УДК 531.01

Алюшин Ю. А.

МЕХАНИЗМЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В УПРУГИХ ТЕЛАХ

Колебания играют значительную роль в природе и различных сферах деятельности человека. Они должны учитываться при расчете, изготовлении и эксплуатации строительных конструкций, транспортных систем, в машиностроении [1–3]. Технологические операции обработки давлением, как правило, связаны с затратами значительной энергии, сопровождаются возникновением больших усилий, которые могут приводить к колебаниям как инструмента, так и нагруженных элементов оборудования, в особенности с учетом стремления к повышению производительности за счет увеличения скоростей. Понимание механизма возникновения и развития собственных колебаний должно способствовать принятию правильных решений при проектировании инструмента и оборудования для предупреждения больших колебаний и, тем более, резонансных явлений.

Собственными называют колебания под действием внутренних сил при выводе системы из положения равновесия. Происходят они за счет первоначально сообщенной энергии из внешних источников без дополнительных воздействий в процессе их развития. Исследованию колебаний посвящено большое количество работ [4–6], рассмотрено многообразие их форм и причин возникновения, результаты имеют большое значение, в том числе в технических приложениях. За основу анализа принимают законы либо динамики, либо сохранения энергии, анализ обычно ограничивают формой и периодом колебаний.

Цели работы: провести анализ особенностей механизма собственных колебаний в упругих телах на основе энергетической модели механики [7–8].

Энергетическая модель предусматривает описание движения материальных частиц в форме Лагранжа:

$$x_i = x_i(\alpha_p, t), \tag{1}$$

где t – время, $x_i \in (x, y, z)$ – текущие координаты (Эйлера);

$\alpha_p \in (\alpha, \beta, \gamma)$ – переменные Лагранжа, однозначно связанные с начальными координатами частиц. Они являются аргументами всех используемых в дальнейшем уравнений.

Для упругих тел энергия, как обобщенный скаляр различных видов движения, должна зависеть от инвариантов уравнений (1), включая модуль вектора скорости, а также 3 инварианта несимметричного тензора второго ранга:

$$x_{i,p} = \begin{pmatrix} x_\alpha & x_\beta & x_\gamma \\ y_\alpha & y_\beta & y_\gamma \\ z_\alpha & z_\beta & z_\gamma \end{pmatrix}, \tag{2}$$

компонентами которого являются частные производные $x_{i,p} \equiv \partial x_i / \partial \alpha_p$ от переменных Эйлера $x_i \in (x, y, z)$ по переменным Лагранжа $\alpha_p \in (\alpha, \beta, \gamma)$. Упругую деформацию частицы [9] определяет квадратичный инвариант тензора (2), равный сумме квадратов всех его элементов:

$$\Gamma_e^2 = x_\alpha^2 + y_\alpha^2 + z_\alpha^2 + x_\beta^2 + y_\beta^2 + z_\beta^2 + x_\gamma^2 + y_\gamma^2 + z_\gamma^2 . \tag{3}$$

Правую часть можно записать через квадраты отношений длин ребер до δl_0 и после δl деформации, первоначально ориентированных в направлении соответствующих осей:

$$l_p^2 = (\delta l / \delta l_0)_p^2 = x_p^2 + y_p^2 + z_p^2, \qquad p \in (\alpha, \beta, \gamma),$$

тогда:

$$\Gamma_e^2 = l_\alpha^2 + l_\beta^2 + l_\gamma^2 .$$

В исходном состоянии $\Gamma_e^2 = 3$, приобретенную за счет деформации энергию δE_{def} в объеме δV_0 можно представить в виде суммы двух инвариантных слагаемых [8–9]:

$$\delta E_{def} = \kappa\delta V_0(\Gamma_e^2 - 3) = \kappa\delta V_0[3(e^2 - 1) + e_s] = \delta E_e + \delta E_s = \kappa\delta V_0(e_e + e_s), \qquad (4)$$

где κ – модуль упругости, $e = (l_\alpha + l_\beta + l_\gamma)/3$ – среднее значение отношений длин ребер бесконечно малого параллелепипеда до и после деформации.

В дальнейшем обозначения δE_i соответствуют энергии частицы с объемом δV_0, $e_i = \delta E_i / (\kappa\delta V_0)$ – безразмерные эквиваленты объемной плотности соответствующих видов энергии. В частности, $e_{def} = \Gamma_e^2 - 3$ – безразмерный кинематический параметр объемной плотности энергии, приобретенной ($e_{def} > 0$) или отданной ($e_{def} < 0$) частицей при ее деформации, может быть представлен через другие безразмерные инварианты $e_{def} = e_e + e_s$. Параметр $e_e = 3(e^2 - 1)$ соответствует части объемной плотности энергии деформации, ассоциируемой с усредненной длиной сторон бесконечно малой частицы, он может быть как положительным, так и отрицательным. Второе слагаемое e_s всегда положительно и совпадает с среднеквадратическим отклонением длин ребер параллелепипеда, первоначально ориентированного по осям координат наблюдателя, от их среднего значения e:

$$e_s = (l_\alpha - e)^2 + (l_\beta - e)^2 + (l_\gamma - e)^2 . \qquad (5)$$

Отношение объемов после δV и до деформации δV_0 определяет кубический инвариант:

$$R = \delta V / \delta V_0 = \left| x_{i,p} \right| . \qquad (6)$$

Из закона сохранения энергии и инвариантности ее по отношению к выбору системы отсчета скоростей [7–9] движение материальных частиц описывает дифференциальное уравнение:

$$x_t\left(\partial\tau_{px}/\partial\alpha_p - \rho_0 x_{tt}\right) + y_t\left(\partial\tau_{py}/\partial\alpha_p - \rho_0 y_{tt}\right) + z_t\left(\partial\tau_{pz}/\partial\alpha_p - \rho_0 z_{tt}\right) = 0,$$

где $x_{i,t}$, $x_{i,tt}$ – компоненты скорости и ускорения в направлениях осей x_i;

ρ_0 – плотность материала в исходном состоянии;

τ_{pi} – поверхностная плотность сил на гранях бесконечно малого параллелепипеда, нормаль к которым в исходном состоянии указывает первый нижний индекс, а направление напряжения – второй. По существу, это напряжения Кирхгофа для пространства переменных Лагранжа [9]. Если приравнять нулю каждую скобку, получим аналоги дифференциальных уравнений движения классической механики деформируемого твердого тела [1, 3].

В работе [10] показано, что, не вступая в противоречие с классической механикой твердого тела, для достоверного описания процессов деформации в упругой области достаточно одного модуля упругости $\boldsymbol{\kappa}$ и условия пропорциональности:

$$\tau_{pi} = 2\boldsymbol{\kappa}\, x_{i,p}.$$

Тогда вместо предыдущего уравнения получаем:

$$x_t\left(\partial x_p/\partial\alpha_p - \mu^2 x_{tt}\right) + y_t\left(\partial y_p/\partial\alpha_p - \mu^2 y_{tt}\right) + z_t\left(\partial z_p/\partial\alpha_p - \mu^2 z_{tt}\right) = 0, \qquad (7)$$

где $\mu^2 = \rho_0 / (2\kappa)$, динамические уравнения преобразуются в уравнения Пуассона для каждой из функций (1):

$$\partial^2 x_i / \partial \alpha_p^2 = \mu^2 \partial^2 x_i / \partial t^2 . \tag{8}$$

Применение системы (8) вместо уравнения (7) может привести к потере части возможных решений.

Для анализа продольных колебаний рассмотрим призматический стержень, концы которого закреплены в неподвижных массивах, не обменивающихся энергией с колеблющейся системой. Стержень подвергается внешнему воздействию с появлением деформаций, энергетически эквивалентных работе, произведенной внешними силами. В некоторый момент, который принимается за начало отсчета времени, внешнее воздействие прекращается, система стремится вернуться в исходное состояние, начинаются колебания с переходом упругой энергии в кинетическую и наоборот.

Совместим ось x с осью стержня, начало координат – с левым неподвижным торцом. Пренебрегая поперечными деформациями, систему (1) запишем в виде:

$$x(\alpha, t) = \alpha + u(\alpha, t) , \qquad y = \beta , \qquad z = \gamma , \tag{9}$$

сечения остаются плоскими, перемещения $u = x - \alpha$ происходят только вдоль оси стержня. Вместо (7) получим уравнение с одной неизвестной функцией:

$$\partial^2 x / \partial \alpha^2 = (\rho_0 / 2\kappa) x_{tt} = \mu^2 x_{tt} ,$$

которое с учетом производных:

$$x_\alpha(\alpha, t) = 1 + u_\alpha(\alpha, t) , \quad x_{\alpha\alpha}(\alpha, t) = u_{\alpha\alpha}(\alpha, t) , \quad x_t(\alpha, t) = u_t(\alpha, t) , \quad x_{tt}(\alpha, t) = u_{tt}(\alpha, t) ,$$

преобразуется к виду:

$$u_{\alpha\alpha} = \mu^2 u_{tt} \qquad \text{или} \qquad u_{tt} = (1/\mu^2) u_{\alpha\alpha} = \lambda^2 u_{\alpha\alpha} , \tag{10}$$

где:

$$\lambda^2 = 1/\mu^2 = 2\kappa / \rho_0 . \tag{11}$$

По форме уравнение (10) совпадает с используемыми в работах [1–5], но аргументами являются переменные Лагранжа. Принимая решение Даламбера [3], получаем:

$$u(\alpha,t) = \frac{p}{2}\left[\sin\left(\pi\frac{\alpha-\lambda t}{L}\right) + \sin\left(\pi\frac{\alpha+\lambda t}{L}\right)\right] = p\sin\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\cos\left(\frac{-\pi\lambda t}{L}\right)$$

и система (9) принимает вид:

$$x(\alpha,t) = \alpha + p\sin\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\cos\left(\frac{-\pi\lambda t}{L}\right), \qquad y = \beta , \qquad z = \gamma . \tag{12}$$

Решение (12) согласовано с начальными:

$$x(\alpha, t=0) = \alpha + p\sin(\pi\alpha/L), \qquad u_t(\alpha, t=0) = 0 \tag{13}$$

и граничными условия на торцах рассматриваемого стержня $u(\alpha = 0, t) = 0$ и $u(\alpha = L, t) = 0$.

Принимая во внимание:

$$x_\alpha = 1 + \frac{\pi p}{L}\cos\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\cos\left(\frac{-\pi\lambda t}{L}\right) = \frac{\delta V}{\delta V_0} , \tag{14}$$

для удельной энергии деформации (4) получаем:

$$\delta E_{def} = \kappa\left[2\frac{\pi p}{L}\cos\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\cos\left(-\pi\frac{\lambda t}{L}\right)+\left(\frac{\pi p}{L}\right)^2\cos^2\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\cos^2\left(-\pi\frac{\lambda t}{L}\right)\right]\delta V_0 . \quad (15)$$

Энергию деформации в объеме стержня V_0 с площадью поперечного сечения S_0 получим в результате интегрирования:

$$E_{def} = \kappa S_0\int_0^L(\Gamma_e^2-3)\delta\alpha = \kappa S_0\frac{\pi^2p^2}{2L}\cos^2\left(-\pi\frac{\lambda t}{L}\right) = \frac{1}{2}\kappa V_0\frac{\pi^2p^2}{L^2}\cos^2\left(-\pi\frac{\lambda t}{L}\right). \quad (16)$$

Кинетическая энергия частиц в произвольном сечении с учетом (11):

$$\delta E_{kin} = \frac{1}{2}\rho_0 x_t^2\delta V_0 = \kappa\delta V_0\left(\frac{\pi p}{L}\right)^2\sin^2\left(\frac{\pi\alpha}{L}\right)\sin^2\left(-\frac{\pi\lambda t}{L}\right) \quad (17)$$

для всего объема стержня составит:

$$E_{kin} = \frac{L}{4}S_0\rho_0\frac{\pi^2p^2\lambda^2}{L^2}\sin^2\left(-\frac{\pi\lambda t}{L}\right) = V_0\kappa\frac{\pi^2p^2}{2L^2}\sin^2\left(-\frac{\pi\lambda t}{L}\right). \quad (18)$$

Суммарная энергия:

$$E_{sum} = E_{def}+E_{kin} = V_0\kappa\frac{\pi^2p^2}{2L^2}\left[\cos^2\left(-\pi\frac{\lambda t}{L}\right)+\sin^2\left(-\pi\frac{\lambda t}{L}\right)\right] = V_0\kappa\frac{\pi^2p^2}{2L^2}$$

не зависит от времени и совпадает с переданной системе (16) при $t = 0$.

Как отмечено выше, энергию упругой деформации (4) можно представить через компоненты тензора (2) в виде суммы составляющих, которые можно ассоциировать с изменением длин ребер частицы. Для продольных колебаний при:

$$e = (l_\alpha + l_\beta + l_\gamma)/3 = 1+\frac{\pi p}{3L}\cos\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\cos\left(\frac{-\pi\lambda t}{L}\right),$$

$$e_e = 3(e^2-1) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi p}{L}\right)^2\cos^2\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\cos^2\left(\frac{-\pi\lambda t}{L}\right)+\frac{2\pi p}{L}\cos\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\cos\left(\frac{-\pi\lambda t}{L}\right) = e_{e1}+e_{e2},$$

$$e_s = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi p}{L}\right)^2\cos^2\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\cos^2\left(\frac{-\pi\lambda t}{L}\right) \quad (19)$$

удельная энергия e_e за счет второго слагаемого e_{e2} может менять знак, каждая частица в процессе колебаний претерпевает увеличение и уменьшение объема. Частицы с начальной координатой $\alpha = L/2$ в процессе колебаний не деформируются. Наибольшие значения энергия деформации e_{def} приобретает на торцах стержня. Интегральные по объему значения:

$$E_e = \kappa\int_{V_0}e_e\delta V_0 = \kappa V_0\frac{\pi^2p^2}{6L^2}\cos^2\left(\frac{-\pi\lambda t}{L}\right), \qquad E_s = \kappa V_0\frac{\pi^2p^2}{3L^2}\cos^2\left(\frac{-\pi\lambda t}{L}\right)$$

изменяются во времени по единому закону, энергия E_s всегда в 2 раза больше E_e. Суммарную энергию деформации определяет уравнение (16). Частота ν и период T колебаний:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\lambda}{2L} = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{\kappa}{2\rho_0}}, \qquad T = \frac{2L}{\lambda} = 2\mu L = L\sqrt{\frac{2\rho_0}{\kappa}} \quad (20)$$

не отличаются от приведенных в других работах [1–5].

Для поперечных колебаний предположим, что координаты частиц по осям x и z не изменяются, а перемещения по оси y зависят от α и t:

$$x(\alpha_p, t) = \alpha, \qquad y(\alpha_p, t) = \beta + v(\alpha, t), \qquad z(\alpha_p, t) = \gamma . \quad (21)$$

Как и в предыдущем случае, уравнение (7) преобразуется к виду (8) с одной неизвестной функцией для координаты y или вертикального перемещения $v(\alpha, t)$:

$$v_{tt}(\alpha, t) = \lambda^2 v_{\alpha\alpha} . \tag{22}$$

Этому уравнению, а также начальным и граничным условиям для скоростей и перемещений:

$$v(\alpha,\mathrm{t}=0)=q\sin(\pi\alpha/L),\quad v_t(\alpha,\mathrm{t}=0)=0,\quad v(\alpha=0,\mathrm{t})=0,\quad v(\alpha=L,\mathrm{t})=0$$

удовлетворяет функция:

$$v(\alpha,t)=\frac{q}{2}\left[\sin\left(\pi\frac{\alpha-\lambda t}{L}\right)+\sin\left(\pi\frac{\alpha+\lambda t}{L}\right)\right]=q\sin\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\cos\left(\frac{-\pi\lambda t}{L}\right).$$

Система (21) принимает вид:

$$x(\alpha_p, t) = \alpha , \qquad y(\alpha,t)=\beta+q\sin\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\cos\left(\frac{-\pi\lambda t}{L}\right), \qquad z(\alpha_p, t) = \gamma \tag{23}$$

с производными:

$$y_{\alpha\alpha}(\alpha,t)=-q\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\sin\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\cos\left(\frac{-\pi\lambda t}{L}\right), \qquad y_{tt}(\alpha,t)=-\frac{\pi^2 q\lambda^2}{L^2}\sin\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\cos\left(-\frac{\pi\lambda t}{L}\right),$$

где q – максимальное смещение вдоль оси y в сечении $\alpha = L/2$. Скорости частиц:

$$v_t(\alpha,t)=\frac{\pi q\lambda}{L}\sin\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\sin\left(-\frac{\pi\lambda t}{L}\right) \tag{24}$$

на концах стержня равны 0, в начальный момент они отсутствуют по всей его длине. Деформация, в отличие от продольных колебаний, осуществляется за счет сдвигов y_α в поперечных сечениях:

$$y_\alpha = q\frac{\pi}{L}\cos\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\cos\left(-\pi\frac{\lambda t}{L}\right). \tag{25}$$

При квадратичном инварианте тензора (2) для поперечных колебаний:

$$\Gamma_e^2-3=e_{def}=y_\alpha^2(\alpha,t)=(\pi q/L)^2\cos^2(\pi\alpha/L)\cos^2(-\pi\lambda t/L)$$

и локальной энергии деформации частиц (4):

$$\delta E_{def}=\kappa(\Gamma_e^2-3)\delta V_0=\kappa\delta V_0(\pi q/L)^2\cos^2(\pi\alpha/L)\cos^2(-\pi\lambda t/L) \tag{26}$$

энергия на деформацию стержня составляет:

$$E_{def}=(1/2)\kappa V_0(\pi q/L)^2\cos^2(-\pi\lambda t/L). \tag{27}$$

Для кинетической энергии с учетом (11) и скорости (24):

$$\delta E_{kin}=\frac{1}{2}\rho_0 v_t^2\delta V_0=\frac{1}{2}\delta V_0\rho_0\left[\frac{\pi q\lambda}{L}\sin\left(\frac{\pi\alpha}{L}\right)\sin\left(-\frac{\pi\lambda t}{L}\right)\right]^2 \tag{28}$$

после интегрирования по объему получаем:

$$E_{kin}=\frac{L}{4}S_0\rho_0\frac{\pi^2q^2\lambda^2}{L^2}\sin^2\left(\frac{\pi\lambda t}{L}\right)=V_0\kappa\frac{\pi^2q^2}{2L^2}\sin^2\left(\frac{\pi\lambda t}{L}\right).$$

Суммарная кинетическая энергия и энергия деформации в объеме колеблющегося стержня:

$$E_{sum}=E_{def}+E_{kin}=S_0\kappa\frac{\pi^2q^2}{2L}\left[\cos^2\left(-\pi\frac{\lambda t}{L}\right)+\sin^2\left(\pi\frac{\lambda t}{L}\right)\right]=\frac{1}{2}V_0\kappa\left(\frac{\pi q}{L}\right)^2, \quad (29)$$

как и в случае продольных колебаний, совпадает с переданной в систему за счет внешнего воздействия в момент $t = 0$ и не изменяется во времени, что свидетельствует о соблюдении закона сохранения энергии при отсутствии диссипативных процессов. Результат отличается от уравнения (18) для продольных колебаний лишь заменой направления смещения q вместо p, что отличает внешние воздействия в этих видах колебаний.

Локальная энергия бесконечно малых частиц с объёмом δV_0 изменяется в соответствии с волновыми уравнениями (26) и (28), объем частиц сохраняется постоянным:

$$R=\delta V/\delta V_0=1. \quad (30)$$

Принимая во внимание квадраты отношений длин ребер бесконечно малого параллелепипеда, ориентированного в исходном состоянии по осям координат:

$$l_\alpha^2=x_\alpha^2+y_\alpha^2+z_\alpha^2=1+y_\alpha^2, \qquad l_\beta^2=1, \qquad l_\gamma^2=1,$$

для инвариантов, определяющих локальные характеристики энергии, получаем:

$$e_e=e_{e1}+e_{e2}=+\frac{1}{3}\left(\frac{\pi q}{L}\right)^2\cos^2\left(\frac{\pi\alpha}{L}\right)\cos^2\left(-\frac{\pi\lambda t}{L}\right)+\frac{4}{3}\left\{\left[1+\left(\frac{\pi q}{L}\right)^2\cos^2\left(\frac{\pi\alpha}{L}\right)\cos^2\left(-\frac{\pi\lambda t}{L}\right)\right]^{1/2}-1\right\},$$

$$e_s=e_{s1}+e_{s2}=\frac{2}{3}\left(\frac{\pi q}{L}\right)^2\cos^2\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\cos^2\left(\frac{-\pi\lambda t}{L}\right)-\frac{4}{3}\left\{\left[1+\left(\frac{\pi q}{L}\right)^2\cos^2\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\cos^2\left(\frac{-\pi\lambda t}{L}\right)\right]^{1/2}-1\right\},$$

$$\Gamma_e^2-3=e_{def}=e_e+e_s=\left(\frac{\pi q}{L}\right)^2\cos^2\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\cos^2\left(-\pi\frac{\lambda t}{L}\right). \quad (31)$$

Интегралы по объему типа $\int\sqrt{a^2+b^2\cos^2 x}\,dx$ не выражаются через элементарные функции [12], но они не влияют как на локальные e_{def}, так и на интегральные E_{def} значения (27). Интересно отметить, что если ограничиться двумя членами разложения в ряд $\sqrt{1+x}=1+1/2x-1/8x^2+\ldots$, тогда:

$$e_e=e_{e1}+e_{e2}=\left(\frac{\pi q}{L}\right)^2\cos^2\left(\frac{\pi\alpha}{L}\right)\cos^2\left(-\frac{\pi\lambda t}{L}\right),$$

$$e_s=e_{s1}+e_{s2}=\frac{2}{3}\left(\frac{\pi q}{L}\right)^2\cos^2\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\cos^2\left(\frac{-\pi\lambda t}{L}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{\pi q}{L}\right)^2\cos^2\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\cos^2\left(\frac{-\pi\lambda t}{L}\right)=0$$

и результат (31) для e_{def} в любом случае остается неизменным. Формулы для периода и частоты колебаний совпадают с уравнениями (20) для продольных колебаний.

При крутильных колебаниях, в отличие от продольных и поперечных, возникают окружные и радиальные перемещения частиц. В связи с этим, даже при условии плоской деформации, в декартовой системе координат необходимо рассматривать два уравнения:

$$x=\alpha, \qquad y=y(\beta,\gamma,t), \qquad z=z(\beta,\gamma,t). \quad (32)$$

Уравнение (7) будет иметь 2 слагаемых для функций $y(\beta,\gamma,t)$ и $z(\beta,\gamma,t)$. Чтобы упростить решение, по аналогии с предыдущими видами колебаний, воспользуемся системой двух дифференциальных уравнений (8) для искомых функций:

$$y_{\alpha\alpha}+y_{\beta\beta}+y_{\gamma\gamma}=\mu^2 y_{tt}\,, \qquad z_{\alpha\alpha}+z_{\beta\beta}+z_{\gamma\gamma}=\mu^2 z_{tt}\,. \tag{33}$$

Представим уравнения для координат y и z в виде [9]:

$$x=\alpha\,, \qquad y=\eta(\beta\cos\Delta\psi-\gamma\sin\Delta\psi)\,, \qquad z=\eta(\beta\sin\Delta\psi+\gamma\cos\Delta\psi)\,, \tag{34}$$

где $\eta=r/\rho$, $r^2=y^2+z^2$, $\rho^2=\beta^2+\gamma^2$ – отношение радиусов частицы в процессе колебаний к их исходному значению. Безразмерный радиус η зависит от положения частицы, угла поворота сечения, а также, возможно, от угловых скорости и ускорения вращения сечения. Деформация осуществляется за счет сдвигов и изменения объема:

$$R=\delta V/\delta V_0=\eta^2\,.$$

Если ограничиться предположением:

$$\eta=\eta(\psi)\,, \qquad \eta_\alpha=\eta_\psi\psi_\alpha\,, \qquad \eta_t=\eta_\psi\psi_t\,, \tag{35}$$

уравнения (33) принимают вид:

$$y[(\ln\eta)_\alpha^2-\psi_\alpha^2]-z[\psi_{\alpha\alpha}+2\psi_\alpha(\ln\eta)_\alpha]=\mu^2 y[(\ln\eta)_t^2-\psi_t^2]-\mu^2 z[\psi_{tt}+2\psi_t(\ln\eta)_t]\,,$$

$$z[(\ln\eta)_\alpha^2-\psi_\alpha^2]+y[\psi_{\alpha\alpha}+2\psi_\alpha(\ln\eta)_\alpha]=\mu^2 z[(\ln\eta)_t^2-\psi_t^2]+\mu^2 y[\psi_{tt}+2\psi_t(\ln\eta)_t]\,.$$

Возводя в квадрат и суммируя левые и правые части, получаем уравнение 4 степени для функций *$\psi(\alpha,t)$* и *$\eta(\psi)$*:

$$\left(\eta_\psi/\eta\right)^4\xi+2\left(\eta_\psi/\eta\right)^2\xi+4(\eta_\psi/\eta)\left(\psi_{\alpha\alpha}\psi_\alpha^2+\mu^4\psi_{tt}\psi_t^2\right)+\xi+\psi_{\alpha\alpha}^2-\mu^4\psi_{tt}^2=0\,, \tag{36}$$

где $\xi=\psi_\alpha^4-\mu^4\psi_t^4$. Если пренебречь изменением радиальной координаты и принять:

$$\eta=1=const, \tag{37}$$

уравнение (36) сводится к условию для *$\psi(\alpha,t)$*

$$\psi_\alpha^4+\psi_{\alpha\alpha}^2=\mu^4\psi_t^4+\mu^4\psi_{tt}^2\,. \tag{38}$$

Решение $\psi(\alpha,t)=C\sin(\alpha\pm qt)$ обращает уравнение (38) в тождество, но оно не согласуется с начальными и граничными условиями:

$$\psi(\alpha,\mathrm{t}=0)=\theta\sin(\pi\frac{\alpha}{L})\,,\ \psi(\alpha=L/2,\mathrm{t}=0)=\theta, \qquad \psi_t(\alpha,\mathrm{t}=0)=0,$$

$$\psi(\alpha=0,\mathrm{t})=0\,, \qquad \psi(\alpha=L,\mathrm{t})=0\,. \tag{39}$$

В дополнение к (37) можно принять $\psi_\alpha^4-\mu^4\psi_t^4=0$ и тогда для искомой функции $\psi=\psi(\alpha,t)$ получаем уравнение, подобное рассмотренным в предыдущих вариантах колебаний:

$$\psi_{\alpha\alpha}^2-\mu^4\psi_{tt}^2=0\,. \tag{40}$$

Предположение (37) позволяет использовать вместо уравнений (32) соотношения для абсолютно твердого тела:

$$x=\alpha\,, \qquad y=\beta\cos\Delta\psi-\gamma\sin\Delta\psi\,, \qquad z=\beta\sin\Delta\psi+\gamma\cos\Delta\psi\,, \tag{41}$$

с функцией *$\psi(\alpha,t)$* и производными:

$$\psi(\alpha,t)=\frac{\theta}{2}\left[\sin\left(\pi\frac{\alpha-\lambda t}{L}\right)+\sin\left(\pi\frac{\alpha+\lambda t}{L}\right)\right]=\theta\sin\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\cos\left(\frac{-\pi\lambda t}{L}\right), \tag{42}$$

$$\psi_\alpha(\alpha,t)=\theta\frac{\pi}{L}\cos\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\cos\left(\frac{-\pi\lambda t}{L}\right), \qquad \psi_t(\alpha,t)=\theta\frac{\pi\lambda}{L}\sin\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\sin\left(\frac{-\pi\lambda t}{L}\right),$$

$$\psi_{\alpha\alpha}(\alpha,t)=-\theta\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\sin\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\cos\left(-\frac{\pi\lambda t}{L}\right), \quad \psi_{tt}(\alpha,t)=-\theta\left(\frac{\pi\lambda}{L}\right)^2\sin\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\cos\left(-\frac{\pi\lambda t}{L}\right),$$

где θ – угол поворота сечения с координатой $\alpha = L/2$ при $t = 0$. При этом граничные и начальные условия (39), а также (33) выполняются.

Особо отметим, что полученное решение удовлетворяет не только системе (8), но и более общему уравнению (7), причем в последнем случае, с учетом (41) и (42), должно быть выполнено только условие (40) в упрощенном виде:

$$\psi_{\alpha\alpha}-\mu^2\psi_{tt}=0\ .$$

Это можно рассматривать как дополнительный аргумент о приемлемости полученного решения для анализа энергетических особенностей свободных крутильных колебаний.

Принимая во внимание выражения для тензора (2):

$$x_{i,p}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\psi_\alpha z & \cos\Delta\psi & -\sin\Delta\psi\\ \psi_\alpha y & \sin\Delta\psi & \cos\Delta\psi\end{pmatrix},$$

находим значение квадратичного инварианта, удельной энергии упругой деформации и кинетической энергии частиц:

$$\Gamma_e^2=l_\alpha^2+l_\beta^2+l_\gamma^2=3+y_\alpha^2+z_\alpha^2=3+\psi_\alpha^2 r^2\ ,$$

$$\delta E_{def}=\kappa\delta V_0\psi_\alpha^2 r^2=\kappa\delta V_0\pi^2\theta^2\left(\frac{r}{L}\right)^2\cos^2\left(\frac{\pi\alpha}{L}\right)\cos^2\left(-\frac{\pi\lambda t}{L}\right),$$

$$\delta E_{kin}=\kappa\mu^2\delta V_0\psi_t^2 r^2=\kappa\delta V_0\theta^2\pi^2\left(\frac{r}{L}\right)^2\sin^2\left(\frac{\pi\alpha}{L}\right)\sin^2\left(-\frac{\pi\lambda t}{L}\right),$$

которые зависят от радиуса частиц. Интегральные по объёму значения энергий:

$$E_{def}=\kappa V_0\pi^2\theta^2\frac{R^2}{4L^2}\cos^2\left(-\frac{\pi\lambda t}{L}\right), \qquad E_{kin}=\kappa V_0\theta^2\pi^2\frac{R^2}{4L^2}\sin^2\left(-\frac{\pi\lambda t}{L}\right)$$

в сумме соответствуют закону сохранения энергии в объеме колеблющегося стержня и совпадают с работой внешних сил, переданной телу к моменту начала колебаний:

$$E_{sum}=E_{def}+E_{kin}=\kappa V_0\theta^2\pi^2(R^2/4L^2)\ . \tag{43}$$

В соответствии с уравнениями (41), как и в случае поперечных колебаний, упругая деформация осуществляется за счет сдвигов, объём материальных частиц и плотность материала, остаются неизменными, независимо от величины угла поворота ψ. Локальные характеристики для расчета составляющих энергии e_v и e_f близки к рассмотренным выше для поперечных колебаний:

$$l_\alpha^2=1+y_\alpha^2+z_\alpha^2=1+\psi_\alpha^2 r^2\ , \qquad l_\beta=l_\gamma=1, \qquad e=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{1+\psi_\alpha^2 r^2}\ ,$$

$$3e^2=\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\sqrt{1+\psi_\alpha^2 r^2}+\frac{1}{3}\psi_\alpha^2 r^2\ , \qquad \Gamma_e^2=3+y_\alpha^2+z_\alpha^2=3+\psi_\alpha^2 r^2\ ,$$

$$e_e=3(e^2-1)=\frac{1}{3}\psi_\alpha^2 r^2+\frac{4}{3}\left(\sqrt{1+\psi_\alpha^2 r^2}-1\right)=e_{e1}+e_{e2}\ , \tag{44}$$

$$e_s = \frac{2}{3}\psi_\alpha^2 r^2 + \frac{4}{3}\left(1 - \sqrt{1 + \psi_\alpha^2 r^2}\right) = e_{s1} + e_{s2},$$

$$e_{def} = e_e + e_s = \psi_\alpha^2 r^2 = \theta^2 \pi^2 \left(\frac{r}{L}\right)^2 \cos^2\left(\pi \frac{\alpha}{L}\right) \cos^2\left(-\pi \frac{\lambda t}{L}\right).$$

Интегралы по объему для слагаемых с квадратными корнями, как и в случае поперечных колебаний, не влияют на локальные и интегральные значения энергии упругой деформации. Период и частоту колебаний определяют уравнения (20), как и для других видов рассмотренных свободных колебаний.

Приведенные выше соотношения отображают особенности энергетических состояний колеблющихся упругих тел, а также возможные механизмы преобразования энергии частиц, в том числе с учетом их исходного состояния. Как при колебаниях материальных точек или абсолютно твердых тел [13–14], E_{kin} и E_{def} изменяются с удвоенной частотой по сравнению с колебаниями тела по уравнениям (20), переход интегральной по объему упругой энергии E_{def} в кинетическую E_{kin} и обратно происходит в 2 раза чаще, чем сами колебания. Суммарные значения $E_{sum} = E_{def} + E_{kin}$ остаются постоянными. На период и частоту собственных колебаний упругого тела для одномерных колебаний не влияет амплитуда и переданная из внешнего источника энергия. За счет диссипативных процессов энергия в системе и амплитуда уменьшаются, колебания затухают, но собственная частота остается прежней.

Особый интерес представляют изменения локальных кинематических эквивалентов энергии. Структура инвариантов (19), (31) и (44) предусматривает возможность выделения для каждой частицы упругого тела дополнительных видов энергии e_{e1} и e_{s1}, которые влияют на интегральные значения энергии E_{def}, а также e_{e2} и e_{s2}, которые не влияют на E_{def}.

В классической механике деформируемого твердого тела принято различать составляющие энергии деформации, связанные с изменением объема и формы частиц [3, 5]. Исходя из структуры формулы для общей упругой энергии деформации (4), эти термины следует связывать с составляющими e_e и e_s. Но при отсутствии фактического изменения объема для поперечных и крутильных колебаний составляющие энергии e_e не равны 0 и соизмеримы с e_s. Поэтому упомянутые термины в данной работе не использованы. Из приведенных уравнений следует, что часть энергии частиц идет на взаимодействие с окружающими, изменяя упругую и кинетическую энергию механической системы. Другая часть может допускать изменение внутри самой частицы, например, переход энергии из e_e в энергию e_s без изменения интегральной по объему E_{def}. К ним, в частности, относятся вторые слагаемые e_{e2} и e_{s2} для поперечных и крутильных колебаний.

Во всех трех видах колебаний предполагалось, что внешнее воздействие передается через центральное сечение и во всех трех случаях частицы в этих сечениях не меняют форму и объем, изменяется только их кинетическая энергия. Это объясняется асимметрией деформированного состояния. Наибольшие значения ($e_{s1} > e_{e1}$) наблюдаются в опорных сечениях на контакте с недеформируемыми плитами, где кинетическая энергия отсутствует.

Изменение объема частиц в соответствии с уравнением (6) отмечено только при продольных колебаниях, когда частота изменения e_{e2} совпадает с частотой собственных колебаний стержня, а частота e_{e1}, e_s, e_{kin}, E_{def} и E_{kin} в 2 раза больше. Как следует из уравнений (14) и (19), безразмерный кинематический параметр e_{e2} определяет удвоенное относительное изменение объема частицы:

$$e_{e2} = \frac{2\pi p}{L}\cos\left(\pi\frac{\alpha}{L}\right)\cos\left(\frac{-\pi\lambda t}{L}\right) = 2\left(\frac{\delta V}{\delta V_0} - 1\right) = 2\left(\frac{\delta V - \delta V_0}{\delta V_0}\right) = 2\left(\frac{\Delta\delta V}{\delta V_0}\right).$$

После умножения на модуль упругости, в соответствии с законом упругого изменения объема [2–3], должны получить среднее напряжение. Но для случая продольных колебаний уравнение (14) определяет часть объемной плотности энергии деформации, связанной с изменением объема. Парадокс может быть устранен, если рассматривать среднее напряжение как объемную плотность энергии, как это предусмотрено в энергетической модели механики [7–8]. Причем выбор шкалы среднего напряжения допускает 2 варианта [11]: считать в исходном состоянии $\sigma_0 = 0$ или $\sigma_0 = 2к$. Именно второе предположение является основанием для дифференциальных уравнений (7) и (8).

Важно отметить, что связанная с e_{e2} энергия не влияет на интегральное по объему значение E_{def}. Иначе говоря, изменение объема частиц при продольных колебаниях не требует работы внешних сил и происходит за счет внутренних ресурсов. Представление энергии деформации (4) в виде двух инвариантных слагаемых e_e и e_s допускает возможность перехода части энергии из e_e в e_s и наоборот без изменения энергии деформации δE_{def}. Использования внутренних источников для изменения объема или формы частиц системы без дополнительной энергии внешних сил является основой резонанса.

Для поперечных и крутильных колебаний величины e_{e2} и e_{s2} равны между собой, поэтому они не влияют как на локальные δE_{def} (26) и (44), так и на интегральные значения E_{def} (28), которые, в свою очередь, зависят только от e_{e1} и e_{s1}, амплитуды колебания и размеров стержня. За счет малости отношения q/L или θ/L вторые слагаемые в подкоренных выражениях существенно меньше 1, безразмерные значения e_{e2} и e_{s2} не зависят от амплитуды колебаний и положения частицы в теле стержня, приближаясь к 0. Это отличает поперечные и крутильные колебания от продольных, когда не влияющая на интегральное значение энергии E_{def} составляющая e_{e2} на несколько порядков превышает e_{e1} и e_{def}.

Для пояснения смысла составляющих энергии e_{e2} и e_{s2} при поперечных и крутильных колебаниях, воспользуемся аналогией с колебанием маятника, поведение которого определяет закон сохранения энергии с изменением кинетической и потенциальной энергии. Не нарушая этого закона, шарик может вращаться относительно оси, совпадающей с направлением нити, и это вращение будет характеризовать соответствующая энергия, которая не входит в энергетический баланс колебания маятника, так как характеризует движение, не влияющее на энергию шарика в основном его колебании.

Иными словами, составляющие энергии e_{e2} и e_{s2} могут приводить к изменению геометрических параметров частиц без изменения их энергетического состояния ($e_{e2}+e_{s2} = 0$) по аналогии со свободными колебаниями упругих тел, когда, как показано выше, меняется геометрическая структура тела без изменения интегрального по объёму значения энергии.

ВЫВОДЫ

Рассмотрена энергетически изолированная система в виде упругого стержня, закрепленного между двумя абсолютно твердыми опорами. На основе энергетической модели механики получено распределение по объему и изменение во времени составляющих упругой и кинетической энергии для основных форм продольных, поперечных и крутильных колебаний. На основе анализа структуры кинематических инвариантов, ассоциируемых с энергией, получены уравнения для расчета 8 видов локальной энергии для участвующих в колебаниях частиц упругого тела.

Показано, что, по аналогии с собственными колебаниями упругих тел, когда изменение геометрической структуры происходит без притока энергии через внешние границы системы, возможны изменения в отдельных объемах за счет внутренних источников энергии. Высказано предположение, что влияющие на интегральные по объему части энергии обеспечивают выполнение закона сохранения, а не влияющие на E_{def} обеспечивают выполнение дифференциальных уравнений движения (7) или (8).

Полученные результаты, в том числе по периоду и частотам колебаний, выполнению закона сохранения для интегральных по объему значений кинетической и упругой энергии, в дополнение к известным решениям для абсолютно твердых и деформируемых тел [8–9], можно рассматривать как дополнительные аргументы правомерности применения энергетической модели для решения различных задач механики.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. – М. : Физматгиз, 1959. – 440 с.

2. Пановко Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова. – М. : Наука, 2007. – 352 с.

3. Ильин М. М. – Теория колебаний / М. М. Ильин, К. С. Колесников, Ю. С. Саратов. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – 272 с.

4. Смирнов М. М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка / М. М. Смирнов. – М. : Наука, 1964. – 206 с.

5. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. – М. : Высшая школа, 1980. – 408 с.

6. Вибрации в технике. Т. 1. Колебания линейных систем / под ред. В. В. Болотина. – М. : Машиностроение, 1978. – 352 с.

7. Алюшин Ю. А. Новая концепция в механике на основе понятий пространство, время и энергия / Ю. А. Алюшин // Физическая мезомеханика. – 2018. – 21 (3). – Стр. 59–69.

8. Алюшин Ю. А. Энергетические основы механики / Ю. А. Алюшин. – Lambert Academic Publishing, 2016. – 281 с.

9. Алюшин Ю. А. Механика твердого тела в переменных Лагранжа : учеб. пособ. для вузов / Ю. А. Алюшин. – М. : Машиностроение, 2012. – 192 с.

10. Алюшин Ю. А. Определяющие соотношения при лагранжевом описании обратимой и необратимой деформации / Ю. А. Алюшин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2007. – № 5. – С. 47–56.

11. Алюшин Ю. А. Энергетическая шкала средних напряжений и физические свойства металлов в области обратимых и необратимых деформаций / Ю. А. Алюшин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2010. – № 3. – С. 95–104.

12. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Физматгиз, 1962. – 1100 с.

13. Белл Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел / Дж. Ф. Белл. – М. : Наука, 1984. – 596 с.

14. Хайкин С. Э. Физические основы механики / С. Э. Хайкин. – М. : Физматгиз, 1963. – 772 с.

REFERENCES

1. Timoshenko S. P. Kolebanija v inzhenernom dele / S. P. Timoshenko. – M. : Fizmatgiz, 1959. – 440 s.

2. Panovko Ja. G. Ustojchivost' i kolebanija uprugih sistem. Sovremennye koncepcii, paradoksy i oshibki / Ja. G. Panovko, I. I. Gubanova. – M. : Nauka, 2007. – 352 s.

3. Il'in M. M. – Teorija kolebanij / M. M. Il'in, K. S. Kolesnikov, Ju. S. Saratov. – M. : Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, 2003. – 272 s.

4. Smirnov M. M. Differencial'nye uravnenija v chastnyh proizvodnyh vtorogo porjadka / M. M. Smirnov. – M. : Nauka, 1964. – 206 s.

5. Biderman V. L. Teorija mehanicheskih kolebanij / V. L. Biderman. – M. : Vysshaja shkola, 1980. – 408 s.

6. Vibracii v tehnike. T. 1. Kolebanija linejnyh sistem / pod red. V. V. Bolotina. – M. : Mashinostro-enie, 1978. – 352 s.

7. Aljushin Ju. A. Novaja koncepcija v mehanike na osnove ponjatij prostranstvo, vremja i jenergija / Ju. A. Aljushin // Fizicheskaja mezomehanika. – 2018. – 21 (3). – Str. 59–69.

8. Aljushin Ju. A. Jenergeticheskie osnovy mehaniki / Ju. A. Aljushin. – Lambert Academic Publishing, 2016. – 281 c.

9. Aljushin Ju. A. Mehanika tverdogo tela v peremennyh Lagranzha : ucheb. posob. dlja vuzov / Ju. A. Aljushin. – M. : Mashinostroenie, 2012. – 192 s.

10. Aljushin Ju. A. Opredeljajushhie sootnoshenija pri lagranzhevom opisanii obratimoj i neobratimoj deformacii / Ju. A. Aljushin // Problemy mashinostroenija i nadezhnosti mashin. – 2007. – № 5. – S. 47–56.

11. Aljushin Ju. A. Jenergeticheskaja shkala srednih naprjazhenij i fizicheskie svojstva metallov v ob-lasti obratimyh i neobratimyh deformacij / Ju. A. Aljushin // Problemy mashinostroenija i nadezhnosti mashin. – 2010. – № 3. – S. 95–104.

12. Gradshtejn I. S. Tablicy integralov, summ, rjadov i proizvedenij / I. S. Gradshtejn, I. M. Ryzhik. – M. : Fizmatgiz, 1962. – 1100 s.

13. Bell Dzh. F. Jeksperimental'nye osnovy mehaniki deformiruemyh tverdyh tel / Dzh. F. Bell. – M. : Nauka, 1984. – 596 s.

14. Hajkin S. Je. Fizicheskie osnovy mehaniki / S. Je. Hajkin. – M. : Fizmatgiz, 1963. – 772 s.

Алюшин Ю. А. – д-р техн. наук, проф. НИТУ «МИСиС».

НИТУ «МИСиС» – Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», г. Москва, РФ.

E-mail: alyushin7@gmail.com

Статья поступила в редакцию 25.02.2019 г.