УДК 378.147

І.Г. Ключник

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка

АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОКАЗНИКОВИХ НЕРІВНОСТЕЙ З ПАРАМЕТРОМ

До сучасних випускників пред'являються високі вимоги щодо змісту знань, умінь і навичок, що визначає конкуретну спроможність фахівця на сучасному ринку праці. При вивчені математики розглядаються задачі, для розв'язання яких потрібно не лише знання шкільної програми, а й творче застосування цих знань, зокрема при розв'язуванні показникових нерівностей з параметром. Це питання досить актуальне, тому що задачі такого типу зустрічаються в завданнях шкільних, районних олімпіад з математики, у завданнях для державної підсумкової атестації з математики, ЗНО. Труднощі при розв'язуванні показникових нерівностей з параметром виникають як у учнів шкіл так і у майбутніх вчителів математики. Проблеми при розв'язуванні задач з парметром визвані перш за все психологічним бар'єром, пов'язаним з самим поняттям парамера. З одного боку, параметр в задачі слід вважати величиною відомою, а з іншого – конкретне значення параметра не дано. З одного боку, параметр є величиною сталою, а з іншого – може приймати різні значення. Саме це відображає суть тих труднощів з яким зустрічаються при розв'язувані нерівностей з параметром.

В даній статті розглядаються різні методи розв'язування показникових нерівностей з парметром. Розв'язування таких задач сприяє інтелектуальному розвитку, розвитку логічного мислення та є гарним матеріалом для відпрацювання навиків.

***Ключові слова**: показникові нерівності, параметр.*

Вступ. До сучасних випускників пред'являються високі вимоги щодо змісту знань, умінь і навичок, що визначає конкретну спроможність фахівця на сучасному ринку праці. При вивчені математики розглядаються задачі, для розв'язання яких потрібно не лише знання шкільної програми, а й творче застосування цих знань, зокрема при розв'язуванні показникових нерівностей з параметром. Це питання досить актуальне, тому що задачі такого типу зустрічаються в завданнях шкільних, районних олімпіад з математики, у завданнях для державної підсумкової атестації з математики, ЗНО. Труднощі при розв'язуванні показникових нерівностей з параметром виникають як у учнів шкіл так і у майбутніх вчителів математики.

В даній статті розглядаються різні методи розв'язування показникових нерівностей з парметром.

Виклад основного матеріалу. До найпростіших показникових нерівностей відносять нерівності вигляду $a^x > b,\ a^x < b,\ a^x \ge b,\ a^x \le b,$ де параметр може міститися:

- в основі показникової функції;
- в показнику степеня;
- в правій частині нерівності.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'язати нерівність

$$(a+2)^{\frac{x-a}{x+1}} > 1.$$

Перепишемо нерівність у вигляді $(a+2)^{\frac{x-a}{x+1}} > (a+2)^0.$ При $a+2>1,$ задана нерівність рівносильна нерівності $\dfrac{x-a}{x+1} > 0 \Leftrightarrow (x-a)(x+1) > 0.$ У цьому випадку маємо розв'язок $x \in (-\infty;-1) \cup (a;+\infty).$ При $a+2<1,$ тобто $-2<a<-1,$ дана нерівність рівносильна нерівності $\dfrac{x-a}{x+1} < 0 \Leftrightarrow (x-a)(x+1) < 0 \Leftrightarrow x \in (a;-1).$

Таким чином маємо відповідь: при $a>-1$: $x \in (-\infty;-1) \cup (a;+\infty)$; при $-2<a<-1$: $x \in (a;-1).$

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$((a-2)x+1)^{x+1} < 1.$$

Дана нерівність рівносильна сукупності систем нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a-2)x+1>1 \\ \quad x+1<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<(a-2)x+1<1 \\ \quad x+1>0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Спочатку розв'яжемо нерівність $(a-2)x>0$. Якщо $a>2,$ то $x>0.$ Якщо $a<2$, то $x<0$. Якщо $a=2,$ то нерівність немає розв'язку. Тоді при $a>2$ маємо першу систему: $\begin{cases} x>0 \\ x+1<0 \end{cases}$. Ця система немає розв'язку. При $a<2$ перша система має вид: $\begin{cases} x<0 \\ x<-1 \end{cases} \Leftrightarrow x<-1.$ Таким чином розв'язком першої системи є: при $a<2$: $x \in (-\infty;-1).$

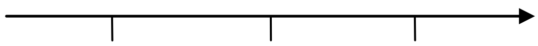
Першу нерівність другої системи представимо у вигляді системи: $\begin{cases} (a-2)x>-1 \\ (a-2)x<0 \end{cases}$. Якщо $a>2$, то $\begin{cases} x>-\dfrac{1}{a-2} \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\dfrac{1}{a-2};0)$. Якщо $a<2$, то $\begin{cases} x<-\dfrac{1}{a-2} \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0;-\dfrac{1}{a-2})$.

При $a>2$ знайдемо розв'язок системи нерівностей: $\begin{cases} x \in (-\dfrac{1}{a-2};0) \\ x>-1 \end{cases}$. Розглянемо такі випадки взаємного розташування -1, $-\dfrac{1}{a-2}$ і 0.

а) $-1<-\dfrac{1}{a-2}$

-1 $-\dfrac{1}{a-2}$ 0 x

б) $-\dfrac{1}{a-2} < -1 < 0$



$-\dfrac{1}{a-2}$ -1 0 x

З випадка а) випливає, що при $a \in (3;+\infty)$: $x \in (-\dfrac{1}{a-2};0)$. З випадка б) випливає, що при $a \in (2;3)$: $x \in (-1;0)$.

При $a < 2$ знайдемо розв'язок системи нерівностей $\begin{cases} x \in (0;-\dfrac{1}{a-2}) \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow$ $x \in (0;-\dfrac{1}{a-2})$. Об'єднуючи розв'язки обох систем нерівностей, одержимо розв'язок: при $a < 2$: $x \in (-\infty;-1) \cup (0;-\dfrac{1}{a-2})$; при $a \in (2;3)$: $x \in (-1;0)$; при $a \in (3;+\infty)$: $x \in (-\dfrac{1}{a-2};0)$.

Розвязування наступних нерівностей пов'язано з використанням поняття логарифма.

Приклад 3. Розв'язати нерівність

$$(a+2)^{x^2+x} \geq 3.$$

За основною логарифмічною тотожністю число 3 представимо за основою $(a+2)$. $3 = (a+2)^{\log_{(a+2)} 3}$. Тоді $(a+2)^{x^2+x} \geq (a+2)^{\log_{(a+2)} 3}$. Розглянемо випадки:

а) нехай $a+2>1$, тобто $a > -1$. Тоді $x^2 + x \geq \log_{a+2} 3 \Leftrightarrow x^2 + x - \log_{a+2} 3 \geq 0$;

$D = 1 + 4\log_{a+2} 3 \geq 0 \Leftrightarrow \log_{a+2} 3 \geq -\dfrac{1}{4}$. Остання нерівність виконується для всіх $a > -1$. Таким чином, при $a > -1$: $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2;+\infty)$, де $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{1+4\log_{a+2} 3}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{1+4\log_{a+2} 3}}{2}$:

б) нехай $a+2<1$, або $-2 < a < -1$. Тоді $x^2 + x - \log_{a+2} 3 \leq 0$. Остання нерівність має розв'язок при $a \in (-2;-1)$ і він має вигляд: $x \in [x_1; x_2]$.

Відповідь: при $a \in (-1;-\infty)$: $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2;+\infty)$; при $a \in (-2;-1)$: $x \in [x_1; x_2]$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність

$$(a-1)^{2x-3} < a+4.$$

Нерівність має розв'язок коли $a > -4$. Задану нерівність перепишемо у вигляді: $(a-1)^{2x-3} < (a-1)^{\log_{(a-1)}(a+4)}$. Розглянемо два випадки:

а) нехай $a > 2$. Одержимо нерівність рівносильну даній $2x-3 < \log_{a-1}(a+4) \Leftrightarrow x \in (-\infty; \frac{1}{2}(3+\log_{a-1}(a+4)))$;

б) нехай $0 < a < 2$. $(a-1)^{2x-3} < (a-1)^{\log_{a-1}(a+4)} \Leftrightarrow 2x-3 > \log_{a-1}(a+4) \Leftrightarrow$ $x \in (\frac{1}{2}(3+\log_{a-1}(a+4)); +\infty)$.

Відповідь: при $a > 2$: $x \in (-\infty; \frac{1}{2}(3+\log_{a-1}(a+4)))$; при $0 < a < 2$: $x \in (\frac{1}{2}(3+\log_{a-1}(a+4)); +\infty)$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність

$$(a+1)^{ax-2} < 5.$$

Розглянемо випадки:

а) нехай $a > 0$: $(a+1)^{ax-2} < (a+1)^{\log_{a+1} 5}$

$\Leftrightarrow ax-2 < \log_{a+1} 5 \Leftrightarrow x < \frac{1}{a}(2+\log_{a+1} 5)$;

б) нехай $-1 < a < 0$, то $(a+1)^{ax-2} < 5 \Leftrightarrow ax-2 > \log_{a+1} 5 \Leftrightarrow ax > 2+\log_{a+1} 5 \Leftrightarrow$

$x > \frac{1}{a}(2+\log_{a+1} 5)$.

Відповідь: при $a > 0: x \in (-\infty; \frac{1}{a}(2+\log_{a+1} 5))$; при $a \in (-1;0)$: $x \in (\frac{1}{a}(2+\log_{a+1} 5); +\infty)$.

Приклад 6. Розв'язати нерівність

$$(a-2)^{\frac{x}{2}} > a-3.$$

Розглянемо випадки:

а) нехай $\begin{cases} a-3 < 0 \\ a-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (2;3)$. Тоді $x \in R$;

б) нехай $a-3>0 \Leftrightarrow a>3.$ Тоді $(a-2)^{\frac{x}{2}}>(a-2)^{\log_{a-2}(a-3)}$ $\Leftrightarrow \frac{x}{2}>\log_{a-2}(a-3) \Leftrightarrow x>2\log_{a-2}(a-3)$.

Відповідь: при $a\in(2;3)$: $x\in R$; при $a>3$: $x\in(2\log_{a-2}(a-3);+\infty)$.

Приклад 7. Розв'язати нерівність

$$a^x+a^{x+1}+a^{x+2}>b.$$

В лівій частині нерівності винесемо a^x (в найменшій степені) за дужки $a^x(1+a+a^2)>b.$

Так як при будь-яких a вираз $1+a+a^2$ додатній, то $a^x>\frac{b}{a^2+a+1}$. При $a\in(0;+\infty)$ і $b\in(-\infty;0]$ маємо, що $x(-\infty;+\infty)$. Якщо $b>0$ то останню нерівність запишемо у вигляді $a^x>a^{\log_a\frac{b}{a^2+a+1}}$. Розглянемо випадки:

а) якщо $0<a<1$ і $b>0$, то $x<\log_a\frac{b}{a^2+a+1}$;

б) якщо $a>1$ і $b>0$, то $x<\log_a\frac{b}{a^2+a+1}$.

Відповідь: при $a\in(0;+\infty)$ і $b\in(-\infty;0]$: $x\in(-\infty;+\infty)$; при $a\in(0;1)$ і $b\in(0;+\infty)$: $x\in(-\infty;\log_a\frac{b}{a^2+a+1})$; при $a\in(1;+\infty)$ і $b\in(0;+\infty)$: $x\in(\log_a\frac{b}{a^2+a+1};+\infty)$.

Приклад 8. Розв'язати нерівність

$$a^{2x}+a^{x+1}-8>0.$$

Введемо нову змінну $a^x=y>0$ (де $a\in(0;+\infty)$). Тоді $y^2+ay-8>0.$ Знайдемо $D=a^2+32>0$, при будь-яких $a\in(0;+\infty)$. Тоді $y<\frac{-a+\sqrt{a^2+32}}{2}$ або $y>\frac{-a+\sqrt{a^2+32}}{2}$. Вертаючись до змінної x маємо $a^x>\frac{-a+\sqrt{a^2+32}}{2}$, або $a^x>a^{\log_a\frac{-a+\sqrt{a^2+32}}{2}}$. Якщо $a>1$, то $x>\log_a\frac{-a+\sqrt{a^2+32}}{2}$; якщо $0<a<1$, то $x<\log_a\frac{-a+\sqrt{a^2+32}}{2}$.

Висновок. Для розв'язування показникових нерівностей з параметром не вимагається спеціальних знань, які виходять за рамки шкільного курсу математики, але при дослідженні таких нерівностей виникають великі труднощі. В статті розглянуто різні методи розв'язування показникових нерівностей з парметром.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Горделадзе Ш.Г. Збірник конкурсних задач з математики / Ш.Г Горделадзе., М.М. Кухарчук, Ф. П. Яремчук. – Навч. Посібник.-К.:Вища шк., 1988.-328с.
2. Дорофеев Г.В. Пособие по математике для поступающих в вузы / М. К. Потапов, Н.Х. Розов - М.: Наука, 1976.-638с.
3. Завізіон Г.В. Рівняння з параметрами: Навч. Посібник. – Кіровоград, 1997. – 100с.
4. Ястебецкий Г. А. Задачи с параметрами. – М. : Просвещение, 1986.- 128с.

Inna Kluchnyk

Volodymyr Vynychenko Central Ukrainian State Pedagogical University

ANALYTICAL METHODS OF DEFINING INDICATOR EQUATIONS WITH PARAMETER

To modern graduates meet the high requirements regarding the content of the knowledge, abilities and skills, which determines the capacity of the specialist to compete on the modern labour market. Teach mathematics addresses the problem, for which you need not only knowledge of school curriculum, but also the creative application of this knowledge, in particular when starting of exponent inequalities with a parameter. This issue is quite relevant, because the problem of this type found in the tasks of school, district math olympiads, tasks for the State final certification in mathematics, EIT. Difficulty in starting of exponent inequalities with the parameter arise both in pupils of schools and in the future teachers of mathematics. Trouble starting tasks with parameter are called first above psychological barrier associated with the notion of parameter. On the one hand, the problem should be regarded as known value, but the specific value of the parameter is not given. On the one hand, the parameter is the constant, and on the other, can take different values. It captures the essence of those difficulties which occur during solving inequalities with a parameter.

In this article different methods of starting of exponent inequalities with parameter. Solving such problems contributes to intellectual development, the development of logical thinking and is a good material for the development of skills.

Keywords: *parameter of inequality, parameter.*

И.Г Ключник

Центральноукраинский государственный педагогический университет имени Владимира Винниченко

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРАМИ

К современным выпускникам предъявляются высокие требования по содержанию знаний, умений и навыков, что определяет конкуретную способность специалиста на современном рынке труда. При изучении математики рассматриваются задачи, для решения которых нужно не только знание школьной программы, но и творческое применение этих знаний, в частности при решении показательных неравенств с параметром. Этот вопрос достаточно актуален, потому что задачи такого типа встречаются в задачах школьных, районных олимпиад по математике, в задачах для государственной итоговой аттестации по математике, ВНО. Трудности при решении показательных неравенств с параметром возникают как у учащихся школ так и в будущих учителей математики. Проблемы при решении задач с парметром вызваны прежде всего психологическим барьером, связанным с самим понятием параметра. С одной стороны, параметр в задачи следует считать величиной известной, а с другой - конкретное значение параметра не дано. С одной стороны, параметр является величиной постоянной, а с другой - может принимать различные значения. Именно это отражает суть тех трудностей с которым встречаются при решении неравенств с параметром.

В данной статье россматриваются различные методы решения показательных неравенств с парметром. Решение таких задач способствует интеллектуальному развитию, развитию логического мышления и являются хорошим материалом для отработки навыков

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРА

Ключник Інна Геннадіївна – кандидат фізико – математичних наук, доцент кафедри математики Центрально українського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Коло наукових інтересів: проблеми підвищення якості навчання у вищому навчальному закладі при підготовці майбутнього вчителя.