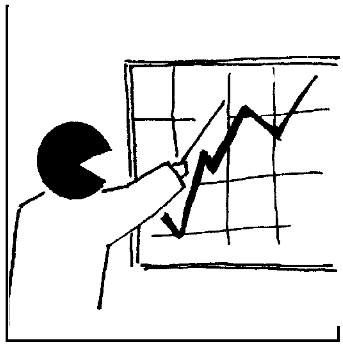

МЕТОДИКА
НАВЧАННЯ І ВИХОВАННЯ

УДК 373.31

Михайло АРЕСТ, Наталія КІЩУК

ОСНОВИ СИСТЕМНОГО МОДЕЛЮВАННЯ НА ПРИКЛАДІ ОБЛІКУ ПРЕДМЕТІВ

(Визначення чисельності множини)

На прикладі побудови системної моделі обліку предметів розкрито методологію системного математичного моделювання, що ґрунтується на системі математичних відношень. Виділено основні етапи побудови моделей, які забезпечують поступове проникнення в сутність об'єкта моделювання. Одночасно розкривається і сутність тих видових форм мислення, що використовуються на кожному етапі моделювання.

Ключові слова: моделювання, математична модель, математичні відношення, об'єкт моделювання, сутність об'єкта, форми мислення.

Основы системного моделирования на примере учета предметов (определение численности множества). На примере построения системной модели учета предметов раскрыто методологию системного математического моделирования, основанного на системе математических отношений. Выделены основные этапы построения моделей, которые обеспечивают постепенное проникновение в сущность объекта моделирования. Одновременно раскрывается и сущность видовых форм мышления, используемых на каждом этапе моделирования. Такая модель позволяет проследить общие тенденции развития математического знания и раскрыть содержательный смысл базовых понятий арифметики целых неотрицательных чисел.

Ключевые слова: моделирование, математическая модель, математические отношения, объект моделирования, сущность объекта, формы мышления.

Fundamentals of system modeling based on the example of counting items (determining the cardinality of a set). Based on the example of constructing a system modeling for counting items, methodology of mathematical modeling grounded on a system of mathematical relations has been developed. The main stages of building models has been described, which provide gradual penetration into the essence of the object modeling. At the same time the essence of those generic forms of thoughts, which are used at every stage of the modeling, has been revealed. Such model allows us to trace the general trends of mathematical knowledge development and reveal the semantic meaning of the basic concepts of nonnegative integer's arithmetic.

Key words: modeling, mathematical model, mathematical relations, object of modeling, the essence of the object, forms of thinking.

Мета: на прикладі побудови моделі обліку предметів проілюструвати основні якісні характеристики в сутності будь-якого об'єкта, розкрити основні етапи системного моделювання.

Постановка проблеми в загальному вигляді. Традиційна математична освіта зорієнтована на те, що на всіх етапах вчення математики учні одержують готові логічні засоби у вигляді логічних форм. Потім їх вчать працювати із зазначеними логічними формами. При цьому школярі не завжди усвідомлюють, які практичні потреби спричинили виникнення отриманих логічних форм, який їх практичний сенс. Такий відрив логічної форми від їх змісту призводить до того, що набуті знання є формальними, учні не в змозі їх практично використати для пізнання навколишньої дійсності. Така математична освіта не забезпечує природного розвитку інтелекту, вона спотворює уявлення школярів про справжній сенс математичного знання.

Причина в тому, що вже впродовж кількох століть математика вивчається з позиції формальної логіки, а не логіки діалектичної, за якою розвивається не лише навколишній світ, але й мислення людини. Тому процес навчання математики витіснив пізнавальний розвиток. Учні не беруть участі в конструюванні математичних моделей, а досліджують готові абстрактні моделі, представлені в символічній формі. Це заважає їм бачити як практичні потреби, які призвели до виникнення таких моделей, так і можливості використання їх на практиці. Одержання готових знань позбавляє учня можливості зрозуміти змістовний сенс цього знання.

При вивченні математики, як і багатьох інших навчальних предметів, ми не даємо дитині можливості самостійно пізнавати світ, а передаємо їй наші власні знання про нього. Ми наївно вважаємо, що ці знання не старіють, а вони старіють сьогодні досить швидко. Діалектика математичного знання поставила нас перед вибором: або ми продовжуємо будувати зміст математичної освіти на засадах формальної логіки, яка несумісна з природним мисленням, або переходимо до логіки діалектичної, яка зберігає і розвиває природне мислення. Тому необхідно переосмислити принципи побудови змісту математичної підготовки, починаючи з дошкільного виховання, а саме роль множинної математики, яка дозволяє перейти від побудови числових (кількісних) математичних моделей до моделей якісних. Потреба в них є дуже актуальною, адже засобами кількісного моделювання неможливо глибоко аналізувати складні процеси у психології і соціології. Застосування лише кількісного моделювання і стало причиною того, що технічні науки у своєму розвитку значно випередили гуманітарні. У сучасних умовах актуальною бачиться проблема використання математичне моделювання як апарату дослідження соціальних процесів. Звідси потрібно не тільки систематизувати засоби кількісного моделювання, а й поширити їх на якісну множинну математику.

Аналіз досліджень і публікацій. Становлення сучасної методики навчання математики в початковій школі ґрунтується на двох провідних психологічних концепціях, які беруть початок від Ж. Піаже та Л. Виготського. Ж. Пиаже припускав, що слова і предмети обробляють мислення особистості і в міру руху від одного математичного об'єкта до іншого (математичний розвиток) розвивають мислення дитини. Л. Виготський стосовно пізнавального розвитку займав принципово протилежну позицію. Він вважав, що процес інтелектуальному розвитку особистості (розвиток інтелекту в онтогенезі) має співвідноситься з процесом інтелектуального розвитку соціуму (розвиток інтелекту в філогенезі). Крім того, Л. Виготський розумів розвиток мислення особистості, як процес, в якому дитина перебудовує пізнавальну діяльність при переході від одного пізнавального середовища до іншого, якісно змінюючи, при цьому, сам інструмент пізнання.

Традиційна математична освіта, як правило, базується на теорії Ж. Піаже. Вона зорієнтована на пошуки та обґрунтування цілей навчання, відбору змісту навчального матеріалу, що відповідає потребами та можливостями молодших школярів, вдосконалення методів, форма і засобів передачі знань у системі (учитель – учень). Значний вклад в розвиток методики навчання математики в початковій школі внесли вітчизняні науковці й методисти – М. Богданович, О. Гайштут, Л. Коваль, М. Козак, Я. Король, М. Левшин, Н. Листопад, С. Логачевська, С. Скворцова та інші.

На базі концепції Виготського будується теорія розвивального навчання. Її основоположниками є Л. Занков, Д. Ельконін, В. Давидов та інші. На засадах розвивального навчання створено цілу низку підручників з математики для початкової школи (Е. Александрова, І. Аргинська, Л. Кочина, Н. Істоміна, М.Моро, Л.Петерсон та ін.).

Значний внесок у розвиток концепції Л. Виготського мали дослідження, які проводились з позицій діяльнісного підходу (О. Леонтьєв) та теорії поетапного формування розумових дій (П. Гальперін, Н. Тализіна та ін.). Однак усі ці системи будувались на знаннєвій парадигмі; вважалось, що засвоєння знань забезпечить розвиток особистості. Крім того, у всіх існуючих навчальних системах, математична інформація представлена лише у символьно-понятійній формі. Тому при його засвоєнні не відбувається якісної перебудови інструменту пізнання. Отже, навіть у системі розвивального навчання концепція Л. Виготського повною мірою не реалізована.

За часів незалежності особлива увага дослідників була зосереджена на впровадженні ідей компетентнісного підходу. Цю проблему досліджували відомі науковці: Н. Бібік, М. Вашуленко, І. Гудзик, Л. Коваль, О. Локшина, О. Овчарук, О. Пометун, О.Савченко, А Тихоненко та інші. Використанню компетентнісного підходу при вивченні математики в початковій школі присвяченні численні публікації О. Онопрієнко, Н. Листопад, С. Скворцоваої та інших. Однак на даному етапі розвитку методики математики ще не знайдено ефективних шляхів вирішення тих питань, які ставить перед школою життя.

Якісний аналіз сучасного стану математичної освіти проведено в роботі Д. Богоявленської*[1, 42–50]*. Тут автор виділяє наступні особливості змісту математичної освіти:

1. Відсутня однорідність на різних вікових рівнях, оскільки символічний рівень математичної інформації недоступний у ранньому розвитку, а особливо у віці від народження до 3 років – найбільш важливому етапі в ранньому розвитку (М. Ібука).

2. Відсутня зв'язність: цілі математичної освіти, які висуваються на попередньому віковому етапі, не перетворювалися в засоби на наступному віковому етапі.

3. Не враховується складність у змісті. Логіка викладу підпорядкована формальній логіці, а не логіці сприймання, яка пов'язана з інтуїтивним представленням математичної інформації. У засвоєнні знань не відбувалося якісної перебудови учнем інструменту пізнання.

4. Математична освіта є безструктурною, оскільки в ній не виділяється базова і проблемно-орієнтована складові.

5. Відсутня модульність: усі учні отримують однакові знання, незалежно від їх потреб. Тому для більшості такі знання є формальними.

6. Математична освіта є безсистемною, оскільки математичні знання не представлені цілісно.

Далі науковець розглядає математику як теорію пізнання, а математичний розвиток (мислення) – як освоєння математичних відношень. При цьому інтелектуальним розвитком особистості стає рух в мисленні при переході від одного математичного відношення до іншого.

Такий підхід дозволяє:

• забезпечити неперервність математичної освіти, починаючи від народження дитини. Освоєння математичних відношень на досимвольному рівні дозволить не лише розвинути органи чуття, але й закладає основи культури (економічної, лінгвістичної, естетичної);

• будувати математичну освіту на засадах діалектичної логіки, що забезпечить збереження природного мислення – інтуїції;

• формувати навички побудови якісних математичних моделей засобами множинної математики і система математичних відношень, що посприяє використанню математичних знань у всіх сферах життя, включаючи гуманітарну.

Виклад основного матеріалу дослідження. Одне з найважливіших завдань школи – навчити учнів мислити системно. Мається на увазі, що вони повинні навчитися будувати математичні моделі, поступово проникаючи в сутність об'єкта, який відображаємо. Під проникненням у сутність об'єкта ми будемо розуміти поступове виявлення наступних якісних станів: ***однорідність – зв'язність – складність – структурність – конструктивність – системність,*** представлених М. Арестом і О. Тупічкіною у роботі *[2, 27]*. Для відображення кожної якості необхідні: ***логічний засіб відображення*** *(інструмент),* ***логічний спосіб відображення*** *(метод)* і ***логічний продукт відображення*** (форма). Тому кожен етап моделювання буде спрямований на відображення однієї з указаних якостей об'єкта. Відповідно завданням кожного етапу стане пошук логічних інструментів, методів і форм для відображення цієї якості.

Не зменшуючи загальності, розглянемо розвиток математичного знання на прикладі арифметики цілих невід'ємних чисел, зміст якої полягає у визначенні величини або чисельності скінченної множини (визначення кількості предметів у певний групі). Це дозволить нам на найпростішому прикладі не лише проілюструвати загальні тенденції розвитку математичного знання, а й представити арифметику цілих невід'ємних чисел як логічну основу математичної освіти початкової школи. Одночасно ми проілюструємо основні принципи системного моделювання, якими учні повинні оволодівати уже в процесі вивчення арифметики.

Перший етап моделювання

Арифметика цілих невід'ємних чисел розпочинається з лічби предметів. Потреба в лічбі виникає відразу після того, як облік предметів за їх якісними характеристиками стає неможливим через збільшення кількості предметів. Тоді відбувається перший скачок у мисленні – абстрагування від якісних властивостей предметів і виділення їх спільних ознак або ***однорідності***. Це означає, що всі предмети вважаються однаковими або одиничними з певної точки зору. Уміння бачити спільні властивості в різних об'єктах – перша якість діалектичного мислення людини. Таке мислення Михайло Арест назвав ***метричним*** *[1, 118]*. Метричне мислення – здатність відображати однорідність.

Розглядаючи довільну групу об'єктів і виділяючи деяку спільну властивість (якість), притаманну всім об'єктам, німецький математик Георг Кантор прийшов до поняття ***множина***, у якій ці об'єкти вважаються елементами множини. Таким чином, завдяки відношенню однорідності на першому рівні абстрагування ми одержуємо перший фундаментальний математичний об'єкт – множину, яка має як якісну, так і кількісну характеристики. Якісною ознакою множини є та характеристична властивість, якою володіє кожен елемент цієї множини. Виходить: якщо елемент володіє характеристичною властивістю, то він належить множині, а якщо ні, то він цій множині не належить. ***Отже, спільна якість об'єктів виступає функцією належності елементів до даної множини.***

Кількісною характеристикою множини є її ***величина (чисельність)***, яка вказує, наскільки багато чи мало елементів містить дана множина. Логічним відображенням цієї величини є її вимірювання. З'ясуємо, як відбувається процес вимірювання величини скінченної множини і в якій формі може бути представлений результат такого вимірювання з теоретико-множинної точки зору.

Невеликі групи предметів можна порівнювати за кількістю шляхом встановлення взаємно-однозначної відповідності між предметами. Такий спосіб вдається використати не завжди. Зокрема, якщо предмети є віддаленими у просторі, то їх зіставлення ускладнюється або взагалі стає неможливим. Тому для визначення чисельності групи предметів варто використати множини-посередники. У такому випадку процес визначення чисельності множини полягає у встановленні взаємно-однозначної відповідності між скінченною множиною предметів і множиною-посередником, наприклад, загнутими пальцями руки. Кількість загнутих пальців показує чисельність групи предметів і виступає натуральним числом. Іншими словами, натуральне число – це спільна властивість усіх рівно чисельних, тобто однакових за величиною скінченних множин (у нашому випадку – групи предметів і зігнутих пальців).

У загальному випадку форма представлення натурального числа залежить від того, яку множину ми вибираємо як посередника. Якщо кожному елементу множини відповідає загнутий палець на руці, зроблена зарубка, зав'язаний вузол або відкладений невеликий предмет, то отримаємо предметне представлення натурального числа (предметне число). Якщо кожному елементу відповідає зображена паличка, точка чи інша фігура, то отримаємо образне представлення числа (образне число). Якщо множиною-посередником обраний відрізок натурального ряду, представлений у символьній формі: 1, 2, 3, 4, ... то отримаємо символьне представлення натурального числа, яке збігається з останнім елементом даного відрізка. І, нарешті: якщо відрізок натурального ряду представлений послідовністю числівників один, два, три, чотири, … то отримаємо натуральне число, представлене останнім числівником цього ряду. Отже, залежно від вибору множини-посередника натуральне число може бути представлене в предметній, образній, знаковій або понятійній формах.

Таким чином, унаслідок абстрагування від якісних ознак об'єктів на початковому етапі розвитку арифметики цілих невід'ємних чисел з'являється перший математичний об'єкт – скінченна множина, у якій усі елементи вважаються однаковими, одиничними. Однорідність усіх елементів скінченної множини є не лише базисним поняттям якісної арифметики цілих невід'ємних чисел, але й першою якісною особливістю змісту будь-якого об'єкта. Далі однорідність скінченних множин стосовно їх рівнопотужності (рівночисельності) породила натуральне число як спільну властивість цих множин. Зокрема, спільною властивістю всіх одноелементних множин є число 1. Об'єднання двох неперетинних одноелементних множин породжує число 2. У результаті утворення нового числа з попереднього й одиниці одержуємо натуральний ряд як засіб (інструмент) для визначення чисельності множини. Процес лічби є способом вимірювання величини скінченної множини, який полягає у встановленні взаємно-однозначної відповідності між предметами і деяким відрізком натурального ряду. Саме відрізок натурального ряду виступає множиною-посередником, що дозволяє оцінити (виміряти) величину деякої множини.

Отож, ми встановили, що логічним засобом відображення величини скінченної множини є натуральна міра або чисельність. Логічним способом вимірювання величини скінченної множини є лічба, а логічним продуктом (результатом лічби) – натуральне число. Натуральна міра виступає базовою величиною (кількістю), лічба є базовим способом вимірювання величини, а результат лічби – базовою формою натурального числа.

Виникнення множини натуральних чисел і натурального ряду стало важливим етапом у розвитку математики. Число служить математичним об'єктом, властивості якого почали вивчати без зв'язку з конкретними предметами. Наука про числа почала називатися арифметикою, або теорією чисел.

Другий етап моделювання

На наступному етапі розвитку арифметики цілих невід'ємних чисел з'являється відношення зв'язності. Це відбувається тому, що зі збільшенням кількості предметів переходять від безпосереднього їх обліку (лічби) до опосередкованих способів визначення кількості предметів (чисельності множини). Якщо кількість предметів велика, то використовують спосіб групування, причому в кожну групу об'єднують однакову кількість предметів (наприклад, у кожну коробку пакують однакову кількість товарів). У результаті одержуємо нову множину (множину коробок). Тепер для визначення кількості товарів потрібно знати кількість коробок і кількість товарів у кожній коробці. Тобто необхідно враховувати відношення між множиною товарів і множиною коробок (по скільки товарів кладуть в одну коробку).

Здатність виявляти зв'язність і знаходити засоби для її відображення називається топологічним мисленням *[1, 121]*. Топологічним моделюванням називається логічне відображення зв'язності як другої якості в сутності об'єкта.

З теоретико-множинної точки поділ множини на підмножини розглядається як її розбиття на попарно неперетинні класи. Як відомо, таке розбиття пов'язане з деяким відношенням еквівалентності. Оскільки будь-яке відношення еквівалентності задає єдине розбиття множини на попарно неперетинні класи і навпаки: будь-яке розбиття множини на попарно неперетинні класи задає єдине відношення еквівалентності на цій множині. Таким чином, якщо задати відношення еквівалентності, яке розбиває множину на попарно-неперетинні рівнопотужні підмножини, то одержимо відношення зв'язності. Таке відношення реалізується через координацію, при якій кожному класу ставиться у відповідність однакова кількість елементів заданої множини. Ця кількість передається числом, яке будемо називати мірою зв'язності. Міра зв'язності відтворює відношення між величиною даної множини і величиною множини класів (показує у скільки разів чисельність даної множини є більшою за чисельність множини класів або по скільки елементів даної множини входить у один клас розбиття). Тому для визначення чисельності множини необхідно чисельність класу помножити на кількість класів: $m_A=n(A_i)k$.

Тут добуток розглядається як сума однакових доданків.

Таким чином, логічним засобом відображення зв'язності є ***розбиття множини на попарно неперетинні рівнопотужні класи***. Логічним способом стає ***процес розбиття***, а логічним продуктом – чисельність одного класу розбиття, яка виступає натуральною функцією зв'язності між чисельністю даної множини і чисельністю множини класів. Розбиття множини на рівнопотужні неперетинні класи будемо називати базовим, відповідно базовими називаються координація, що забезпечує таке розбиття, і одержана функція зв'язку.

Третій етап моделювання

На третьому етапі в розвитку арифметики цілих невід'ємних чисел з'являється зміна величини скінченної множини. Це відбувається тому, що зі збільшенням чисельності множини групування здатне продовжуватися. Наприклад, коробки з товарами теж можна пакувати у ящики, ящики – у контейнери тощо. Отже, одержуємо послідовність множин: коробок, ящиків, контейнерів і т. д., елементами яких виступають відповідно товари, коробки, ящики. Тому для визначення кількості товарів у кожній "упаковці" треба враховувати наступні моменти: скільки товарів міститься у попередній упаковці і скільки таких упаковок знаходиться у даній, тобто враховується складність і зв'язність.

Здатність виділяти складність у сутності об'єкта й уміння знаходити засоби для її вираження називається аналітичним мисленням *[1, 125]*. Аналітичним моделюванням вважають здатність відображати складність як третю якість у сутності об'єктів.

Щоб виявити інструмент, метод і форму, розіб'ємо множину А на неперетинні рівнопотужні підмножини. У результаті одержуємо множину класів A_1. Назвемо її множиною першого ступеня складності. Цю множину знову розбивають на попарно неперетинні рівнопотужні класи й одержують нову множину A_2 – другого ступеня складності і так далі. Таким чином, з елементів множини А створюється послідовність скінченних множин A_1, A_2, … A_k, причому кожна з них має власну однорідність і між кожними двома скінченними множинами є власна зв'язність. Так приходять до поняття складності скінченної множини як до якості зміни величини. Складність змісту скінченної множини є третьою якісною особливістю змісту об'єкта і новим поняттям якісної арифметики цілих невід'ємних чисел.

Логічним засобом стає змінна величина скінченної множини, яка реалізована системою аналізу – послідовністю множин A_1, A_2, … A_k. Логічним способом є процес аналізу зміни величини скінченної множини (виявлення відношення зв'язності, за яким відбувається розбиття на класи на кожному кроці – зняття якості змінної). Логічним продуктом стає вираження змінної величини скінченної множини натуральною операцією (визначення величини одного класу в кожній із множин A_1, A_2, … A_k). Якщо, наприклад, на першому кроці в один клас попало n_1 елементів множини А, а на другому кроці – n_2 елементів множини A_1, то тоді в один клас множини A_2 попадає n_1n_2 елементів множини А. Далі якщо на третьому кроці в один клас множини A_3 попадає n_3 елементів множини A_2, то це означає, що в цьому класі вже є $n_1n_2n_3$ елементів множини А і так далі.

Таким чином, величина кожного елемента послідовності A_1, A_2, … A_k виражається послідовністю добутків: n_1, n_1n_2, $n_1n_2n_3$, …, $n_1n_2…n_k$.

Зокрема, якщо на кожному кроці зв'язність є сталою і виражається числом n, то тоді величина кожного елемента послідовності A_1, A_2, … A_k буде виражена послідовністю степенів: n, n_2, n_3, … n_k.

Змінна величина, що характеризує послідовність A1, A2, … Ak вважається базовою змінною, процес виявлення якості змінної – базовим аналізом, а операція з визначення величини кожного члена цієї послідовності – базовою операцією.

Четвертий етап моделювання

На четвертому етапі в розвитку арифметики цілих невід'ємних чисел з'являється конструкція величини скінченної множини. Це відбувається тому, що елементи множини, чисельність якої визначають, згруповані у "блоки" різної складності. Наприклад, якщо потрібно визначити загальну кількість товарів, які упаковані в контейнери, ящики і коробки, і відомо, скільки упаковок кожного виду і яким саме способом відбувається комплектування кожної упаковки.

На теоретико-множинній мові це означає, що скінченна множина розбита на кілька неперетинних класів, кожен з яких має власну складність. Тоді чисельність даної множини виражається через чисельності базових елементів: $n(A)=k_1n(A_1)+k_2n(A_2)+…\ k_mn(A_m)$

Так приходять до поняття ієрархічності змісту в скінченній множині, як якості будови величини. Ієрархічність змісту скінченної множини є четвертою якісною особливістю змісту об'єкта і новим поняттям якісної арифметики цілих невід'ємних чисел.

Здатність бачити структурність (ієрархічність) в сутності об'єкта і знаходити засоби для її відображення називається структурним мисленням *[1, 130]*. Структурним моделюванням вважають здатність відображати ієрархічність як четверту якість у сутності об'єктів.

Логічним засобом відображення конструктивності стає порядок величини скінченної множини, який реалізується системою структурування – розкладанням на базисні елементи (представники кожного класу розбиття). Логічним способом є процес структурування (будови кожного базисного елемента, виявлення механізму якісної зміни змінної). Логічним продуктом виступає натуральна форма, яка представлена вираженням величини даної множини через величини базисних елементів та їх кількостей як коефіцієнтів розкладу. Вказаний розклад множини за базовими елементами назвемо базовим порядком, відповідну структуру – базовою структурою, а форму представлення величини множини – базовою натуральною формою.

Зауважимо, що саме за такою схемою будується будь-яка позиційна нумерація. Адже множина натуральних чисел є нескінченною. Тому для подання натурального числа (його запису чи утворення числівників) розробляється система числення, принцип побудови якої теж може служити прикладом системного моделювання. Тому для формування навичок моделювання важливо створити умови, за яких діти самі будуть конструювати системи числення, починаючи з двійкової, замість того, щоб відразу ознайомити їх з десятковою системою числення у готовому вигляді.

П'ятий етап моделювання

На п'ятому етапі в розвитку арифметики цілих невід'ємних чисел з'являється конструювання форми величини скінченної множини. Це відбувається тому, що елементи множини, чисельність якої визначають, згруповані у "блоки" різної структурності. Наприклад, якщо на склад поступають однакові товари з різних фабрик, упаковані в контейнери, ящики і коробки, причому кількість різних упаковок з різних фабрик може бути різною. Або навпаки: зі складу необхідно доставити однакові товари в різні магазини, використовуючи упаковки різної ємкості. У кожному випадку потрібно вести облік товарів. Він, зазвичай, пов'язаний із певними способами оптимізації, які полягають у тому, що менші упаковки за певних умов об'єднуються в більші, або навпаки: більші розбиваються на менші.

Так доходять до поняття конструктивності змісту скінченної множини як модульності в об'єднанні з різних структур. Конструктивність змісту скінченної множини є п'ятою якісною особливістю змісту об'єкта і новим поняттям якісної арифметики цілих невід'ємних чисел.

Здатність бачити конструктивність у сутності об'єктів і вміння знаходити засоби для його відображення називається конструктивним мисленням *[1, 134]*. Конструктивним моделюванням вважають здатність відображати конструктивність як п'ятий якісний стан у сутності об'єкта.

Логічним засобом стає програма побудови форми величини скінченної множини. На практиці це означає, що ведеться облік упаковок кожного виду окремо і за необхідності здійснюється розбиття більших упаковок на менші, або навпаки, об'єднання менших упаковок у більші тощо. У результаті знову приходимо до виразу, що передає чисельність даної множини через чисельність базових блоків: $n(A)=k_1n(A_1)+k_2n(A_2)+\dots k_mn(A_m)$.

Логічним способом стає процес проектування форми величини скінченної множини, логічним продуктом – вираз способу проектування форми величини скінченної множини у вигляді алгоритму побудови цифрової форми натурального числа.

Шостий етап моделювання

На шостому етапі в розвитку арифметики цілих невід'ємних чисел з'являється систематизація в розвитку форми величини скінченної множини. Це відбувається завдяки тому, що у скінченній множині створюється послідовність скінченних множин, причому кожна з них має власну конструктивність.

Наприклад, на складі, зазвичай, зберігаються товари різного роду, для обліку яких використовуються ріні міри (метри, кілограми, літри, квадратні метри і т. д.). Однак принципи обліку, які розглянули вище, залишаються такими самими. Тобто освоївши принцип обліку одного виду товарів, їх можна використати для обліку товарів іншого виду.

Так доходять до поняття системності змісту у скінченній множині, що виступає шостою якісною особливістю змісту об'єкта і новим поняттям якісної арифметики цілих невід'ємних чисел. Здатність бачити системність у сутності об'єкта і знаходити засоби для її відображення називається системним мисленням *[1, 138]*. Системним моделюванням вважають здатність відображати системність як шосту якість у сутності об'єктів.

Логічним засобом стає логіка розвитку форми для вираження величини скінченної множини, логічним способом – процес систематизації форм величини скінченної множини (розвиток величини), логічним продуктом – вираз способу систематизації форми величини скінченної множини у вигляді дерева розвитку форм натурального числа.

Нам залишилося представити діалектику логічних засобів, логічних способів і логічних форм розвитку математичного знання у вигляді послідовності трійок: (міра, вимірювання, число) – (відношення, координація, функція) – (змінна, аналіз, операція) – (порядок, структурування, форма) – (програма, проектування, алгоритм) – (логіка розвитку, систематизація, дерево розвитку).

Висновки з дослідження та перспективи подальших розвідок у даному напрямі. Отже, на основі математичних відношень ми виділили основні етапи математичного моделювання:

• **метричний**, метою якого є відображення однорідності в сутності об'єкта моделювання;

• **топологічний**, на якому відбувається перехід від однорідності до зв'язності в сутності об'єкта моделювання;

• **аналітичний** – перехід від зв'язності до складності в сутності об'єкта моделювання;

• **структурний** – перехід від складності до структурності в сутності об'єкта моделювання;

• **конструктивний** – перехід від структурності до конструювання об'єкта із заданими якостями;

• **системний** – перехід від конструктивності до систематизації.

Указані етапи не лише дозволяють розкрити динаміку заглиблення в сутність об'єкта, але й по-новому представляють процес математичного моделювання. Як було показано, кожен з етапів вимагає володіння відповідною формою логічного мислення. Тому головне завдання математичної освіти – забезпечити формування метричного, топологічного, аналітичного, структурного, алгоритмічного й системного мислення, яке проявляється в уміннях вимірювати, координувати, аналізувати, структурувати, проектувати та систематизувати.

Оскільки молодші школярі перебувають на образно-графічному пізнавальному рівні, то необхідна розробка математичної мови цього рівня та навчально-освітнього середовища (включаючи і комп'ютерне), що забезпечить умови для самостійної розробки учнями засобів для відображення основних якостей у сутності об'єктів дослідження (математичних моделей) на відповідному інтелектуальному рівні.

Подальшої розробки потребують образно-графічна математична мова та розвивально-освітнє середовище для початкової школи.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Богоявленская Д. Б.* Психология творческих способностей Д. Б. Богоявленская. – М. : Академия, 2002. – 320 с.

2. *Гаран М. С.* Сучасний стан початкової математичної освіти / М. С. Гаран // Молодий вчений. – 2014. – № 8 (2). – С. 90–93.

3. *Коваль Л.В.* Професійна підготовка майбутніх учителів початкової школи: технологічна складова: монографія / Л. В. Коваль. – Донецьк : ТОВ "ЮГО-Восток, Лтд", 2009. – 403 с.

4. *Коваль Л.–В.* Початкова математична освіта в Україні : реалії та перспективи / Л.–В. Коваль : зб. наук. праць // Педагогічні науки. – Випуск 58. – Ч. I. – Херсон : Айлант, 2011. – С. 195–198.

5. Онопрієнко О. Компетентнісний підхід до навчання математики / О. Онопрієнко, Н. Листопад, С. Скворцова. – К. : Редакції газет з дошкільної та початкової освіти, 2014. – 128 с. – (Бібліотека "Шкільного світу").

6. *Тупичкина Е. А.* Нестандартный подход к содержанию математического развития дошкольников / Е. А. Тупичкина, М. Я. Арест //Детский сад: теория и практика. – М., 2011. – С. 18–27.

7. *Цимбалару А. Д.* Педагогічне проектування освітнього простору в школі I ступеня: теорія і практика : монографія / А. Д. Цимбалару; НАПН України, Ін-т педагогіки. – Київ : Пед. думка, 2013. – 691 с. – Бібліогр. – С. 508–554.

8. *Цимбалару А.* Актуалізація проблеми моделювання в освіті / А. Цимбалару // Неперерв. проф. освіта: теорія і практика. – 2007. – № 1/2. – С. 39–46.

Стаття надійшла18.01.2017 р.