

УДК 621.7.044

Гайкова Т. В.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО УСИЛИЯ ПРИЖИМА ПРИ ВЫТЯЖКЕ КОРОБЧАТЫХ ДЕТАЛЕЙ ИЗ ЛИСТОВОГО МЕТАЛЛА С РАЗНЫМИ МЕХАНИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Появление складок на фланце заготовки при вытяжке является нежелательным следствием действия сжимающих тангенциальных напряжений и приводит к отбраковке изделий. Для предотвращения складкообразования применяют складкодержатели или прижимы. Большая часть опубликованных работ по этому типу потери устойчивости относится к исследованию образования волнистости на плоском фланце при вытяжке деталей, имеющих форму тел вращения. В этих работах решение задачи об устойчивости фланца дано по аналогии с решениями задачи об упругопластическом выпучивании сжатого стержня методом Энгессера-Кармана, т. е. принималось, что формулы для упругого выпучивания пластин и оболочек справедливы и при их выпучивании за пределом упругости, если модуль упругости заменить приведенным модулем [1, 2]. Более поздние работы [3, 4] показали, что интенсивность упрочнения металла в процессе деформирования оказывает влияние на склонность к складкообразованию. В них было установлено, что более интенсивно упрочняющиеся металлы менее склонны к складкообразованию и предельное отношение S/D для них меньше, чем для менее интенсивно упрочняющихся металлов и по мере деформирования интенсивность упрочнения уменьшается, поэтому можно считать, что заготовки из наклепанного металла более склонны к образованию складок, чем заготовки из отожженного металла.

Биметалл медь-алюминий представляет собой систему из материалов с разными механическими свойствами, показателями анизотропии и упрочнения. Их совместная пластическая деформация будет сопровождаться в несколько раз большей интенсивностью упрочнения меди, чем алюминия, что приведет к тому, что медь будет сдерживать, а алюминий, наоборот способствовать образованию складок на фланце заготовки. Поэтому расчет усилия прижима с учетом особенностей деформируемого металла представляет собой важную задачу с точки зрения получения качественных деталей с минимальной разнотолщинностью.

Целью работы являлось определение минимального усилия прижима при вытяжке коробчатых деталей из двухслойного металла алюминий–медь, предотвращающего возникновение складок.

Предполагали, что действующая на пластинку нагрузка нормальна к ее поверхности и что прогибы пластинки в сравнении с толщиной малы.

В качестве граничных условий принимали, что края пластинки могут свободно смещаться в плоскости пластинки и что, в связи с этим, опорные реакции на краях должны быть нормальны к пластинке. При этих допущениях вправе пренебречь всякой имеющей место при изгибе деформацией в срединной плоскости пластинки [1].

Рассматривали действие нагрузки, распределенной по верхней поверхности пластинки. Интенсивность этой нагрузки обозначим через q , так что нагрузка, действующая на элемент поверхности, будет равна $qdx dy$.

Проектируя все приложенные к элементу силы на ось z , в работе [1] получено следующее уравнение равновесия:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx + q dx dy = 0 \quad (1)$$

из которого

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0. \quad (2)$$

Взяв моменты от всех действующих на элемент сил относительно оси x , также получено другое уравнение равновесия

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx + Q_y dx dy = 0. \quad (3)$$

Моментом нагрузки q и моментом, возникающим вследствие изменения силы Q_y , в этом уравнении пренебрегаем ввиду того, что они представляют собой величины более высокого порядка малости, чем те, которые мы рассматриваем. При упрощении уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0. \quad (4)$$

Точно таким же образом, взяв моменты относительно оси y , будем иметь

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} + Q_x = 0. \quad (5)$$

Так как в направлениях x и y сил нет, а относительно оси z нет моментов, то три уравнения (2), (4) и (5) полностью определяют равновесие элемента. Исключим из этих уравнений перерезывающие силы Q_x и Q_y , определив их из уравнений (4) и (5) и произведя подстановку их значений в уравнение (2). Таким путем получим:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q. \quad (6)$$

Заметив, что $M_{yx} = -M_{xy}$, вследствие того, что $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, представим уравнение равновесия (6) окончательно в такой форме:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q. \quad (7)$$

Для того чтобы представить это уравнение как функцию прогибов w пластинки, сделаем допущение, что применяемые для случая чистого изгиба уравнения, сохраняют силу также и в случае поперечно нагруженной пластинки. Сделать такое допущение – значит пренебречь влиянием на изгиб перерезывающих сил Q_x и Q_y и сжимающего напряжения σ_z , вызванного нагрузкой q . При применении такого приема погрешность в полученных таким путем прогибах мала, если только толщина пластинки мала в сравнении с другими ее размерами в ее плоскости [2].

Переходя от примененных в уравнениях для случая чистого изгиба направлений n и t к направлениям x и y , получим

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad (8)$$

где D – жесткость пластинки, определяемая уравнением

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (9)$$

где E – модуль упругости материала; ν – коэффициент Пуассона; h – толщина.

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}. \quad (10)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (7), найдем

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (11)$$

Это последнее уравнение можно записать также в символической форме

$$\Delta \Delta \omega = \frac{q}{D}, \quad (12)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}. \quad (13)$$

Решение Навье для свободно опертой прямоугольной пластинки [1].

Решением предыдущих выкладок можно воспользоваться при вычислении прогибов, вызванных в свободно опертой прямоугольной пластинке любым типом нагрузки, заданной уравнением

$$q = f(x, y). \quad (14)$$

С этой целью представим функцию $f(x, y)$ в виде двойного тригонометрического ряда

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (15)$$

Чтобы определить какой-либо определенный коэффициент $a_{m'n'}$ этого ряда, умножаем обе части уравнения (15) на $\sin \frac{n'\pi y}{b} dy$ и интегрируем от 0 до b . Заметив, что

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n'\pi y}{b} dy = 0, \quad \text{если } n \neq n',$$

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n'\pi y}{b} dy = \frac{b}{2}, \quad \text{если } n = n'.$$

находим таким путем

$$\int_0^b f(x, y) \sin \frac{n'\pi y}{b} dy = \frac{b}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn'} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (16)$$

Умножая обе части уравнения (16) на $\sin \frac{m'\pi x}{a} dx$ и интегрируя от 0 до a , получим

$$\int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m'\pi x}{a} \sin \frac{n'\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{2} a_{m'n'},$$

откуда

$$a_{m'n'} = \frac{2}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m'\pi x}{a} \sin \frac{n'\pi y}{b} dx dy. \quad (17)$$

Произведя предписанное выражением (16) интегрирование для заданного нам распределения нагрузки, т. е. для заданной $f(x, y)$, мы найдем коэффициенты ряда (15) и таким путем представим заданную нам нагрузку как сумму частичных синусоидальных нагрузок. Прогиб, производимый каждой такой частичной нагрузкой, был определен выше;

полный же прогиб будет получен путем суммирования членов, аналогичных выражению (15). Таким образом, найдем

$$\omega = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (18)$$

Для случая вытяжки нагрузку от действия пуансона и прижима можно представить как равномерно распределенную по всей поверхности пластинки. В этих условиях

$$f(x, y) = q_0,$$

где q_0 – интенсивность равномерно распределенной нагрузки. Формула (18) дает нам для этого случая

$$a_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{16q_0}{\pi^2 mn}, \quad (19)$$

где m и n – нечетные целые числа. Если m или n по отдельности или оба вместе числа четные, то a_{mn} обращается в нуль. Подставляя это значение в уравнение (18), находим

$$\omega = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}, \quad (20)$$

где $m = 1, 3, 5, \dots$ и $n = 1, 3, 5, \dots$

Под равномерной нагрузкой поверхность прогибов получится симметричной относительно осей $x = a/2$ и $y = b/2$; при этом все члены с четными значениями m или n в ряде (18) исчезнут, будучи несимметричными относительно указанных осей. Максимальный прогиб пластинки получится в центре и определится подстановкой $x = a/2$, $y = b/2$ в формулу (18)

$$\omega_{\max} = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}, \quad (21)$$

этот ряд быстро сходится, и удовлетворительное приближение достигается уже одним лишь его первым членом.

Из предыдущих выкладок очевидно, что прогиб свободно опертой прямоугольной пластинки всегда может быть представлен в виде двойного тригонометрического ряда (20), коэффициенты a_{mn} которого определяются уравнениями (19).

Применим этот результат к случаю нагрузки, равномерно распределенной по площади прямоугольника, показанного на рис. 1., что схематизирует вытяжку коробчатой детали.

В силу уравнений (20) имеем

$$a_{mn} = \frac{4P}{abu\nu} \int_{\xi-u/2}^{\xi+u/2} \int_{\eta-u/2}^{\eta+u/2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

или

$$a_{mn} = \frac{16P}{\pi^2 mnu\nu} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{n\pi\nu}{2b}. \quad (22)$$

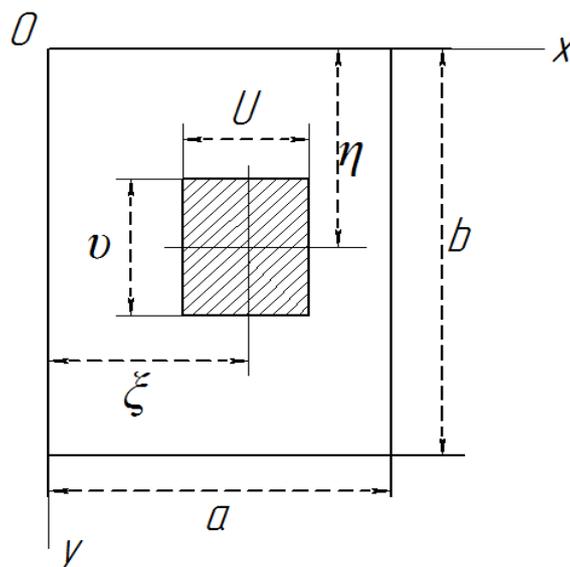


Рис. 1. Схема равномерно нагруженной пластинки

Если, в частности, $\zeta = a/2$, $\eta = b/2$, $u = a$ и $v = b$, то уравнение (22) приводит к выражению (20), полученному в предыдущем пункте для равномерно нагруженной пластинки. Но нас интересует случай, где только $\zeta = a/2$, $\eta = b/2$, тогда

$$a_{mn} = \frac{16P}{\pi^2 m n u v} (-1)^{\frac{m+n}{2}-1} \sin \frac{m\pi u}{a} \sin \frac{n\pi v}{b}. \quad (23)$$

а из (18) находим прогиб

$$\omega = \frac{16P}{\pi^6 m n u v D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi u}{a} \sin \frac{n\pi v}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (24)$$

Этот ряд быстро сходится, и мы сможем получить с удовлетворительной точностью прогиб в любой точке пластинки, взяв всего лишь несколько первых членов ряда [1].

Минимальная величина усилия прижима, необходимая для предотвращения складкообразования при вытяжке цилиндрических деталей выражается по приближенной эмпирической зависимости, полученной при обработке опытных данных [5]

$$Q = 0,1 \left(1 - \frac{18k}{k-1} \frac{h}{2R} \right) k^2 P_{\max}, \quad (25)$$

где $k = \frac{R}{r_y}$;

P_{\max} – максимальное усилие вытяжки.

Выразим из формулы (25) P_{\max}

$$P_{\max} = \frac{Q}{0,1 \left(1 - \frac{18k}{k-1} \frac{h}{2R} \right) k^2}. \quad (26)$$

Подставляем значение максимального усилия вытяжки в уравнение для прогибов (24)

$$\omega = \frac{16Q}{\pi^6 m n \nu D_{0,1} \left(1 - \frac{18k}{k-1} \frac{h}{2R}\right) k^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1} \sin \frac{m\pi u}{a} \sin \frac{n\pi v}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (27)$$

Из данного уравнения находим Q

$$Q = \frac{\omega \pi^6 m n \nu D_{0,1} \left(1 - \frac{18k}{k-1} \frac{h}{2R}\right) k^2}{16} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1} \sin \frac{m\pi u}{a} \sin \frac{n\pi v}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}.$$

Допустим, что касание прижимной плиты воспринимается каждым элементом в точках $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$, а также, что конструкция прижима допускает некоторую волнистость фланца, равную малой величине $\omega_0 = 1$ мм [4], тогда получим

$$Q = \frac{\pi^6 m n \nu D_{0,1} \left(1 - \frac{18k}{k-1} \frac{h}{2R}\right) k^2}{16} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}{\sin \frac{m\pi u}{a} \sin \frac{n\pi v}{b}}. \quad (28)$$

При пластической деформации цилиндрическая жесткость пластины равна [2] $D' = \frac{E_c h^3}{9}$, где E_c – секущий модуль.

Так как вытяжке подвергается биметалл, который обладает анизотропией механических свойств по трем взаимно перпендикулярным направлениям, то решение для отыскания усилия прижима можно представить в виде

$$Q = \frac{\pi^6 m n \nu D_{0,1} \left(1 - \frac{18k}{k-1} \frac{h}{2R}\right) k^2}{16} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{m^4}{a^4} D_x + \frac{2m^2 n^2}{a^2 b^2} H + \frac{n^4}{b^4} D_y\right)}{\sin \frac{m\pi u}{a} \sin \frac{n\pi v}{b}}. \quad (29)$$

где D_x , D_y – цилиндрические жесткости в направлении координатных осей в плоскости пластины;

$$H = \sqrt{D_x D_y} \quad [1].$$

Допустим, что $D_x = D_y = D$ и ограничимся одним членом ряда, т.к. он дает достаточно точное приближение, будем иметь

$$Q = \frac{\pi^6 \nu D_{0,1} \left(1 - \frac{18k}{k-1} \frac{h}{2R}\right) k^2 \left(\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4}\right) D + \frac{2}{a^2 b^2} H \right)}{16 \sin \frac{\pi u}{a} \sin \frac{\pi v}{b}}. \quad (30)$$

ВЫВОДЫ

Полученная зависимость (30) дает возможность рассчитать минимальное значение усилия прижима с возникновением допустимого размера складок, когда они разглаживаются, переходя через вытяжное ребро матрицы, то есть процесс вытяжки идет устойчиво.

Еще одним важным следствием при вычислении усилия по найденной зависимости является то, что с увеличением усилия прижима фланца заготовки больше требуемого,

возрастают растягивающие меридиональные напряжения, что приводит к резкому утонению в угловых зонах профиля и увеличению толщины в углах фланца. Это является нежелательным явлением с позиций качества изделий из биметаллов. Из данной формулы (30) видно, усилие прижима фланца уменьшается с уменьшением отношения $\frac{uv}{ab}$, что,

согласно принципу Сен-Венана соответствует физической стороне потери устойчивости – с увеличением размеров фланца его устойчивость к образованию складок уменьшается и требуется применять прижим большей силы. Выражение включает слагаемые, содержащие цилиндрические жесткости пластины в двух направлениях и характеризующие различие механических свойств металла по данным осям. Усилие прижима будет зависеть от анизотропии свойств в большей степени по толщине пластины, чем в направлении ее размеров в плане, и возрастать с увеличением данного показателя механических свойств, который можно выбирать, например, по результатам работы [6].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П. *Пластинки и оболочки* / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
2. Ильюшин А.А. *Пластичность* / А.А. Ильюшин. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. – 378 с.
3. Чуватов В. В. *Расчет пластинок на прочность и устойчивость методом сеток* / В.В. Чуватов. – Свердловск: УПИ, 1972. – 107 с.
4. Головлев В.Д. *Расчеты процессов листовой штамповки (Устойчивость формообразования тонколистового металла)* / В.Д. Головлев. – М.: Машиностроение, 1974. – 136 с.
5. Шофман Л. А. *Элементы теории холодной штамповки* / Л. А. Шофман. – М.: Оборонгиз, 1952. – 335 с.
6. Гайкова Т.В. *Построение регрессионной модели для определения предела прочности слоистого металла в зависимости от режимов термообработки* / Т.В. Гайкова, Р.Г. Пузырь, А.А. Черныш // *Обработка материалов давлением : сборник научных трудов*. – Краматорск: ДГМА, 2014. – № 1 (38). – С. 16–19.

REFERENCES

1. Timoshenko S.P. *Plastinki i obolochki* / S.P. Timoshenko, S. Vojnovskij-Kriger. – M.: Nauka, 1966. – 636 s.
2. Il'yushin A.A. *Plastichnost'* / A.A. Il'yushin. – M.: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tehniko-teoreticheskoy literatury, 1949. – 378 s.
3. Chuvatov V. V. *Raschet platinok na prochnost' i ustojchivost' metodom setok* / V.V. Chuvatov. – Sverdlovsk: UPI, 1972. – 107 s.
4. Golovlev V.D. *Raschety processov listovoj shtampovki (Ustojchivost' formoobrazovaniya tonkolistovogo metalla)* / V.D. Golovlev. – M.: Mashinostroenie, 1974. – 136 s.
5. Shofman L. A. *Jelementy teorii holodnoj shtampovki* / L. A. Shofman. – M.: Oborongiz, 1952. – 335 s.
6. Gajkova T.V. *Postroenie regressionnoj modeli dlja opredelenija predela prochnosti sloistogo me-talla v zavisimosti ot rezhimov termoobrabotki* / T.V. Gajkova, R.G. Puzyr', A.A. Chernysh // *Obrabotka mate-rialov davleniem : sbornik nauchnyh trudov*. – Kramatorsk: DGMA, 2014. – № 1 (38). – S. 16–19.

Гайкова Т. В. – канд. техн. наук КрНУ

КрНУ – Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского, г. Кременчуг.

E-mail: tanyahaikova@mail.ru

Статья поступила в редакцию 30.09.2016 г.