

УДК 539.3

О.І. Гуляр, д-р техн. наук,
 С.О. Пискунов, д-р техн. наук,
 І.І. Солодей, канд. техн. наук,
 Ю.В. Максим'юк, канд. техн. наук

ЕФЕКТИВНІСТЬ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ (МССЕ) В ЗАДАЧАХ ЗГИНУ ТА З КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРУЖЕНЬ

Розглянуті вісесиметричний і плоский скінченні елементи загального вигляду та їх модифікації із визначенням механічних і геометричних параметрів в центрах СЕ на базі фізичних компонент тензорів напружень та деформацій у поєднанні з моментною схемою скінченного елемента. На основі чисельних досліджень показана їх ефективність порівняно із скінчено-елементною (СЕМ) базою SCAD при розрахунку масивних і тонкостінних тіл в задачах згину та при наявності концентраторів напружень.

Вступ. В монографії [2] на основі МССЕ були приведені розрахункові співвідношення при використанні гіпотези про постійність компонент метричного тензора в межах СЕ. Як було показано в роботі [1] використання цієї гіпотези суттєво погіршує збіжність результатів навіть при однорідному напружено-деформованому стані. В даній роботі отримані розв'язувальні співвідношення, які враховують змінність компонент метричного тензора в його площині і проведені дослідження їх ефективності.

1. Вісесиметричний та плоский скінченні елементи загального вигляду. Для вісесиметричних та плоско-деформованих тіл на основі МСЕ використовуються скінченні елементи (СЕ), що являють собою чотирикутники довільної форми (рис. 1,а).

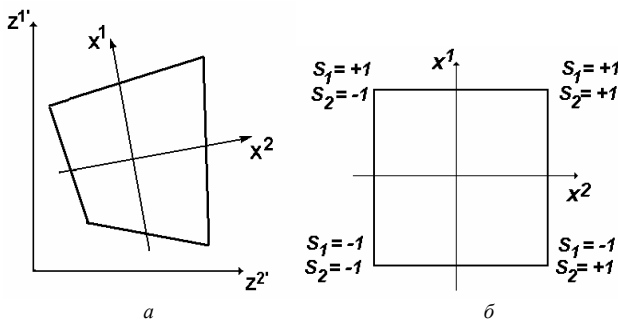


Рис. 1.

Кожному СЕ у відповідність поставлена місцева криволінійна система координат x^i , так що осі x^1 і x^2 спрямовані вздовж сторін поперечного перетину СЕ. При цьому в місцевій системі координат поперечний перетин СЕ відображається на квадрат з одиничною стороною (рис. 1,б). Місцева система координат застосовується для визначення деформацій та напружень у межах СЕ.

У першому варіанті розглянемо скінченні елементи загального вигляду. На характер розподілення механічних та геометричних параметрів по площі поперечного перерізу СЕ ніяких обмежень не накладається і вони обчислюються в деякій кількості точок інтегрування (рис. 2).

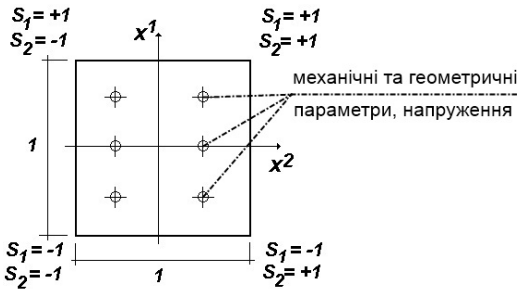


Рис. 2.

За невідомі при розв'язанні задачі приймаються компоненти переміщень вузлів СЕ в базисній системі координат $u_{k'}$, де k' - напрямок в базисній системі координат.

$$u_{k'} = \sum_{S_1} \sum_{S_2} P_{(S_1, S_2)} u_{k'(S_1, S_2)} \quad (1)$$

Білінійний розподіл переміщень, швидкостей і прискорень в площині перерізу елемента подається у наступному вигляді:

$$P_{(S_1, S_2)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 \quad (2)$$

Індекси S_1 та S_2 визначають положення вузла відносно центру поперечного перерізу елемента і набувають значень ± 1 (рис. 2).

Застосування моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) [3] дозволяє істотно підвищити ефективність чисельного дослідження комбінованих просторових конструкцій на основі МСЕ. Окрім того, МССЕ забезпечує відсутність деформацій при зміщенні тіла як жорсткого цілого, а також усуває явище "хибного зсуву", що виникає при розрахунку тонкостінних конструкцій за допомогою просторових СЕ.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\alpha} &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \quad \varepsilon_{12} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{12} \\ \varepsilon_{33} &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} x^\alpha,\end{aligned}\quad (3)$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\alpha=0}.$$

Компоненти коефіцієнтів розкладу деформацій (3) та при заданому законі апроксимації переміщень (1) мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} (z_{,\alpha}^{k'} S_\beta + z_{,\beta}^{k'} S_\alpha) u_{k'}(S_1, S_2), \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} Z^{2'} u_{2'}(S_1, S_2), \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[(2z_{,\alpha}^{k'} S_1 S_2 + z_{,12}^{k'} S_\alpha) u_{k'}(S_1, S_2), \right. \\ \left. \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} (2S_\alpha Z^{2'} + z_{,\alpha}^{2'}) u_{2'}(S_1, S_2) \right].\end{aligned}\quad (4)$$

При цьому вважається, що в центрі поперечного перерізу СЕ переміщення і їх похідні виражаються формулами:

$$\begin{aligned}u_{k'} \Big|_{x^\alpha=0} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} u_{k'}(S_1, S_2), \\ u_{k',\beta} \Big|_{x^\alpha=0} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} u_{k'}(S_1, S_2) S_\beta, \\ u_{k',12} \Big|_{x^\alpha=0} &= \sum_{S_1} \sum_{S_2} u_{k'}(S_1, S_2) S_1 S_2.\end{aligned}\quad (5)$$

Опис процесу деформування вісесиметричних та плоско-деформованих тіл здійснюється відповідно до варіаційного принципу Лагранжа. Рівняння рівноваги системи, що складається з N СЕ, які апроксимують досліджуваний об'єкт, має вигляд:

$$\sum_{n=1}^N (\delta W_n - \delta A_n) = 0. \quad (6)$$

В місцевій системі координат варіацію енергії деформації СЕ записується через компоненти тензорів напружень і деформацій:

$$\delta W = \int \int_{x^1 x^2} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (7)$$

Перепишемо вираз (7) у матричному вигляді:

$$\delta W = \int \int_{x^1 x^2} \delta \{ \varepsilon \}^T \{ \sigma \} \sqrt{g} dx^1 dx^2, \quad (8)$$

де

$$\{ \varepsilon \}^T = \{ \varepsilon_{11} \quad 2\varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \}, \quad \{ \sigma \}^T = \{ \sigma^{11} \quad \sigma^{12} \quad \sigma^{22} \quad \sigma^{33} \}. \quad (9)$$

Зв'язок між деформаціями і коефіцієнтами розкладу переміщень представимо у вигляді:

$$\{ \varepsilon \} = [B] \{ u \}, \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} [B] &= \left[[B]^{(-1,-1)} \quad [B]^{(1,-1)} \quad [B]^{(-1,1)} \quad [B]^{(1,1)} \right], \\ \{ u \}^T &= \left[\{ u \}_{(-1,-1)}^T \quad \{ u \}_{(1,-1)}^T \quad \{ u \}_{(-1,1)}^T \quad \{ u \}_{(1,1)}^T \right], \\ \{ u \}_{(s_1, s_2)}^T &= \left[u_{1'(s_1, s_2)} \quad u_{2'(s_1, s_2)} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Елементи підматриць $[B]^{(s_1, s_2)}$ обчислюються відповідно до формул (4).

Підставляючи (10) в (8), запишемо варіацію енергії деформації елемента через переміщення $\{ u \}$ та вузлові реакції $\{ r_\sigma \}$:

$$\delta W = \delta \{ u \}^T \{ r_\sigma \}, \quad (12)$$

де

$$\{ r_\sigma \} = \int \int_{x^1 x^2} [B]^T \{ \sigma \} \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (13)$$

Виконуючи чисельне інтегрування, отримаємо формулу для обчислення вузлових реакцій скінченного елемента загального вигляду із змінними механічними та геометричними параметрами:

$$\{ r_\sigma \} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[[B]^T \{ \sigma \} \sqrt{g} N_i N_j \right]_{(x_i^1, x_j^2)}, \quad (14)$$

де I, J - кількість точок інтегрування по x^1, x^2 відповідно, N_i, N_j - вагові функції, x_i^1, x_j^2 - координати точок інтегрування.

Для виводу матриці жорсткості скінченного елемента представимо зв'язок між прирощеннями напружень і деформацій у вигляді:

$$\{ \Delta \sigma \} = [D] \{ \Delta \varepsilon \}. \quad (15)$$

Опускаючи позначку прирощення Δ , прирощення варіації енергії деформації можна записати як:

$$\delta W = \int_{x^1 x^2} \delta \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (16)$$

Подаючи деформації через коефіцієнти розкладу переміщень, отримуємо:

$$\delta W = \delta \{u\}^T [k] \{u\}, \quad (17)$$

де $[k]$ - матриця жорсткості:

$$[k] = \int_{x^1 x^2} [B]^T [D] [B] \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (18)$$

Використовуючи формулу чисельного інтегрування:

$$[k] = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[[B]^T [D] [B] \sqrt{g} N_i N_j \right]_{(x_i^1, x_j^2)}. \quad (19)$$

2. Вісесиметричний та плоский скінченні елементи із визначенням механічних і геометричних параметрів в центрах СЕ. Отримані співвідношення (14) і (19) не накладають обмежень на розподіл механічних і геометричних параметрів по будь-якій з осей x^i , але ведуть до необхідності виконання значного об'єму обчислень, що пов'язані з операціями чисельного інтегрування. Більш ефективною схемою представляється підхід, який припускає використання усереднених значень в області поперечного перерізу. На відміну від [2] не вводиться гіпотеза про постійність значень компонент метричного тензора в межах скінченного елемента, що досягається залученням фізичних компонент тензорів напружень, деформацій та пружних сталей в межах моментної схеми скінченного елемента.

Будемо вважати, що компоненти тензора пружних сталей та визначник матриці, що складена з компонент метричного тензора g_{ij} , дорівнюють значенням відповідних величин у центрі поперечного перетину СЕ (рис.3):

$$\tilde{C}^{ijkl} \approx \overset{\circ}{C}^{ijkl} = \tilde{C}^{ijkl} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \tilde{g} = \overset{\circ}{g} = g \Big|_{x^\alpha=0}. \quad (20)$$

Відповідно до МССЕ компоненти тензора фізичних деформацій у поперечному перетині скінченного елемента подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\alpha} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha, (3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \quad \tilde{\varepsilon}_{12} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}, \quad \tilde{\varepsilon}_{33} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{33, \beta} x^\beta, \quad (21)$$

де

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij,\beta} = \frac{\partial \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\beta=0}. \quad (22)$$

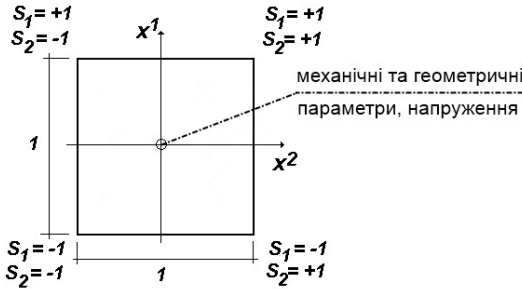


Рис. 3.

Зв'язок між фізичними компонентами тензора напружень та деформацій визначається на основі узагальненого закону Гука:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{C}^{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl}, \quad (23)$$

де

$$\tilde{\sigma}^{ij} = C^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}g_{(kk)}g_{(ll)}}. \quad (24)$$

Запишемо вираз для компонент тензора напружень через коефіцієнти розкладу деформацій в ряд Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{ij} = & \overset{\circ}{C}^{ij11} \left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{11} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{11,2} x^2 \right) + 2 \overset{\circ}{C}^{ij12} \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12} + \\ & + \overset{\circ}{C}^{ij22} \left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{22} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{22,1} x^1 \right) + \overset{\circ}{C}^{ij33} \left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,1} x^1 + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,2} x^2 \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Застосовуючи позначення

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij} = & \overset{\circ}{C}^{ijkl} \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{kl}, \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}_{,2} = & \overset{\circ}{C}^{ij11} \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{11,2} + \overset{\circ}{C}^{ij33} \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,2}, \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}_{,1} = & \overset{\circ}{C}^{ij22} \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{22,1} + \overset{\circ}{C}^{ij33} \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,1}, \end{aligned} \quad (26)$$

отримаємо запис закону Гука з урахуванням розкладу деформацій в ряд Маклорена:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}_{,2} x^2 + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}_{,1} x^1. \quad (27)$$

Відкидаючи з виразу (27) члени вигляду $\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{i\alpha}$ як такі, що не дають внеску в енергію деформування елемента, подамо фізичні компоненти тензора напруження відірзками ряду Маклорена:

$$\tilde{\sigma}^{\alpha\alpha} = \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha\alpha} x^{(3-\alpha)}, \quad \tilde{\sigma}^{12} = \overset{\circ}{\sigma}^{12}, \quad \tilde{\sigma}^{33} = \overset{\circ}{\sigma}^{33} + \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} x^{\alpha}, \quad (28)$$

де $\overset{\circ}{\sigma}^{ij}$ і $\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{ij}$ – коефіцієнти розкладення напружень.

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних напружень в ряд Маклорена з урахуванням їх подання через компоненти тензора напружень в місцевій криволінійній системі координат:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{\alpha\alpha} &= g_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\alpha}, \quad \tilde{\sigma}^{12} = g_{12} \overset{\circ}{\sigma}^{12}, \quad \tilde{\sigma}_{(3-\alpha)}^{\alpha\alpha} = g_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha\alpha}, \\ \tilde{\sigma}^{33} &= g_{33} \overset{\circ}{\sigma}^{33}, \quad \tilde{\sigma}_{(3-\alpha)}^{33} = g_{33} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{33}. \end{aligned} \quad (29)$$

Аналогічно, коефіцієнти розкладання компонент фізичних деформацій в ряд Маклорена, матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha}, \quad \tilde{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}, \quad \tilde{\varepsilon}_{33} = \frac{1}{g_{33}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}, \\ \tilde{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\alpha\alpha}}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \frac{\partial (\varepsilon_{\alpha\alpha}/g_{\alpha\alpha})}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{h}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} \right), \\ \tilde{\varepsilon}_{33,\alpha} &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{33}}{\partial x^{\alpha}} \Big|_{x^{\beta}=0} = \frac{\partial (\varepsilon_{33}/g_{33})}{\partial x^{\alpha}} \Big|_{x^{\beta}=0} = \frac{1}{g_{33}} \left(\varepsilon_{33,\alpha} - \varepsilon_{33} \frac{g_{33,\alpha}}{g_{33}} \right) \Big|_{x^{\beta}=0} = \\ &= \frac{1}{g_{33}} \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

де

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\alpha\beta} \Big|_{x^{\gamma}=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} \Big|_{x^{\gamma}=0}, \quad \overset{\circ}{g}_{(\alpha)\beta,\alpha} = z_{,\alpha}^{\nu'} z_{,\beta(\alpha)}^{\nu'}, \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \varepsilon_{33} \Big|_{x^{\gamma}=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\gamma} = \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x^{\gamma}} \Big|_{x^{\gamma}=0}, \\ \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{g_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}}{g_{\alpha(\alpha)}}, \quad \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{\partial g_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^{\beta}=0}, \end{aligned}$$

$$\overset{\circ}{h}_{33,\alpha} = \frac{\overset{\circ}{g}_{33,\alpha}}{\overset{\circ}{g}_{33}}, \quad \overset{\circ}{g}_{33,\alpha} = \frac{\partial \overset{\circ}{g}_{33}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\beta=0}, \quad \overset{\circ}{g}_{33} = g_{33} \Big|_{x^\beta=0}. \quad (31)$$

Запишемо коефіцієнти розкладу деформації (30) через переміщення в базисній системі координат:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(z_{,i}^{\gamma'} u_{,j}^{\nu'} + z_{,j}^{\gamma'} u_{,i}^{\nu'} \right) \Big|_{x^\alpha=0}, & \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \left(z^{2'} u_{2'} \right) \Big|_{x^\alpha=0}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} &= \frac{\partial \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\alpha=0} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',(\alpha)} + z_{,(\alpha)}^{\gamma'} u_{\gamma',\alpha}) \right)}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\alpha=0} = \left(z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',(\alpha)} + z_{,(\alpha)}^{\gamma'} u_{\gamma',\alpha} \right) \Big|_{x^\alpha=0}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} &= \frac{\partial \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\alpha=0} = \frac{\partial (z^{2'} u_{2'})}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\alpha=0} = \left(z_{,\alpha}^{2'} u_{2'} + z^{2'} u_{2',\alpha} \right) \Big|_{x^\alpha=0}. \end{aligned} \quad (32)$$

Введемо наступні позначення для значення похідних від переміщень $u_{,i}^{\nu'}$ і компонент тензора перетворень $z_{,i}^{\nu'}$ в центрі СЕ:

$$u_{,i}^{\nu'} \Big|_{x^\gamma=0} = \overset{\circ}{u}_{,i}^{\nu'}, \quad z_{,i}^{\nu'} \Big|_{x^\gamma=0} = \overset{\circ}{z}_{,i}^{\nu'}. \quad (33)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\nu'} \overset{\circ}{u}_{,\beta}^{\nu'} + \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{\nu'} \overset{\circ}{u}_{,\alpha}^{\nu'} \right), \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \overset{\circ}{z}^{2'} \overset{\circ}{u}_{2'}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} &= \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\nu'} \overset{\circ}{u}_{,\alpha}^{\nu'} + \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\nu'} \overset{\circ}{u}_{,\alpha}^{\nu'}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} &= \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \overset{\circ}{u}_{\gamma',\alpha} + \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \overset{\circ}{u}_{\gamma',\alpha(3-\alpha)}. \end{aligned}$$

Виразимо вектор деформацій і їх похідних в центрі СЕ через вектор вузлових переміщень у матричній формі:

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} = [B] \left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\} = [B_1] \left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\} = [B_2] \left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\}, \quad (34)$$

де

$$\left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\} = \left\{ \begin{matrix} u^{1'} \\ u^{2'} \end{matrix} \right\}_{(s_1, s_2)}. \quad (35)$$

Для зручності представлення розділимо матриці $[B], [B_1], [B_2]$ на блоки:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{[B]} &= \begin{bmatrix} \overset{\circ}{[B]}^{(-1;-1)} \overset{\circ}{[B]}^{(+1;-1)} \overset{\circ}{[B]}^{(-1;+1)} \overset{\circ}{[B]}^{(+1;+1)} \end{bmatrix} \\ \overset{\circ}{[B_1]} &= \begin{bmatrix} \overset{\circ}{[B_1]}^{(-1;-1)} \overset{\circ}{[B_1]}^{(+1;-1)} \overset{\circ}{[B_1]}^{(-1;+1)} \overset{\circ}{[B_1]}^{(+1;+1)} \end{bmatrix} \\ \overset{\circ}{[B_2]} &= \begin{bmatrix} \overset{\circ}{[B_2]}^{(-1;-1)} \overset{\circ}{[B_2]}^{(+1;-1)} \overset{\circ}{[B_2]}^{(-1;+1)} \overset{\circ}{[B_2]}^{(+1;+1)} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (36)$$

де

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{[B]}^{(s_1, s_2)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} z \overset{\circ}{,1} S_1 & \frac{1}{2} z \overset{\circ}{,1} S_1 \\ \frac{1}{4} \left(z \overset{\circ}{,1} S_2 + z \overset{\circ}{,2} S_1 \right) & \frac{1}{4} \left(z \overset{\circ}{,2} S_2 + z \overset{\circ}{,2} S_1 \right) \\ \frac{1}{2} z \overset{\circ}{,2} S_2 & \frac{1}{2} z \overset{\circ}{,2} S_2 \\ 0 & \frac{1}{4} z \overset{\circ}{,2} \end{bmatrix}, \quad (37) \\ \overset{\circ}{[B_1]}^{(s_1, s_2)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\left(z \overset{\circ}{,12} S_2 + 2 z \overset{\circ}{,2} S_1 S_2 \right) - z \overset{\circ}{,2} S_2 \overset{\circ}{h}_{22,1} \right) & \frac{1}{2} \left(\left(z \overset{\circ}{,12} S_2 + 2 z \overset{\circ}{,2} S_1 S_2 \right) - z \overset{\circ}{,2} S_2 \overset{\circ}{h}_{22,1} \right) \\ 0 & \frac{1}{4} \left(2 z \overset{\circ}{,2} S_1 + z \overset{\circ}{,1} + z \overset{\circ}{,2} \overset{\circ}{h}_{33,1} \right) \end{bmatrix}, \\ \overset{\circ}{[B_2]}^{(s_1, s_2)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\left(z \overset{\circ}{,12} S_1 + 2 z \overset{\circ}{,1} S_1 S_2 \right) - z \overset{\circ}{,1} S_1 \overset{\circ}{h}_{11,2} \right) & \frac{1}{2} \left(\left(z \overset{\circ}{,12} S_1 + 2 z \overset{\circ}{,2} S_1 S_2 \right) - z \overset{\circ}{,1} S_2 \overset{\circ}{h}_{11,2} \right) \\ 0 & \frac{1}{4} \left(2 z \overset{\circ}{,2} S_2 + z \overset{\circ}{,2} + z \overset{\circ}{,2} \overset{\circ}{h}_{33,2} \right) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

де $\overset{\circ}{h}$, $z \overset{\circ}{, \beta} \overset{\alpha'}{\beta}$ визначаються згідно формул (14), $z \overset{\alpha'}{\beta} = \frac{\partial z}{\partial x_{\beta}}$.

Отримані вирази для визначення деформацій через переміщення дозволяють ефективно описувати процес деформування вісесиметричних і плоско-деформованих тіл при використанні косокутних елементів [1].

Запишемо вираз для варіації енергії деформації одного СЕ у вигляді:

$$\delta W = \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (38)$$

Подаючи в останньому виразі фізичні компоненти тензора напружень (28) і тензора деформацій (21) відрізками рядів Маклорена через їхні значення у центрі елемента отримаємо:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \left[\left(\overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\alpha}_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \delta \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) + 2 \overset{\circ}{\sigma}^{12} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{12} + \left(\overset{\circ}{\sigma}^{33} + \overset{\circ}{\sigma}^{33}_{,\alpha} x^\alpha \right) \delta \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta} x^\beta \right) \right] \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (39)$$

Обчислимо такі інтеграли:

$$\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} dx^1 dx^2 = 1, \quad \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha dx^1 dx^2 = 0, \\ \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha x^\beta dx^1 dx^2 = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{12}, & \alpha = \beta \end{cases}. \quad (40)$$

Виконуючи інтегрування виразу (39) з урахуванням (40) для варіації енергії деформації одного СЕ, одержимо:

$$\delta W = \left[\overset{\circ}{\sigma}^{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \frac{1}{12} \left(\overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)}_{(3-\alpha)} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}^{33}_{,\alpha} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} \right) \right] \sqrt{g}. \quad (41)$$

З використанням отриманих вище виразів для коефіцієнтів розкладання компонент фізичних напружень і деформацій в ряд Маклорена, вираз для варіації енергії деформування одного СЕ набуде вигляду:

$$\delta W = \left[\overset{\circ}{\sigma}^{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \frac{1}{12} \left(\overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)}_{(3-\alpha)} \delta \left(\varepsilon_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \varepsilon_{\alpha(\alpha)} h_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) + \overset{\circ}{\sigma}^{33}_{,\alpha} \delta \left(\varepsilon_{33,\alpha} - \varepsilon_{33} h_{33,\alpha} \right) \right) \right] \sqrt{g}. \quad (42)$$

У матричній формі цей вираз буде мати вигляд:

$$\delta W = \left\{ \left(\delta \left\{ \varepsilon \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{12} \left[\left(\delta \left\{ \varepsilon_{,1} \right\} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\} + \left(\delta \left\{ \varepsilon_{,2} \right\} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\} \right] \right\} \sqrt{g}, \quad (43)$$

де

$$\left\{ \varepsilon \right\}^T = \left\{ \varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad 2\varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{33} \right\},$$

$$\begin{aligned}
 \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{h}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right\}, \\
 \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22,1} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \overset{\circ}{h}_{22,1} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,1} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,1} \right\}, \\
 \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22,2} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \overset{\circ}{h}_{22,2} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,2} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,2} \right\}, \\
 \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\sigma}^{11} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{22} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{12} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{33} \right\}, \\
 \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{(3-\alpha)(3-\alpha)} \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{(3-\alpha)3} \right\}. \tag{44}
 \end{aligned}$$

Вираз для варіації енергії деформації в матричній формі має вигляд:

$$\delta W = \left(\delta \{u\}^T [B]^T \right) \{ \overset{\circ}{\sigma} \} + \frac{1}{12} \left(\delta \{u\}^T \left([B_1]^T + [B_2]^T \right) \{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \} \right) \sqrt{g} = \delta \{u\}^T \{ \tilde{r} \}, \tag{45}$$

де

$$\{ \tilde{r} \} = \left[[B]^T \{ \overset{\circ}{\sigma} \} + \frac{1}{2} \left([B_1]^T \{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \} + [B_2]^T \{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \} \right) \right] \sqrt{g} \tag{46}$$

– вектор вузлових реакцій, що визначаються по значенням напружень.

Для отримання матриці жорсткості використовуємо зв'язок між деформаціями і переміщеннями по закону Гука. У цьому випадку зв'язок між коефіцієнтами напружень і деформацій в ряд Маклорена в матричній формі має вигляд:

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \left\{ \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \left[\overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}^T \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\} \right) \right\} \sqrt{g}. \tag{47} \\
 \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} &= [B] \left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\}.
 \end{aligned}$$

Коефіцієнти прирощення напружень пов'язані з коефіцієнтами розкладання деформацій законом Гука, матрична форма якого має вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} = \left[\overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} = \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}, \tag{48}$$

де

$$\begin{aligned} \left[\overset{\circ}{D} \right] &= \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1112} & C^{1122} & C^{1133} \\ C^{1211} & C^{1212} & C^{1222} & C^{1233} \\ C^{2211} & C^{2212} & C^{2222} & C^{2233} \\ C^{3311} & C^{3312} & C^{3322} & C^{3333} \end{bmatrix}, \\ [\overset{\circ}{D}_{,\alpha}] &= \left[\overset{\circ}{C}^{ij(3-\alpha)(3-\alpha)} \right] \left[\overset{\circ}{C}^{ij33} \right]. \end{aligned} \quad (49)$$

Компоненти матриці пружних сталей обчислюються із використанням компонент метричного тензора.

Враховуючи залежності між коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій, подамо отриманий вираз варіації енергії СЕ у вигляді:

$$\delta W = \left(\delta \{ u \}^T \right) [K]_n \{ u \}_n, \quad (50)$$

де $[K]_n$ – матриця жорсткості вісесиметричного та плоского СЕ:

$$[K]_n = \left\{ [B]^T [\overset{\circ}{D}] [B] + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left([B_1]^T [\overset{\circ}{D}_1] [B_1] + [B_2]^T [\overset{\circ}{D}_2] [B_2] \right) \right\} \sqrt{g}. \quad (51)$$

Отримані на основі МССЕ вирази матриці жорсткості (51) і вектора вузлових реакцій (46) кінченого елемента із змінними компонентами метричного тензора дозволяють будувати оптимальні дискретні моделі для вісесиметричних та плоско-деформованих тіл складної форми.

Для дослідження характеру збіжності, достовірності і ефективності результатів розрахунку тонкостінних об'єктів на базі двовимірних СЕ розглянуто тестовий приклад про згин шарнірно опертої круглої пластини (рис. 4,а) під дією рівномірно розподіленого навантаження. При розв'язанні даної та подальших задач використовували скінченні елементи з чисельним інтегруванням та без нього. Геометричні і механічні параметри пластини є наступними: $l=0.8$ м, $h=0.01$ м модуль пружності $E=10^5$ Мпа, коефіцієнт Пуассона $\nu=0$. В якості еталонного прийнятий аналітичний розв'язок. Отримані результати показали, що розроблені двовимірні СЕ для тонкостінних об'єктів не поступаються по ефективності оболонковим СЕ SCAD (рис. 4,б).

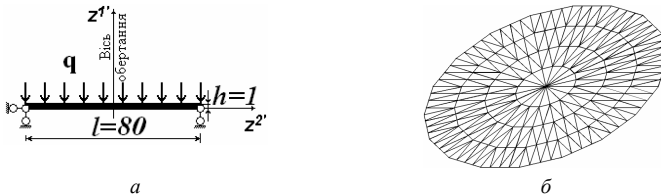


Рис. 4.

Для порівняння ефективності використання двовимірних СЕ було виконано розрахунок балки (рис. 5,а) на основі МССЕ та скінчено елементної бази SCAD.

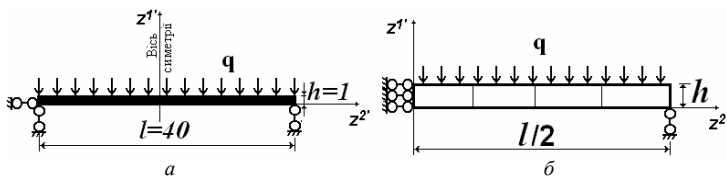


Рис.5.

Результати розв'язку, отриманого на основі МСЕ із використанням СЕМ бази, що ґрунтується на використанні МССЕ та програмного комплексу SCAD, в залежності від кількості N СЕ в дискретній моделі на половині балки наведене на (рис. 5,б). Геометричні і механічні параметри балки є наступними: $l=0.4$ м, $h=0.01$ м модуль пружності $E=105$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu=0$.

Швидкість збіжності результатів показана на рис. 6(а) для напруження та рис. 6,б для прогинів, де $N=8,16,20,32$ кількість СЕ по довжині балки. Як видно, використання МССЕ має кращу збіжність результатів порівняно з програмним комплексом SCAD, що дозволяє зробити висновок про ефективність використання МССЕ, при розрахунку тонкостінних об'єктів з використанням двовимірних СЕ.

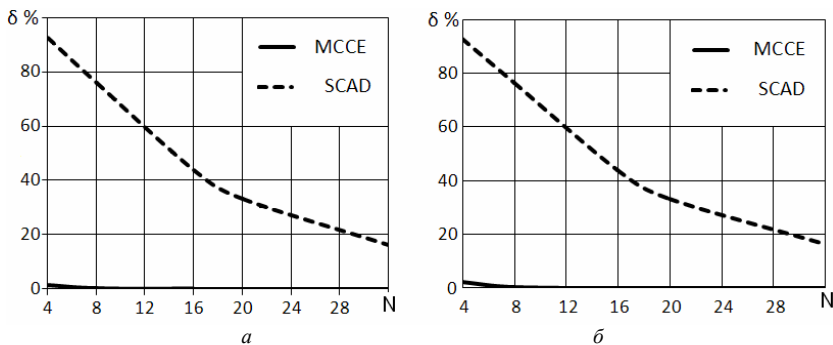


Рис. 6.

При розрахунку масивних тіл особливий інтерес представляє розподілення напружень поблизу контура тіла, оскільки в більшості випадків зазвичай тут знаходяться зони максимальних напружень. Збільшенню точності визначення контурних напружень в значній мірі допомагає використання нерівномірної апроксимуючої сітки з

приграничним шаром, розміри елементів яких в напрямку нормалі до поверхні тіла можуть бути відносно малими по відношенню до їх довжини. Ефективність використання приграничного шару наглядно виявилась навіть в такій елементарній задачі, як деформування нескінченного циліндра під дією внутрішнього навантаження (задача Ляме). З'ясувалося, що збіжність результатів розв'язку цієї задачі при використанні приграничного шару товщина якого прийнята $1/100$ до зовнішнього радіусу, має кращу збіжність порівняно з використанням рівномірної сітки. Так для обчислення кільцевих напружень на внутрішній поверхні циліндра для досягнення похибки в 2.5% при наявності приграничного шару достатньо 4 СЕ, а при рівномірній сітці необхідно 9 СЕ.

Приведене порівняння підтверджує необхідність використання приграничного шару в задачах, пов'язаних з визначенням напружено-деформованого стану конструкції. Таким чином, можна передбачити, що ефективність використання нерівномірної сітки буде збільшуватися по мірі ускладнення дійсного поля напружень, а особливо при наявності концентраторів.

В якості прикладу розглянемо задачу про розтяг площини, яка ослаблена круглим отвором (задача Кірша) (рис. 7,а). Використання МССЕ забезпечують точність порядку 10% при апроксимуючій сітці з кількістю вузлів в межах 28. В той же час при використанні двовимірних СЕ програмного комплексу SCAD навіть дискретні моделі з кількістю вузлів 242 (рис. 7,б) дають похибку на рівні 25%.

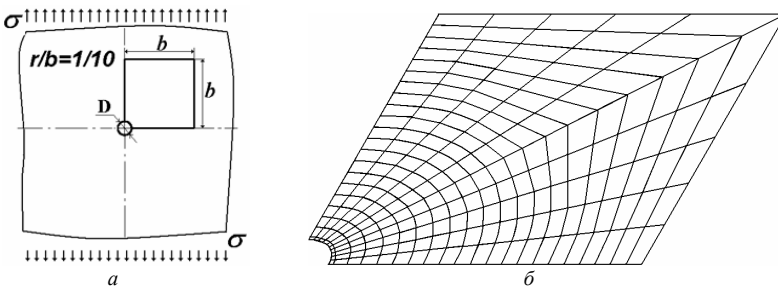


Рис. 7.

Висновки. Дослідження показали, що результати, які отримані за допомогою скінченних елементів із визначенням механічних і геометричних параметрів в їх центрах на базі фізичних компонент тензорів напружень та деформацій практично співпадають з результатами моделювання на базі СЕ загального вигляду з чисельним інтегруванням при цьому значно скорочуючи час розрахунку. Крім того, порівняння із

скінченно-елементною базою програмного комплексу SCAD показали переваги розроблених СЕ, які дозволяють розв'язувати задачі для тонкостінних об'єктів не поступаючись по ефективності оболонковим СЕ та суттєво перевищуючи по збіжності двовимірні СЕ при розгляді тонкостінних об'єктів в задачах згину та при наявності концентраторів напружень в масивних тілах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А.* Матриця жорсткості і вектор вузлових реакцій скінченного елемента для розв'язання просторових задач термов'язкопружнопластичності НМСЕ / [*В.А. Баженов, С.О. Пискунов, І.І. Солодей та ін.*] // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2005. – Вип. 76. – С. 3–26.
2. *Баженов В.А.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування просторових тіл [*В.А. Баженов, О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, О.С. Сахаров*] // КНУБА, 2005, 298с.
3. *Сахаров А. С.* Метод конечных элементов в механике твердых тел / *А. С. Сахаров, В. Н. Кислокий, В. В. Киричевский.* – К. : Вища шк., 1982. – 480 с.

Стаття надійшла до редакції 03.12.2012 р.

Гуляр А.И., Солодей И.И., Максимюк Ю.В., Сизевич Б.И.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ МОМЕНТНОЙ СХЕМЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (МСКЭ) В ЗАДАЧАХ ИЗГИБА И С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ

На основе численных исследований показана эффективность МСКЭ сравнению с конечно элементной базой SCAD при расчете массивных и тонкостенных тел при наличии изгиба и концентраторов напряжений.

Guliar A.I., Solodey I.I., Maksymiuk Y.V., Syzevych B.I.

EFFICIENCY OF MOMENT FINITE ELEMENT SCHEMES (MFES) IN PROBLEMS BENDING AND WITH STRESS CONCENTRATORS

Based on numerous studies, the effectiveness of MFES compared with finite element SCAD base when calculating the massive and thin-walled bodies in the presence of bending and stress concentrators.