

УДК 539.374.001.8

Чигиринский В. В.  
Ленок А. А.**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ОБЪЕМНОМ НАГРУЖЕНИИ**

Большинство процессов обработки металлов давлением реализуются в условиях объемного нагружения. В сравнении с плоским деформированием пространственное формоизменение характеризуется отличительной кинематикой течения металла, силовой схемой. При этом задача усложняется, как в постановочной части, так и в решении [1–3]. Анализ показывает, что для обеспечения надежности и достоверности результата рассмотрение только части системы уравнений теории пластичности является недостаточным. Решение в напряжениях должны «подкрепляться» решениями в деформациях, т.е. задача должна быть замкнутой [4–6].

Целью работы является определение и исследование граничных условий при решении пространственной замкнутой задачи теории пластичности.

Постановка задачи должна соответствовать той цели, которую ставит перед собой исследователь [3]. Имеем следующую систему уравнений теории пластичности

## 1. Уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

## 2. Обобщенные уравнения равновесия

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x \partial y} (\sigma_x - \sigma_y), \quad \frac{\partial^2 \tau_{zy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tau_{zy}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\sigma_y - \sigma_z),$$

$$\frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (\sigma_z - \sigma_x). \quad (2)$$

## 3. Уравнения связи

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{\xi_x - \xi_y}{\dot{\gamma}_{xy}} = F_1, \quad \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2\tau_{yz}} = \frac{\xi_y - \xi_z}{\dot{\gamma}_{yz}} = F_2, \quad \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2\tau_{zx}} = \frac{\xi_z - \xi_x}{\dot{\gamma}_{zx}} = F_3. \quad (3)$$

## 4. Уравнения совместности скоростей деформаций

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \dot{\gamma}_{xy}, \quad \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \dot{\gamma}_{yz}, \quad \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \dot{\gamma}_{zx}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \dot{\gamma}_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\gamma}_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{\gamma}_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \cdot \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \dot{\gamma}_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\gamma}_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{\gamma}_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \cdot \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \dot{\gamma}_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{\gamma}_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{\gamma}_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \cdot \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial z \partial x}. \quad (5)$$

## 5. Граничные условия

$$\tau_{n1} = k_1 \cdot \text{Sin}(A_1 \Phi_1 - 2\alpha_1), \quad \tau_{n2} = k_2 \cdot \text{Sin}(A_2 \Phi_2 - 2\alpha_2), \quad (6)$$

$$\gamma_{n1} = 2 \cdot \beta_1 \cdot \text{Sin}(B_1 \Phi_1 - 2\alpha_1), \quad \gamma_{n2} = 2 \cdot \beta_2 \cdot \text{Sin}(B_2 \Phi_2 - 2\alpha_2).$$

где  $\sigma_i$  – нормальное напряжение;  $\tau_{ij}$  – касательное напряжение;  $\xi_i$  – линейная скорость деформации;  $\gamma_{ij}$  – сдвиговая скорость деформации;  $A_i$  – постоянная величина, характеризующая тригонометрическую функцию для напряженного состояния пластичной среды;  $B_i$  – постоянная величина, характеризующая тригонометрическую функцию для деформационного состояния пластичной среды;  $\Phi_i$  – гармоническая функция, зависящая от координат очага деформации и являющаяся аргументом тригонометрической функции;  $k_i$  – сопротивление пластической деформации сдвига вдоль осей X, Y, Z, зависящие от координат очага деформации;  $\alpha_i$  – угол наклона контактной поверхности.

На рис. 1 представлен очаг деформации в плане и компоненты тензора напряжений, подлежащие определению [4–6].

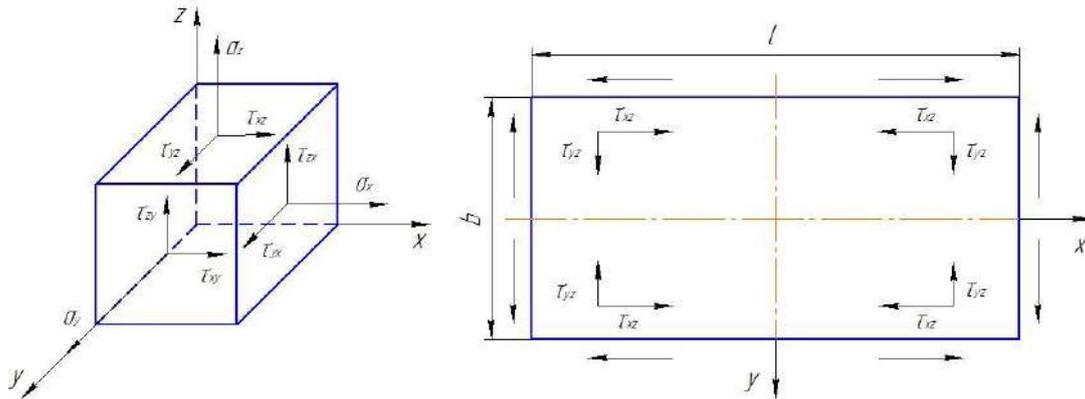


Рис. 1 Компоненты тензоров напряжений и схема действия касательных напряжений на контакте

В работах [1–3] предложены решения замкнутой пространственной задачи теории пластичности. Компоненты тензоров напряжений и скоростей деформации представлены в виде

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \pm C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta'_1 \cdot \text{Cos}(A_1 \Phi_1) \mp C_{\sigma 3} \cdot \exp \theta'_3 \cdot \text{Cos}(A_3 \Phi_3) + \sigma_0 + C, \\ \sigma'_y &= \mp C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta'_1 \cdot \text{Cos}(A_1 \Phi_1) \pm C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta'_2 \cdot \text{Cos}(A_2 \Phi_2) + \sigma_0 + C, \\ \sigma'_z &= \pm C_{\sigma 3} \cdot \exp \theta'_3 \cdot \text{Cos}(A_3 \Phi_3) \mp C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta'_2 \cdot \text{Cos}(A_2 \Phi_2) + \sigma_0 + C, \\ \tau_{xy} &= C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta'_1 \cdot \text{Sin}(A_1 \Phi_1), \quad \tau_{yz} = C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta'_2 \cdot \text{Sin}(A_2 \Phi_2), \\ \tau_{zx} &= C_{\sigma 3} \cdot \exp \theta'_3 \cdot \text{Sin}(A_3 \Phi_3), \end{aligned} \tag{7}$$

при условии

$$\begin{aligned} \theta'_{1x} &= \mp A_1 \Phi_{1y}, \quad \theta'_{1y} = \pm A_1 \Phi_{1x}; \quad \theta'_{2y} = \mp A_2 \Phi_{2z}, \quad \theta'_{2z} = \pm A_2 \Phi_{2y}; \\ \theta'_{3z} &= \mp A_3 \Phi_{3x}, \quad \theta'_{3x} = \pm A_3 \Phi_{3z}; \quad \theta'_{1xx} + \theta'_{1yy} = 0, \quad A_1 \Phi_{1xx} + A_1 \Phi_{1yy} = 0; \\ \theta'_{2yy} + \theta'_{2zz} &= 0, \quad A_2 \Phi_{2yy} + A_2 \Phi_{2zz} = 0; \quad \theta'_{3zz} + \theta'_{3xx} = 0, \quad A_3 \Phi_{3zz} + A_3 \Phi_{3xx} = 0. \end{aligned} \tag{7a}$$

$$\begin{aligned} \xi_x &= \pm C_{\xi 1} \cdot \exp \theta''_1 \cdot \text{Cos}(B_1 \Phi_1) \mp C_{\xi 3} \cdot \exp \theta''_3 \cdot \text{Cos}(B_3 \Phi_3), \\ \xi_y &= \pm C_{\xi 2} \cdot \exp \theta''_2 \cdot \text{Cos}(B_2 \Phi_2) \mp C_{\xi 1} \cdot \exp \theta''_1 \cdot \text{Cos}(B_1 \Phi_1), \\ \xi_z &= \pm C_{\xi 3} \cdot \exp \theta''_3 \cdot \text{Cos}(B_3 \Phi_3) \mp C_{\xi 2} \cdot \exp \theta''_2 \cdot \text{Cos}(B_2 \Phi_2), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = 2 \cdot C_{\xi 1} \cdot \exp \theta_1'' \cdot \sin(B_1 \Phi_1), \quad \dot{\gamma}_{yz} = 2 \cdot C_{\xi 2} \cdot \exp \theta_2'' \cdot \sin(B_2 \Phi_2),$$

$$\dot{\gamma}_{zx} = 2 \cdot C_{\xi 3} \cdot \exp \theta_3'' \cdot \sin(B_3 \Phi_3)$$

при условии

$$\theta_{1x}'' = \mp B_1 \Phi_{1y}, \quad \theta_{1y}'' = \pm B_1 \Phi_{1x}; \quad \theta_{2y}'' = \mp B_2 \Phi_{2z}, \quad \theta_{2z}'' = \pm B_2 \Phi_{2y}; \quad (8a)$$

$$\theta_{3z}'' = \mp B_3 \Phi_{3x}, \quad \theta_{3x}'' = \pm B_3 \Phi_{3z}; \quad \theta_{1xx}'' + \theta_{1yy}'' = 0, \quad B_1 \Phi_{1xx} + B_1 \Phi_{1yy} = 0;$$

$$\theta_{2yy}'' + \theta_{2zz}'' = 0, \quad B_2 \Phi_{2yy} + B_2 \Phi_{2zz} = 0; \quad \theta_{3zz}'' + \theta_{3xx}'' = 0, \quad B_3 \Phi_{3zz} + B_3 \Phi_{3xx} = 0.$$

где  $\sigma_0$  – среднее нормальное напряжение;  $\theta_{ij}'$  – гармоническая функция, показатель экспоненты, которая характеризует распределение напряжений в очаге деформации;  $\theta_{ij}''$  – гармоническая функция, показатель экспоненты, которая характеризует распределение скоростей деформации в очаге деформации;  $C_{\sigma i}$  – постоянная величина, характеризующая напряженное состояние пластической среды;  $C_{\xi i}$  – постоянная величина, характеризующая поле деформаций.

В выражениях (7), (8) показаны функции, которые ограничены решениями задачи (7a), (8a). Это соотношения Коши-Римана и уравнения Лапласа. Для нормальных напряжений решения представляют собой сочетания плоских функций.

Реальный результат распределения контактных напряжений при осадке показан на рис. 2.

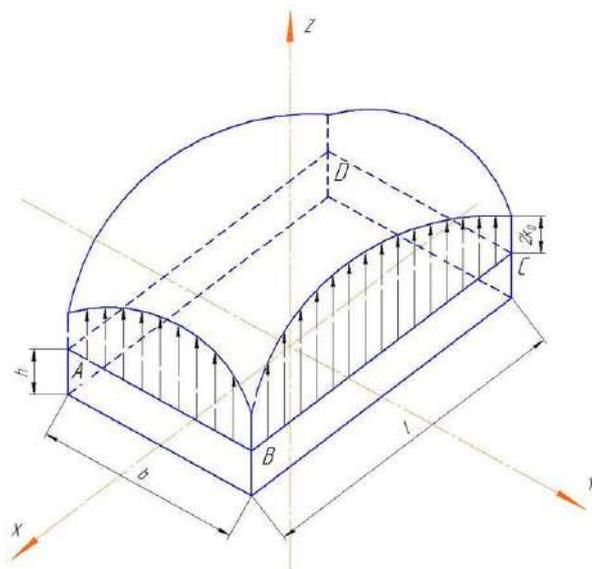


Рис. 2. Эпюра предположенного распределения контактных напряжений

Из рис. 2 следует определенная привязка к граничным условиям, когда в углах очага деформации сопротивление деформации принимается «не наклепанным» и равным  $2k_0$ . В дальнейшем переходе к безразмерным значениям, его можно исключить из рассмотрения.

В выражениях (7)–(8a) фигурируют постоянные интегрирования, которые определяются граничными условиями, рис.2.

Так как в очаге деформации нормальные напряжения (7) имеют знак «минус», принимаем среднее нормальное напряжение

$$\sigma_0 = -2 \cdot C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta_1' \cdot \cos A_1 \Phi_1 - 2 \cdot C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta_2' \cdot \cos A_2 \Phi_2 - 2 \cdot C_{\sigma 3} \cdot \exp \theta_3' \cdot \cos A_3 \Phi_3$$

Это соответствует варианту сдвига величин нормальных напряжений в область отрицательных значений в круге Мора. Из нескольких вариантов, которые допускают решение, запишем

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= -3C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta'_1 \cdot \text{Cos} A_1 \Phi_1 - 2C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta'_2 \cdot \text{Cos} A_2 \Phi_2 - C_{\sigma 3} \cdot \exp \theta'_3 \cdot \text{Cos} A_3 \Phi_3 + C, \\ \sigma'_y &= -3C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta'_2 \cdot \text{Cos} A_2 \Phi_2 - C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta'_1 \cdot \text{Cos} A_1 \Phi_1 - 2C_{\sigma 3} \cdot \exp \theta'_3 \cdot \text{Cos} A_3 \Phi_3 + C, \\ \sigma'_z &= -2C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta'_1 \cdot \text{Cos} A_1 \Phi_1 - C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta'_2 \cdot \text{Cos} A_2 \Phi_2 - 3C_{\sigma 3} \cdot \exp \theta'_3 \cdot \text{Cos} A_3 \Phi_3 + C, \\ \tau_{xy} &= C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta'_1 \cdot \text{Sin}(A_1 \Phi_1), \quad \tau_{yz} = C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta'_2 \cdot \text{Sin}(A_2 \Phi_2), \\ \tau_{zx} &= C_{\sigma 3} \cdot \exp \theta'_3 \cdot \text{Sin}(A_3 \Phi_3). \end{aligned} \quad (9)$$

С целью упрощения анализа результата в первом приближении расчет принимается при  $\tau_{xy} = 0$ .

Для точек А, В задаются следующие граничные условия при  $x = \frac{l}{2}$ ,  $y = \frac{b}{2}$ ,  $z = \frac{h}{2}$ ,

$$\theta'_2 = \theta'_{20}, \quad \theta'_3 = \theta'_{30}, \quad A_2 \Phi_2 = A_2 \Phi_{20}, \quad A_3 \Phi_3 = A_3 \Phi_{30}, \quad \sigma'_x - \sigma'_z = \sigma'_y - \sigma'_z$$

Запишем разности напряжений с учетом (9)

$$\begin{aligned} \sigma'_x - \sigma'_z &= 2C_2 \cdot \exp \theta'_{20} \cdot \text{Cos}(A_2 \Phi_{20}) + C_3 \cdot \exp \theta'_{30} \cdot \text{Cos}(A_3 \Phi_{30}), \\ \sigma'_y - \sigma'_z &= 2C_3 \cdot \exp \theta'_{30} \cdot \text{Cos}(A_3 \Phi_{30}) + C_2 \cdot \exp \theta'_{20} \cdot \text{Cos}(A_2 \Phi_{20}), \end{aligned}$$

при этом

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \sigma_x - C = -C_2 \cdot \exp \theta'_2 \cdot \text{Cos}(A_2 \Phi_2) - 2C_3 \cdot \exp \theta'_3 \cdot \text{Cos}(A_3 \Phi_3), \\ \sigma'_y &= \sigma_y - C = C_3 \cdot \exp \theta'_3 \cdot \text{Cos}(A_3 \Phi_3) - 2C_2 \cdot \exp \theta'_2 \cdot \text{Cos}(A_2 \Phi_2), \\ \sigma'_z &= \sigma_z - C = -3C_2 \cdot \exp \theta'_2 \cdot \text{Cos}(A_2 \Phi_2) - 3C_3 \cdot \exp \theta'_3 \cdot \text{Cos}(A_3 \Phi_3). \end{aligned}$$

Граничные условия в точках А и В, которые позволяют связать функции и разные постоянные интегрирования, при

$$C_2 \cdot \exp \theta'_{20} \cdot \text{Cos}(A_2 \Phi_{20}) = C_3 \cdot \exp \theta'_{30} \cdot \text{Cos}(A_3 \Phi_{30}),$$

$$C_3 = C_2 \frac{\exp \theta'_{20} \cdot \text{Cos}(A_2 \Phi_{20})}{\exp \theta'_{30} \cdot \text{Cos}(A_3 \Phi_{30})}$$

где  $\theta'_{20}$  и  $\theta'_{30}$ ,  $A_2 \Phi_{20}$  и  $A_3 \Phi_{30}$  – числовые значения в угловых точках.

Далее принимается, что в точках А...D:  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ,  $\sigma_z = -2k_0$ . В этом случае имеем

$$C = 2k_0, \quad C_2 = \frac{2k_0}{3 \exp \theta'_{20} \cdot \text{Cos}(A_2 \Phi_{20})}, \quad C_3 = \frac{2k_0}{3 \exp \theta'_{30} \cdot \text{Cos}(A_3 \Phi_{30})}.$$

Выражения нормальных компонентов тензора  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ , удовлетворяющих выше приведенным условиям напряжений имеем вид

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2k_0}{3 \exp \theta'_{20} \cdot \text{Cos}(A_2 \Phi_{20})} \cdot \exp \theta'_2 \cdot \text{Cos}(A_2 \Phi_2) - 2 \frac{2k_0}{3 \exp \theta'_{30} \cdot \text{Cos}(A_3 \Phi_{30})} \cdot \\ &\quad \cdot \exp \theta'_3 \cdot \text{Cos}(A_3 \Phi_3) + 2k_0, \\ \sigma_y &= -\frac{2k_0}{3 \exp \theta'_{30} \cdot \text{Cos}(A_3 \Phi_{30})} \cdot \exp \theta'_3 \cdot \text{Cos}(A_3 \Phi_3) - 2 \frac{2k_0}{3 \exp \theta'_{20} \cdot \text{Cos}(A_2 \Phi_{20})} \cdot \\ &\quad \cdot \exp \theta'_2 \cdot \text{Cos}(A_2 \Phi_2) + 2k_0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\sigma_z = -3 \frac{2k_0}{3 \exp \theta_{20}' \cdot \cos(A_2 \Phi_{20})} \cdot \exp \theta_2' \cdot \cos(A_2 \Phi_2) - 3 \frac{2k_0}{3 \exp \theta_{30}' \cdot \cos(A_3 \Phi_{30})} \cdot \exp \theta_3' \cdot \cos(A_3 \Phi_3) + 2k_0.$$

$$\tau_{xy} = 0, \quad \tau_{yz} = \frac{2k_0}{3 \exp \theta_{20}' \cdot \cos(A_2 \Phi_{20})} \cdot \exp \theta_2' \cdot \sin A_2 \Phi_2,$$

$$\tau_{zx} = \frac{2k_0}{3 \exp \theta_{30}' \cdot \cos(A_3 \Phi_{30})} \cdot \exp \theta_3' \cdot \sin A_3 \Phi_3.$$

Функции  $A_i \Phi_i$  и  $\theta_i'$  определяют из уравнений Лапласа и соотношений Коши-Римана (7а) и (8а)

$$A_2 \Phi_2 = A_2 A_4 \cdot y \cdot z, \quad A_2 A_{20} = A_2 A_4 \cdot \frac{b \cdot h}{4},$$

$$A_3 \Phi_3 = A_3 A_6 \cdot x \cdot z, \quad A_3 A_{30} = A_3 A_6 \cdot \frac{l \cdot h}{4},$$

$$\theta_2' = -\frac{1}{2} A_2 A_4 (y^2 - z^2), \quad \theta_{20}' = -\frac{1}{2} A_2 A_4 \left( \frac{b^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right),$$

$$\theta_3' = -\frac{1}{2} A_3 A_6 (x^2 - z^2), \quad \theta_{30}' = -\frac{1}{2} A_3 A_6 \left( \frac{l^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right).$$

Разности показателей экспоненты

$$\theta_2' - \theta_{20}' = -\frac{1}{2} A_2 A_4 \left[ \left( \frac{b^2}{4} - y^2 \right) - \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \right], \quad \theta_3' - \theta_{30}' = -\frac{1}{2} A_3 A_6 \left[ \left( \frac{l^2}{4} - x^2 \right) - \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \right].$$

Для оценки полученного результата были проведены расчеты нормальных напряжений на контакте очага деформации в условиях объемного нагружения (10). Результаты расчетов показаны на графиках распределения нормальных напряжений на контактной поверхности в зависимости от разных значений коэффициента трения и фактора формы (рис. 3–5). По вертикали расположены относительные нормальные напряжения, которые выражены величиной  $\sigma_z/2k_0$ , по горизонтали – относительная длина очага деформации  $x/l$  (рис. 3, 4) и относительная ширина очага деформации  $y/b$  (рис. 5).

На рис. 3 представлено распределение нормальных напряжений на контактной поверхности вдоль оси  $X$ ; при  $y=0$ , на рис. 4 – вдоль оси  $X$ , при  $y=b/2$ ; на рис. 5 – вдоль оси  $Y$ , при  $x=l/2$ .

Из рис. 3 следует, что концевые участки эпюр напряжений  $a$  и  $b$  имеют разные значения в зависимости от коэффициента трения  $f$  и фактора формы  $b/h$ . Концевые участки эпюр напряжений рис. 3б имеет одинаковые значения относительно фактора формы  $l/h$ . В первом случае это объясняется влиянием поперечной составляющей  $C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta_2' \cdot \cos A_2 \Phi_2$  вертикального напряжения  $\sigma_z$ . С увеличением коэффициента трения  $f$  и фактора формы  $b/h$  максимальные значения указанной составляющей растут, поэтому увеличиваются значения напряжений на концевых участках, рис. 2.

На рис. 3б напряжения на концевых участках закреплены постоянными значениями коэффициента трения  $f=0,3$  и фактора формы  $b/h=8$ , т.е. указанные выше составляющие не изменяются.

На рис. 4 и 5 показано, что значения напряжений на концевых участках при изменении коэффициента трения  $f$  и фактора формы  $b/h$  постоянны. Это объясняется тем, что боковые и торцевые зоны очага деформации, рис. 2, сходятся в одной точке (угловой), в которой вертикальные напряжения  $\sigma_z$  – постоянны и равны  $2k_0$ .

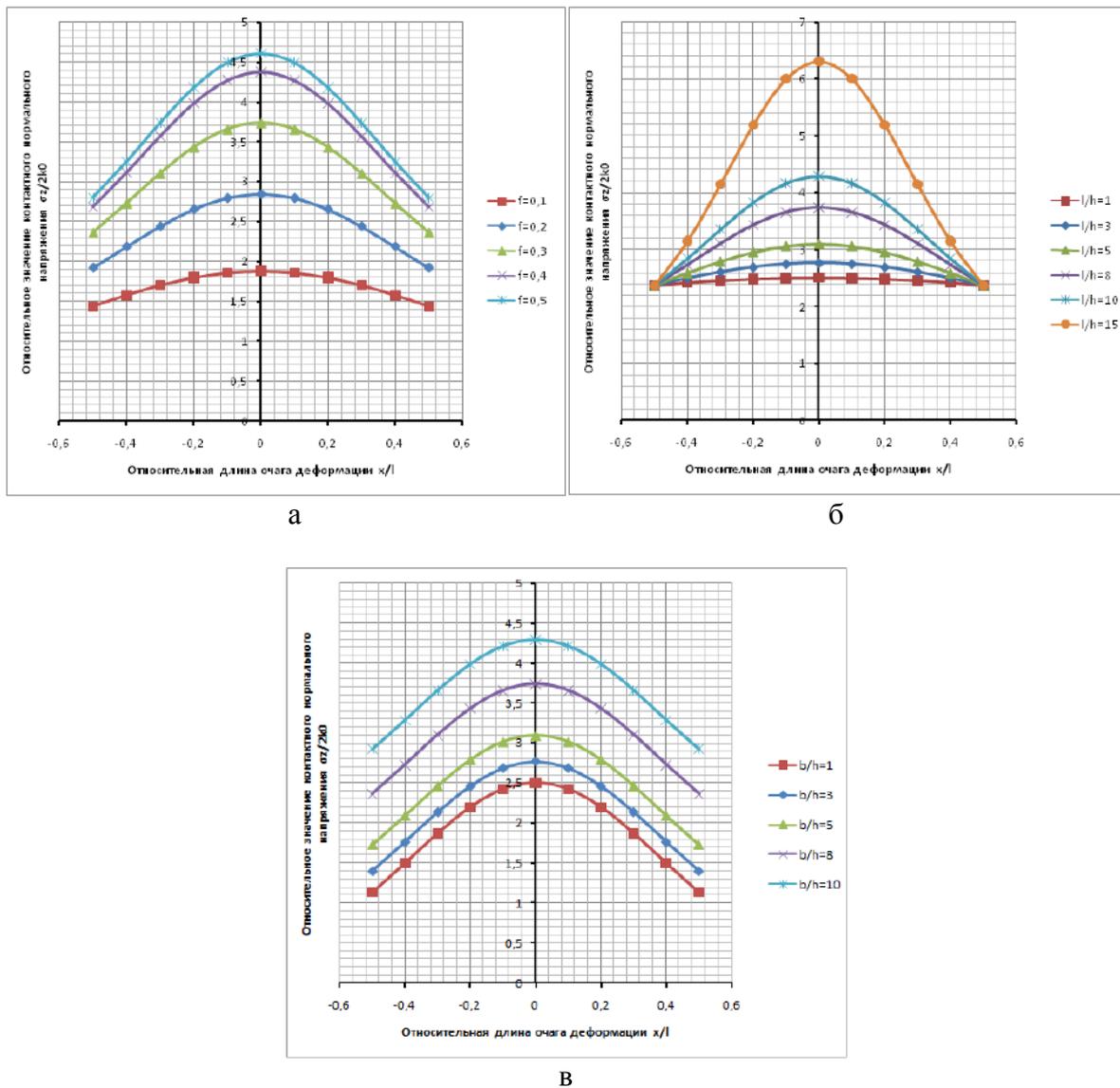


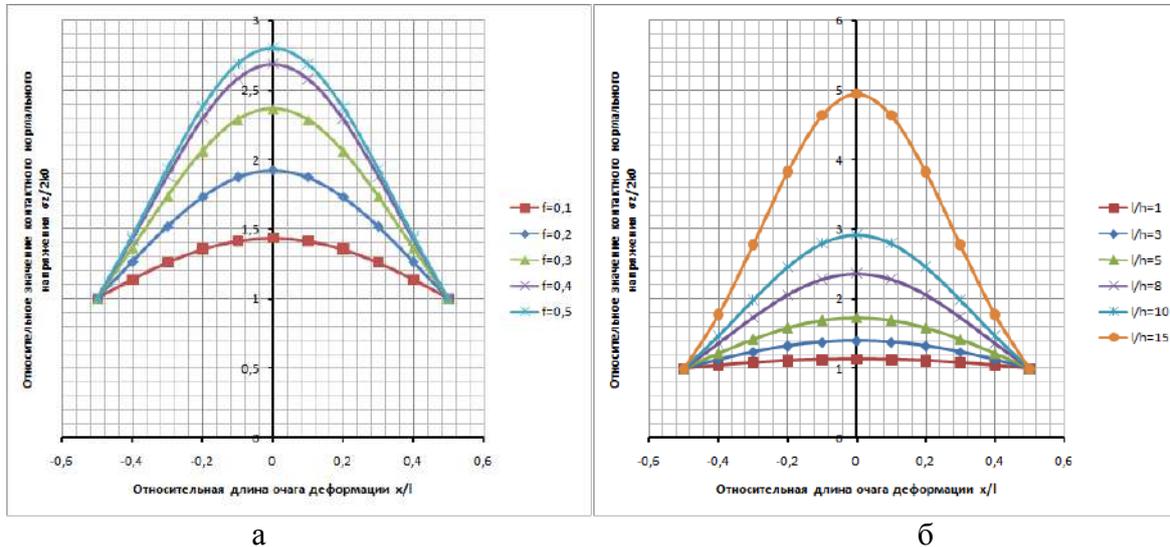
Рис. 3. Распределение нормальных напряжений на контактной поверхности вдоль оси  $X$ , при  $y=0$  и  $h=10$  в зависимости от: а – коэффициента трения  $f=0,1...0,5$ ,  $l/h=8$ ,  $b/h=8$ ; б – фактора формы  $l/h=1;3;5;8;10;15$ ,  $f=0,3$ ,  $b/h=8$ ; в – фактора формы  $b/h=1;3;5;8;10$ ,  $f=0,3$ ,  $l/h=8$ .

На рис.3а имеет место выпуклость кривых распределения контактных нормальных напряжений  $\sigma_z/2k_0$  по всей площади очага деформации. Минимальные значения они достигают на концевых участках  $\sigma_z/2k_0 = 1,439 - 2,805$ , максимальные – посередине  $\sigma_z/2k_0 = 1,878 - 4,611$ . Можно сделать вывод, что с увеличением коэффициента трения контактные нормальные напряжения растут, изменяется характер распределения кривых по очагу деформации.

Характер распределения кривых, рис.3б, показывает, что с увеличением фактора формы от  $l/h=1$  до  $l/h=15$  увеличивается максимальное значение контактных нормальных напряжений от  $\sigma_z/2k_0 = 2,504$  до  $\sigma_z/2k_0 = 6,308$ , причем характер кривых с увеличением  $l/h$  становится более крутым по сравнению с  $l/h=1$ . При факторе формы  $l/h=1$  нормальные напряжения принимают практически постоянное значение.

Влияние ширины на контактные нормальные напряжения  $\sigma_z/2k_0$  показано на рис.3в. Разные кривые относятся к разным ширинам обрабатываемой полосы, через фактор формы

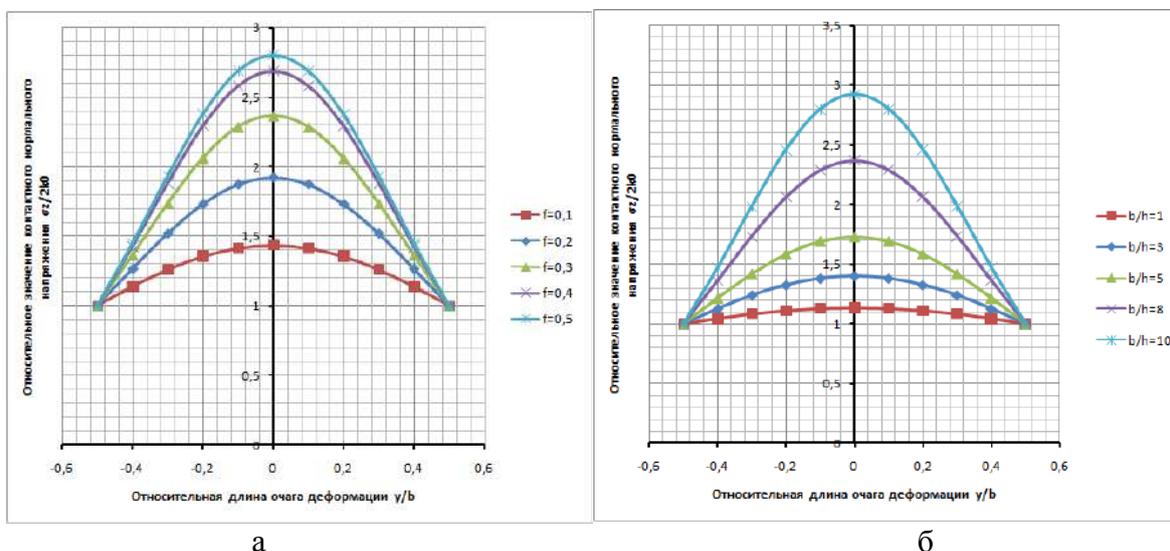
$b/h$ . С увеличением ширины полосы увеличиваются контактные нормальные напряжения  $\sigma_z/2k_0$ , при  $lh=8$  и  $f=0,3$ . Причем, при факторе формы  $b/h=10$ , это происходит в большей степени, чем при факторе формы  $b/h=1$ . Необходимо подчеркнуть, что при больших ширинах, величина нормальных напряжений резко возрастает. Это связано с увеличением коэффициента подпора в поперечном направлении.



а

б

Рис. 4. Распределение нормальных напряжений на контактной поверхности вдоль оси  $X$ , при  $y=b/2$ ,  $h=10$  в зависимости от: а – коэффициента трения  $f=0,1\dots0,5$ ,  $lh=8$ ,  $b/h=8$ ; б – фактора формы  $lh=1;3;5;8;10;15$ ,  $f=0,3$ ,  $b/h=8$



а

б

Рис. 5. Распределение нормальных напряжений на контактной поверхности вдоль оси  $Y$ , при  $x=l/2$ ,  $h=10$  в зависимости от: а – коэффициента трения  $f=0,1\dots0,5$ ,  $lh=8$ ,  $b/h=8$ ; б – фактора формы  $b/h=1;3;5;8;10$ ,  $f=0,3$ ,  $lh=8$ .

На боковых и торцевых поверхностях (рис. 4 и 5), напряжения изменяются с изменением коэффициента трения  $f$  и фактора формы  $lh$  и  $b/h$ .

Представленный результат имеет место для нешироких очагов деформации, когда эпюра контактных напряжений представлена в виде поверхности с одним куполом. Если полоса широкая, то возможны варианты, при которых полоса имеет не одну линию раздела течения металла, а две. В этом случае меняется физическая и математическая модель процесса, нормальные контактные напряжения будут описываться поверхностями с двумя куполами [7].

## ВЫВОДЫ

1. В литературе показаны решения пространственной замкнутой задачи теории пластичности.
2. Постоянные интегрирования в представленных решениях определены из реального распределения контактных напряжений в очаге деформации.
3. Анализ результатов показывает характерные изменения величин контактных напряжений от фактора формы и коэффициента трения для эпюры в виде поверхности с одним куполом.
4. Представленное решение можно использовать в случае пространственного нагружения очага деформации.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чигиринский В.В. Моделирование участков перехода при пластическом формоизменении в условиях объемного нагружения / В.В. Чигиринский, А.А. Ленок // *Вісник ЗНУ: збірник наукових статей. Фізико-математичні науки.* – Запоріжжя: ЗНУ, 2015. – №3 – С. 275–284.
2. Чигиринский В.В. Определение напряженно-деформированного состояния в зонах перехода объемного течения / В.В. Чигиринский, А.А. Ленок // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии: научно-технический журнал.* – Орел: Госуниверситет УНПК, 2015. – №5 (313) – С. 87–94.
3. Чигиринский В.В. Определение интегральных характеристик напряженного состояния точки при пластической деформации в условиях объемного нагружения / В.В. Чигиринский, А.А. Ленок, С.М. Ечин // *Обработка материалов давлением: сборник научных трудов.* – Краматорск: ДГМА, 2015. – №2(41). – С. 41–50.
4. Чигиринский В.В. Метод решения задач теории пластичности с использованием гармонических функций / В. В. Чигиринский // *Известия вузов. Черная металлургия.* – 2009. – №5. – С. 11–16.
5. Чигиринский В. В. Пространственная задача теории пластичности / В.В. Чигиринский, С.П. Шейко, С.М. Ечин // *Обработка материалов давлением: сборник научных трудов.* – Краматорск: ДГМА, 2013. – № 2 (35). – С. 3–8.
6. Чигиринский В. В. О новых подходах решения задач теории пластичности / В. В. Чигиринский // *Обработка материалов давлением: сборник научных трудов.* – Краматорск: ДГМА, 2009. – № 1 (20). – С. 41–49.
7. Целиков А. И. Теория расчета усилий в прокатных станах / Целиков А. И. – М.: Металлургиздат, 1962. – 138 с.

## REFERENCES

1. Chigirinskij V.V. Modelirovanie uchastkov perehoda pri plasticheskom formoizmenenii v usloviyah obemnogo nagruzhennija / V.V. Chigirinskij, A.A. Lenok // *Visnik ZNU: zbirnik naukovih statej. Fiziko-matematichni nauki.* – Zaporizhzhja: ZNU, 2015. – №3 – S. 275–284.
2. Chigirinskij V.V. Opredelenie naprjazhenno-deformirovannogo sostojanija v zonah perehoda obemnogo techenija / V.V. Chigirinskij, A.A. Lenok // *Fundamental'nye i prikladnye problemy tehniki i tehnologii: nauchno-tehnicheskij zhurnal.* – Orel: Gosuniversitet UNPK, 2015. – №5 (313) – S. 87–94.
3. Chigirinskij V.V. Opredelenie integral'nyh harakteristik naprjazhennogo sostojanija točki pri plasticheskoj deformacii v usloviyah obemnogo nagruzhennija / V.V. Chigirinskij, A.A. Lenok, S.M. Echin // *Obrabotka materialov davlenie: sbornik nauchnyh trudov.* – Kramatorsk: DGMA, 2015. – №2(41). – S. 41–50.
4. Chigirinskij V.V. Metod reshenija zadach teorii plastichnosti s ispol'zovaniem garmonicheskikh funkcij / V. V. Chigirinskij // *Izvestija vuzov. Chernaja metallurgija.* – 2009. – №5. – S. 11–16.
5. Chigirinskij V. V. Prostranstvennaja zadacha teorii plastichnosti / V.V. Chigirinskij, S.P. Shejko, S. M. Echin // *Obrabotka materialov davlenie: sbornik nauchnyh trudov.* – Kramatorsk: DGMA, 2013. – № 2 (35). – S. 3–8.
6. Chigirinskij V. V. O novyh podhodah reshenija zadach teorii plastichnosti / V. V. Chigirinskij // *Ob-rabotka materialov davleniem: sbornik nauchnyh trudov.* – Kramatorsk: DGMA, 2009. – № 1 (20). – S. 41–49.
7. Celikov A. I. Teorija rascheta usilij v prokatnyh stanah / Celikov A. I. – M.: Metallurgizdat, 1962. – 138 s.

Чигиринский В. В. – д-р техн. наук, проф., зав. каф. ОМД ЗНТУ

Ленок А. А. – аспирант каф. ОМД ЗНТУ

ЗНТУ – Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье.

E-mail: [valerij@zntu.edu.ua](mailto:valerij@zntu.edu.ua), [anastasion4@rambler.ru](mailto:anastasion4@rambler.ru)

Статья поступила в редакцию 25.02.2016 г.