > 0$ (нерівність випливає з другого рівняння наведеного ланцюжка перетворень), то рівняння рівносильне сукупності таких систем:

$$\begin{cases} 2n^2 - 5 = 1, \\ 2m - 3 = 15, \end{cases} \quad \begin{cases} 2n^2 - 5 = 3, \\ 2m - 3 = 5, \end{cases} \quad \begin{cases} 2n^2 - 5 = 5, \\ 2m - 3 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} 2n^2 - 5 = 15, \\ 2m - 3 = 1. \end{cases}$$

Тільки друга система рівнянь має розв'язок на множині натуральних чисел: $m = 4, n = 2$. Він є розв'язком даного рівняння.

4. Розв'язати в цілих числах рівняння $x^2 + 5y^2 + 4xy + 2y + 1 = 0.$

(*МАН, секція «Економіка», 11 кл., 1997-1998 рр.*).

Р о з в' я з а н н я. *1-й спосіб.* Застосуємо спосіб локалізації.. Для цього спочатку визначимо скінченний проміжок, на якому можуть бути шукані значення однієї із змінних. Якщо y розглядати як параметр, то це рівняння є квадратним рівнянням відносно змінної x. Воно матиме розв'язки, якщо $D = (4y)^2 - 4(5y^2 + 2y + 1) \geq 0$. Звідси приходимо до квадратної нерівності $y^2 + 2y - 1 \leq 0$, розв'язки якої містяться в проміжку $\left[-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}\right]$. Тому y, що задовольнятиме рівняння, може мати тільки такі значення: $-2, -1, 0$. Далі розв'яжемо дане рівняння за умови, що y набуває вказані значення. Якщо $y = -1$, то з рівняння $x^2 - 4x + 4 = 0$ знаходимо $x = 2.$ При інших значеннях y відповідні рівняння $x^2 + 8x + 17 = 0$ і $x^2 + 1 = 0$ розв'язків не мають. Отже, $(2; -1)$ – єдиний розв'язок рівняння.

2-й спосіб. Виділимо квадрати двочленів у лівій частині рівняння. Маємо:

$$(x+2y)^2+(y+1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0, \\ y+1=0, \end{cases} \Rightarrow x=2,\ y=-1.$$

5. Знайти усі пари простих чисел p і q, для яких число p^3+q^2 є кубом деякого натурального числа. (*ВОЮМ,, 2012-2013 рр. ІІІ етап, 8 кл.*).

Р о з в' я з а н н я. Нехай n натуральне число таке, що $p^3+q^2=n^3$. Тоді

$$n^3-p^3=q^2 \Leftrightarrow (n-p)(n^2+np+p^2)=q^2 \Rightarrow \begin{cases} n-p=1, \\ n^2+np+p^2=q^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n=p+1, \\ 3p^2+3p+1=q^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=p+1, \\ 3(p^2+p)=q^2-1. \end{cases}$$

Якщо $q>2$, то $q^2-1=(q-1)(q+1)$ ділиться без остачі на 8, бо $q-1$ і $q+1$ послідовні парні. Водночас з другого рівняння останньої системи випливає, що q^2-1 кратне 3. Тому q^2-1 кратне 24: $q^2-1=24k, k$ – натуральне число. Враховуючи зроблений висновок, дістанемо рівняння

$$3(p^2+p)=24k \Leftrightarrow p(p+1)=8k \Rightarrow \begin{cases} p=k, \\ p+1=8 \end{cases} \Rightarrow p=7, k=7.$$

Далі з рівності $q^2-1=24k$ дістаємо $q^2=169$, а $q=13$. Отже, $p=7, q=13,\ n=8$ – шукані числа.

Якщо $q=2$, $n^3-p^3=4 \Leftrightarrow (n-p)(n^2+np+p^2)=4$. Зрозуміло, що числа n і p однакової парності, тому $n-p=2$ і $n^2+np+p^2=2$. Друга рівність не може виконуватися, бо при натуральних n і p $n^2+np+p^2>2$.

Отже, $p=7, q=13$ – єдина пара шуканих чисел.

Наведені способи розв'язування діофантових рівнянь також можна застосовувати при розв'язуванні систем діофантових рівнянь.

6. Знайти усі попарно різні натуральні числа x, y, u, v, що є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} x+y=uv, \\ u+v=xy. \end{cases}$$

(*МАН, секція «Математика», 9кл., 2004-2005 рр.*).

Р о з в' я з а н н я. Додамо почленно рівняння системи і перетворимо здобуте рівняння:

$$x+y+u+v=uv+xy \Leftrightarrow (x-1)(y-1)+(u-1)(v-1)=2.$$

Сума двох невід'ємних цілих чисел дорівнє 2 тільки в трьох випадках: 0+2, 1+1 і 2+0. Тому задана система рівнянь рівносильна сукупності таких систем:

$$\begin{cases} x+y=uv, \\ (x-1)(y-1)=0, \\ (u-1)(v-1)=2, \end{cases} \begin{cases} x+y=uv, \\ (x-1)(y-1)=1, \\ (u-1)(v-1)=1, \end{cases} \begin{cases} x+y=uv, \\ (x-1)(y-1)=2, \\ (u-1)(v-1)=0. \end{cases}$$

Розв'язками другого рівняння першої системи є пари натуральних чисел $(1; n)$ і $(k; 1)$, а третього – $(2; 3)$ і $(3; 2)$. Далі, використовуючи перше рівняння, нескладно знайти всі розв'язки цієї системи: $(1, 5, 2, 3)$, $(1, 5, 3, 2)$, $(5, 1, 2, 3)$, $(5, 1, 3, 2)$. Аналогічно з третьої системи знаходимо $(2, 3, 1, 5)$, $(3, 2, 1, 5)$, $(2, 3, 5, 1)$, $(3, 2, 5, 1)$. Розв'язок (2, 2, 2, 2) другої системи має однакові складові, тому не є розв'язком задачі.

***Відповідь*:** $(1, 5, 2, 3)$, $(1, 5, 3, 2)$, $(5, 1, 2, 3)$, $(5, 1, 3, 2)$, $(2, 3, 1, 5)$, $(3, 2, 1, 5)$, $(2, 3, 5, 1)$, $(3, 2, 5, 1)$.

7. Розв'язати у натуральних числах x, y, z систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x^2 = 4y^2 + 3z^2 + 2, \\ 13x = 4y + 3z + 29. \end{cases}$$

(*ВЮОМ, 2013-2014 рр., ІІІ етап, 9, 10 кл.,*).

Р о з в' я з а н н я. Виділемо проміжок, на якому потрібно шукати x. Для цього з другого рівняння системи, пам'ятаючи, що y і z натуральні числа, дістанемо нерівність $13x \geq 36$. З першого рівняння системи дістанемо нерівності $4y^2 < 2x^2, 3z^2 < 2x^2$, використовуючи які з другого рівняння матимемо нерівність $13x < 6x + 29$. Тому $\frac{36}{13} < x < \frac{29}{7}$ і можливими значеннями x є числа 3 або 4. Якщо $x = 3$, то з даної системи дістаємо

$$\begin{cases} 4y^2 + 3z^2 = 16, \\ 4y + 3z = 10 \end{cases} \Rightarrow 4y^2 < 16 \Rightarrow y^2 < 4 \Rightarrow y = 1,\ z = 2.$$

Якщо $x = 4,$ то маємо несумісну систему рівнянь

$$\begin{cases} 4y^2 + 3z^2 = 30, \\ 4y + 3z = 23. \end{cases}$$

З першого рівняння здобутої системи випливає, що y кратний 3. Це суперечить другому рівнянню, бо 23 не ділиться націло на 3.

Тому задана система має єдиний розв'язок у натуральних числах: $x = 3,\ y = 1,\ z = 2$

8. Знайти усі такі пари натуральних чисел m і n, для яких виконується рівність $mn - \sqrt{m^2 + n^2} = 7$. (*ВЮОМ, 2012-2013 рр., ІІІ етап, 10 кл.*).

Р о з в' я з а н н я. Зауважимо, що задана рівність не є діофантовим рівнянням. Однак розв'язати це рівняння можна ліву частину рівняння у вигляді добутку двох множників за умови, що права частина рівності – ціле число. Спочатку виконаємо рівносилні перетворення рівності:

$$mn - \sqrt{m^2 + n^2} = 7 \Leftrightarrow m^2 + n^2 + 2mn = m^2 + n^2 + 2\sqrt{m^2 + n^2} + 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m+n)^2 = (\sqrt{m^2 + n^2} + 1)^2 + 13 \Leftrightarrow (m+n)^2 - (\sqrt{m^2 + n^2} + 1)^2 = 13 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((m+n) - (\sqrt{m^2 + n^2} + 1)\right)\left((m+n) + (\sqrt{m^2 + n^2} + 1)\right) = 13.$$

Оскільки $\sqrt{m^2 + n^2}$ – натуральне число за будь-яких натуральних чисел m і n, то ліва частина здобутої рівності є добутком цілих чисел. При цьому

$$\left((m+n) - (\sqrt{m^2 + n^2} + 1)\right) < \left((m+n) + (\sqrt{m^2 + n^2} + 1)\right).$$

Число 13, що міститься у правій частині – просте число. Тому приходимо до системи рівностей

$$\begin{cases}(m+n)-(\sqrt{m^2+n^2}+1)=1,\\(m+n)+(\sqrt{m^2+n^2}+1)=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(m+n)=14,\\2\sqrt{m^2+n^2}=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+n=7,\\\sqrt{m^2+n^2}=5.\end{cases}.$$

Враховуючи вихідну рівність, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases}m+n=7,\\mn=12\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=3,\ n=4,\\m=4,\ n=3.\end{array}\right.$$

Отже, шуканими є пари $(3;4)$ і $(4;3)$.

Розглянемо дві задачі, розв'язування яких зводиться до розв'язування діофантових рівнянь.

9. В одному 20-поверховому будинку ліфт зіпсовано так, що на ньому можна або піднятися на 8 поверхів угору, або спуститися на 11 поверхів униз. (Якщо вгору чи вниз залишилося менше поверхів відповідно, то ліфт у цьому напрямку не рухається).

а) Чи можна цим ліфтом спуститися з 20-го поверху на перший?

(*ВОЮМ, 2003-2004 рр., ІІ етап, 8 кл.*).

б) Чи можна ліфтом піднямись на будь-який поверх?

Р о з в' я з а н н я. *а*) Нехай n – кількість спусків, а p – кількість підйомів, які треба зробити, щоб з'їхати на перший поверх. Тоді маємо лінійне діофантове рівняння з двома змінними $11n-8p=19$. Розв'яжемо його відносно змінної n, бо коефіцієнт 11 є простим числом:

$$n=2+p-\frac{3(p+1)}{11}\ .$$

Якщо $p+1=11k,$ то $p=11k-1, n=8k+1,$ де k – довільне ціле число, всі цілі розв'язки здобутого рівняння. При $k=1$ дістаємо розв'язок рівняння $p=10, n=9$. Таким чином, спускаючись 9 і піднімаючись 10 разів, можна дістатися першого поверху.

б) Так, можна. Для того, щоб піднятися з першого на k-й поверх, потрібно зробити p підйомів і n спусків. Числа p і n визначаються з рівняння:

$$8p-11n=k-1\Leftrightarrow n=p-\frac{3p+(k-1)}{11}$$

і дорівнюють відповідно $7(k-1)$ і $5(k-1)$.

10. Знайти натуральне число B за умови, що з трьох наступних тверджень два істинні, а одне хибне:

1) $B+41$ є квадратом натурального числа;

2) $B-21$ ділиться на 10;

3) $B-48$ є квадратом натурального числа.

(*ВОЮМ, 2003-2004 рр., ІІІ етап, 8 кл.*).

Р о з в' я з а н н я. Якщо число $B-21$ ділиться на 10, то число B закінчується цифрою 1, а число $B+41$ – цифрою 2 і не може бути квадратом натурального числа; число $B-48$ повинно закінчуватися цифрою 3 і також не може бути квадратом натурального числа. Тому друге твердження хибне, а перше й третє – істинні. Нехай $B+41=n^2, B-48=k^2$. Тоді

$$n^2-k^2=89 \Leftrightarrow (n-k)(n+k)=89 \Rightarrow \begin{cases} n-k=1, \\ n+k=89, \end{cases} \Rightarrow n=45,\ k=44 \Rightarrow B=1984.$$

Зупинимось на діофантових рівняннях, які не мають розв'язків

11. Довести, що рівняння:

а) $x^4+y^4=2017,$ (*Львівська обл. ол., 2016-2017 рр., 7 кл.*);

б) $m^2+n^2-mn=2016$, (*Львівська обл. ол., 2015-2016 рр., 8 кл.*);

в) $x^3-x=y^2-19y+98,$ (*ВОЮМ, IV етап, 1997-1998 рр., 9 кл.*);

г) $x^3-y^3=2004,$ (*ВОЮМ, IV етап, 2003-2004 рр., 9 кл.*);

д) $7m^2-5n^2=2000,$ (*ВОЮМ, III етап, 1999-2000 рр., 8 кл.*).

не мають розв'язків у цілих числах

Р о з в' я з а н н я. *а*) Зрозуміло, що дослідження досить провести для невід'ємних значень змінних і кожний доданок суми лівої частини рівняння не більший за їх суму. Тому $x^4 \le 2017$ і $y^4 \le 2017$. Оскільки $7^4=2401$, то $x \le 6$ і $y \le 6$. Очевидно, що числа x і y різної парності. Нехай x – парне, y непарне. Тоді x може набувати значень $0, 2, 4, 6$, а y – $1, 3, 5$. При вказаних значеннях y дістаємо відповідні рівняння: $x^4=2016,\ x^4=1936,\ x^4=1392$, які не мають розв'язків на множині натуральних чисел. Отже, дане рівняння не має цілих розв'язків.

б) Розв'язки рівняння потрібно шукати на множині парних чисел: $m=2m_1,\ n=2n_1.$ Тоді

$$(2m_1)^2+(2n_1)^2-2m_1\cdot 2n_1=2016 \Leftrightarrow m_1^2+n_1^2-m_1n_1=504.$$

Знову змінні m_1, n_1 шукаємо на множині парних чисел: $m_1=2m_2,\ n_1=2n_2.$ Дістаємо рівняння $m_2^2+n_2^2-m_2n_2=126$, у якому ліва частина кратна 4, а права не ділиться націло на 4. Тому дане діофантове рівняння не має розв'язків.

в) Розкладаючи на множники ліву частину рівняння, дістанемо рівносильне рівняння $(x-1)x(x+1)=y^2-19y+98.$ При будь-якому цілому x ліва частина рівняння ділиться на 3 без остачі. Дослідимо подільність на 3 правої частини рівняння. Нехай $y=3n+r$, де r – остача при діленні цілого числа на 3, $r \in \{0, \pm 1\}$. Тоді $y^2-19y+98=(9n^2+6nr-57y-18r+96)+f(r),$ де $f(r)=r^2-r+2$. Оскільки $f(r) \ne 0$ для $r \in \{0, \pm 1\}$, то $y^2-19y+98$ не ділиться націло на 3 при жодному цілому y. Тому рівняння не має розв'язків на множині цілих чисел

г) Дослідити існування розв'язків можна розклавши ліву і праву частини рівняння на множники $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$. Зауважимо, що $x^2+xy+y^2 \ge 0$ для будь-яких x, y і $0<x-y<x^2+xy+y^2$. Тому $2007=2\cdot 2\cdot 3\cdot 167$. Для визначення x і y дістаємо такі системи рівнянь:

$$\begin{cases} x-y=2, \\ x^2+xy+y^2=1002; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=4, \\ x^2+xy+y^2=501; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=6, \\ x^2+xy+y^2=334; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=12, \\ x^2+xy+y^2=167. \end{cases}$$

Жодна з цих систем не має розв'язків на множині цілих чисел

Розв'язання задачі можна прискорити, якщо використати подільність куба цілого числа на 9. Нехай $y=3n+r$, де r, $r \in \{0, \pm 1\}$ – остача при діленні цілого числа на 3. Тоді

$y^3 = 27n^3 + 27n^2 r + 9nr^2 + r^3$, де $r^3 \in \{0, \pm 1\}$. Отже, при діленні куба цілого числа на 9 можливими остачами є числа 0 і ± 1 або $0, 1$ і 8. Оскільки в рівнянні $x^3 = y^3 + 2004$ приділенні лівої частини на 9 можливі остачі $0, 1$ і 8, а при діленні правої частини на 9 можливими остачами є числа 5, 6, 7, то рівняння $x^3 = y^3 + 2004$, а отже й дане рівняння, не має розв'язків на множині цілих чисел.

д) Розглянемо рівносильне рівняння $7m^2 + 2n^2 = (7n^2 + 1998) + 5.$ Дослідимо, які остачі утворюються при діленні квадрата цілого числа на 7. Нехай $n = 7p + r,$ де $r \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ – остача від ділення числа n на 7. Тоді $n^2 = (49p^2 + 14pr) + r^2$, а $r^2 \in \{0, 1, 4, 9\}$. Це означає, що можливими остачами при діленні n^2 на 7 є числа $0, 1, 2, 4$, а можливими остачами від ділення $2n^2$ на 7 є числа $0, 2, 4$, жодне з яких не дорівнює 5. Звідси випливає, що дане рівняння не має розв'язків на множині цілих чисел.

Висновки. Якщо Вас зацікавила проблема розглянута у статті, то більше інформації про діофантові рівняння і способи їх розв'язування можете знайти в книгах [1]-[3] і статті [4].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Башмакова И. Г. Диофант и диофантовы уравнения / И.Г. Башмакова. –М.: Издательство «Наука», 1972. – 68с.
2. Вороний О. М. Готуємось до математичної олімпіади: навч.- метод. посібник / О.М. Вороний. – Харків: Видавнича група «Основа», 2008. – 225 с.
3. Гельфонд А. О. Решение уравнений в целых числах /. – 4-е изд. – М.: «Наука», 1983. – 64 с.
4. Лейфура В. М. Діофантові рівняння / В.М. Лейфура // У світі математики – 1985. Вип. 16. – К.: Видавництво «Радянська школа», – С. 57-69.

O.M. Voronyi
Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University

Diophantine equations for young mathematicians

The method of expedient tasks describes the main methods for solving Diophantine equations, which comply with the level of secondary school students. A selection of tasks was made from the tasks of the All-Ukrainian Olympiad of Young Mathematicians and tests of the Minor Academy of Sciences of Ukraine.

Keywords: Diophantus, students, equations, solution, integers, method, multipliers, localization.

А.Н. Вороной
Центральноукраинский государственный педагогический университет имени Владимира Винниченко

ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

Методом целесообразно подобранных задач описаны основные способы решения диофантовых уравнений, доступных учащимся общеобразовательных школ.

Подборка задач выполнена из заданий Всеукраинских олимпиад юных математиков и заданий контрольных работ ученической Малой академии наук.

Ключевые слова: *Диофант, ученики, уравнение, решение, целые числа, способ, множители, локализация.*

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРА

Вороний Олексій Миколайович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Центральноукраїнського педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Коло наукових інтересів: зміст і методи роботи з обдарованими учнями.