

УДК 539.3

Ю.В. Ворона, канд. техн. наук

О.С. Черненко

А.А. Козак

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗА МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ УСТАЛЕНИХ КОЛИВАНЬ ПЛАСТИН З ТРИЩИНАМИ

Викладається підхід до розв'язання за методом граничних інтегральних рівнянь двовимірної динамічної задачі механіки руйнування, який полягає в заміні тріщини вузькою еліптичною порожниною. На тестових прикладах показана задовільна точність отриманих таким чином результатів.

За допомогою методу граничних інтегральних рівнянь (ГІР) розглядаються гармонічні вимушені коливання двовимірних об'єктів. В якості алгоритмічної основи обчислювального процесу використовується граничний аналог формули Соміліани для переміщень:

$$0.5u_j(\vec{x}_0) + \int_{\Gamma} u_k(\vec{y}) T_{jk}(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y = \int_{\Gamma} \tau_k(\vec{y}) U_{jk}(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y, \quad j=1, 2, \quad (1)$$

де $\vec{x}\{x_1, x_2\} \in V$; $\vec{y}\{y_1, y_2\} \in \Gamma$; Γ - границя розрахункової області V ; τ_j - напруження на площинці границі з нормаллю $\vec{n}\{n_1, n_2\}$:

$$\tau_j(\vec{y}) = \sigma_{jk}(\vec{y}) n_k(\vec{y}) = \lambda n_j(\vec{y}) \frac{\partial u_m(\vec{y})}{\partial x_m} + \mu \left(\frac{\partial u_j(\vec{y})}{\partial y_k} + \frac{\partial u_k(\vec{y})}{\partial y_j} \right) n_k(\vec{y}); \quad (2)$$

$U_{jk}(\vec{x}, \vec{y})$ - фундаментальний розв'язок задачі, що задається виразом [1];

$$U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{i}{4\mu} \left\{ \delta_{jk} \left[H_0^{(1)}(\varphi_1) - \frac{H_1^{(1)}(\varphi_2)}{\varphi_2} + \alpha \frac{H_1^{(1)}(\varphi_1)}{\varphi_1} \right] + r_{,j} r_{,k} \left[H_2^{(1)}(\varphi_2) - \alpha H_2^{(1)}(\varphi_1) \right] \right\}; \quad (3)$$

$\varphi_j = k_j r$; $k_j = \frac{\omega}{C_j}$; $C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$; $C_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$; $\alpha = \frac{C_2^2}{C_1^2}$; ρ - щільність

матеріалу; ω - кругова частота коливань; λ і μ - константи Ламе;

$r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial y_j} = \frac{y_j - x_j}{r}$; $r^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2$; $T_{jk}(\vec{x}, \vec{y})$ - узагальнена

похідна фундаментального розв'язку $U_{jk}(\vec{x}, \vec{y})$, тобто напруження на

площинках з компонентами нормалі $n_j(\vec{y})$, які виникають в пружному двовимірному просторі від дії вищезгаданої одиничної сили:

$$T_{kj}(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda n_j(\vec{y}) \frac{\partial U_{km}(\vec{x}, \vec{y})}{\partial y_m} + \mu n_m(\vec{y}) \left[\frac{\partial U_{km}(\vec{x}, \vec{y})}{\partial y_j} + \frac{\partial U_{kj}(\vec{x}, \vec{y})}{\partial y_m} \right] =$$

$$= \frac{i}{4} \left[r_{,k} n_j T_1 + \left(\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j} n_k \right) T_2 + r_{,k} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} T_3 \right]; \quad (4)$$

$$T_1 = \frac{2}{r} \left[H_2^{(1)}(\varphi_2) - \alpha H_2^{(1)}(\varphi_1) \right] - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\varphi_1}{r} H_1^{(1)}(\varphi_1);$$

$$T_2 = \frac{1}{r} \left[2H_2^{(1)}(\varphi_2) - \varphi_2 H_1^{(1)}(\varphi_2) - 2\alpha H_2^{(1)}(\varphi_1) \right];$$

$$T_3 = \frac{2}{r} \left[\varphi_2 H_1^{(1)}(\varphi_2) - 4H_2^{(1)}(\varphi_2) - \alpha \varphi_1 H_1^{(1)}(\varphi_1) + 4\alpha H_2^{(1)}(\varphi_1) \right]; \quad (5)$$

$H_k^{(1)}$ - функція Ганкеля 1-го роду порядку k .

Метод ГР має помітні переваги перед чисельними методами, пов'язаними із дискретизацією всієї розрахункової області, такими як метод скінченних різниць та метод скінченних елементів, у тих випадках, коли наперед відомою є область концентрації напружень в пружному тілі. Серед таких задач важливе місце займають задачі про напружений стан в околі вершини тріщини або тонкого включення.

Відомо однак, що безпосереднє використання ГР (1) в задачах механіки руйнування призводить до вироджених або близьких до вироджених систем [2]. Як альтернативну інколи використовують системи гіперсингулярних ГР, що базуються на формулі Сомі ліани для напружень [3-5], однак складність ядер інтегральних рівнянь великою мірою позначається на точності і швидкості обчислень, причому ці недоліки особливо стають помітними в задачах динаміки.

В такій ситуації привабливою виглядає ідея про заміну тріщини порожниною, що має форму вузького еліпсу. Справа в тому, що при такій заміні можна користуватись системою ГР (1), не побоюючись того, що система стане виродженою. Оцінити ефективність цієї заміни можна за допомогою порівняння між собою точних параметрів напружено-деформованих станів (НДС), які виникають в статично розтягнутій нескінченній площині, послабленій або тріщиною, або еліптичним отвором показано на рис. 1. Суцільна лінія відповідає значенням нормованих переміщень, отриманим для послаблення у вигляді тріщини. Пунктирна лінія відповідає еліптичному послабленню зі співвідношенням осей 4:20. Розбіжність результатів в розрахункових точках на відстані $r_1=0,98a$ та

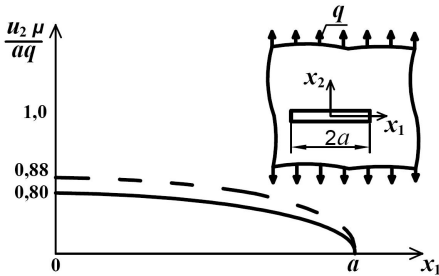


Рис. 1.

тріщина може бути замінена вузьким еліптичним отвором. Відмітимо, що така сама розбіжність спостерігається і при визначенні коефіцієнту інтенсивності напружень (КІН) K_1 .

$r_2=0,97a$ від вершини тріщини становить приблизно 9% (таблиця 1). При співвідношенні осей еліпса 1:20 в тих самих точках розбіжність даних розрахунку не перевищує 3%, що є цілком задовільним результатом з інженерної точки зору, який свідчить про те, що при чисельному розрахунку

Таблиця 1

| Параметр | Точне значення для тріщини | Значення для еліптичного отвору із співвідношенням осей 4:20 | Відносна похибка, % | Значення для еліптичного отвору із співвідношенням осей 1:20 | Відносна похибка, % |
|------------|----------------------------|--|---------------------|--|---------------------|
| $u_2(r_1)$ | $1,92 \cdot 10^{-9}$ | $2,09 \cdot 10^{-9}$ | 8,9 | $1,96 \cdot 10^{-9}$ | 2,1 |
| $u_2(r_2)$ | $2,33 \cdot 10^{-9}$ | $2,57 \cdot 10^{-9}$ | 10,3 | $2,39 \cdot 10^{-9}$ | 2,6 |
| K_1 | 560,5 | 618,1 | 10,3 | 574,9 | 2,6 |

Було також проведено співставлення результатів дослідження коливань скінченної пластини, послабленої центральною горизонтальною тріщиною, і такої самої пластини, але з еліптичним отвором. До торців пластини нормально прикладені рівномірно розподілені навантаження, що змінюються із часом за гармонійним законом.

Параметри НДС для пластини з тріщиною отримані за допомогою учбової версії скінченноелементної програми ANSYS, тоді як пластина з вузьким еліптичним отвором розглядалась на основі системи ГП (1). В таблиці 2 приведені залежності нормованого КІН K_1 від безрозмірного параметру частоти коливань. При співвідношенні осей еліптичного отвору 4:20 різниця між значеннями КІН становить приблизно 5%, коли коливання відбуваються із частотами, віддаленими від власних. При коливаннях з частотами, близькими до власних, похибка визначення КІН сягає 31%. Значно кращі результати спостерігаються при заміні тріщини отвором із співвідношенням осей 1:20. Тут розбіжність результатів при частотах коливань, віддалених від власних, не перевищує 1%, а при коливаннях з частотами, близькими до власних, спостерігається похибка величиною приблизно 10%.

Таблиця 2

| $\frac{\omega a}{c_2}$ \ / $\frac{K_I}{K_I^0}$ | Тріщина | Еліптичний отвір із співвіднош. осей 1:20 | Відносна похибка, % | Еліптичний отвір із співвіднош. осей 4:20 | Відносна похибка, % |
|--|---------|---|---------------------|---|---------------------|
| 0 | 1,006 | 0,997 | 0,9 | 0,996 | 0,9 |
| 0,2 | 1,311 | 1,300 | 0,8 | 1,305 | 0,4 |
| 0,32 | 2,882 | 2,881 | 0,01 | 2,977 | 3,3 |
| 0,42 | 13,280 | 12,016 | 9,5 | 9,143 | 31,2 |
| 0,52 | 3,026 | 3,010 | 0,5 | 3,049 | 0,8 |
| 0,56 | 16,646 | 16,438 | 1,3 | 16,714 | 0,4 |
| 0,62 | 3,084 | 3,050 | 1,1 | 2,997 | 2,8 |
| 0,8 | 0,900 | 0,890 | 1,1 | 0,852 | 5,3 |

Графіки залежності нормованого КІН K_I від безрозмірного параметру частоти коливань наведені на рис. 2. Пунктирна лінія, відповідає значенням, отриманим за методом скінченних елементів. Суцільною лінією з'єднані точки, отримані за допомогою розробленого чисельного алгоритму при співвідношенні осей еліптичного отвору 1:20. Точкова лінія, побудована при співвідношенні осей отвору 4:20.

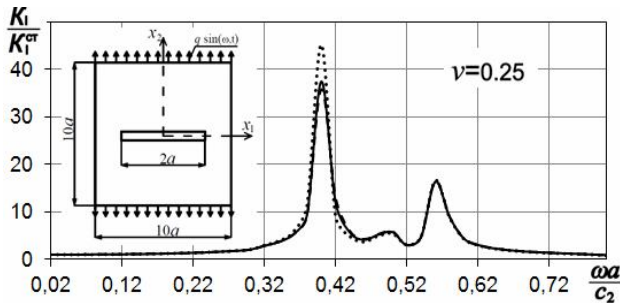


Рис. 2

Наведені результати, свідчать про те, що при дослідженні гармонійних пружних коливань пластина з тріщиною може бути замінена пластиною, послабленою вузьким еліптичним отвором.

Далі розглянемо коливання скінченної пластини, послабленої центральною похилою тріщиною. Знову до торців пластини нормально прикладені рівномірно розподілені навантаження, що змінюються із часом за гармонійним законом.

Як і в попередньому розрахунку параметри НДС для пластини з тріщиною отримані за допомогою учбової версії програми ANSYS. Пластина з вузьким еліптичним отвором розглядається за допомогою методу ГР. В

таблицях 3 і 4 наведені залежності нормованих КІН K_I і K_{II} відповідно від безрозмірного параметру частоти коливань.

Таблиця 3

| $\frac{K_I}{K_{II}} \backslash \frac{\omega a}{c_2}$ | Тріщина | Еліптичний отвір із співвіднош. осей 1:20 | Відносна похибка, % | Еліптичний отвір із співвіднош. осей 4:20 | Відносна похибка, % |
|--|---------|---|---------------------|---|---------------------|
| 0 | 1,00 | 1,00 | 0,2 | 0,97 | 3,0 |
| 0,10 | 1,16 | 1,16 | 0,3 | 1,15 | 0,9 |
| 0,17 | 2,54 | 2,44 | 3,8 | 2,28 | 10,1 |
| 0,25 | 37,19 | 36,76 | 1,2 | 28,57 | 23,2 |
| 0,26 | 12,17 | 12,16 | 0,1 | 12,04 | 1,1 |
| 0,40 | 0,30 | 0,30 | 0,2 | 0,30 | 1,6 |

Таблиця 4

| $\frac{K_{II}}{K_I} \backslash \frac{\omega a}{c_2}$ | Тріщина | Еліптичний отвір із співвіднош. осей 1:20 | Відносна похибка, % | Еліптичний отвір із співвіднош. осей 4:20 | Відносна похибка, % |
|--|---------|---|---------------------|---|---------------------|
| 0 | 1,00 | 0,99 | 1,0 | 0,97 | 2,8 |
| 0,10 | 1,18 | 1,17 | 0,8 | 1,14 | 3,4 |
| 0,17 | 1,75 | 1,66 | 5,0 | 1,61 | 7,7 |
| 0,25 | 46,92 | 46,29 | 1,3 | 39,57 | 15,7 |
| 0,26 | 15,57 | 15,34 | 1,4 | 15,14 | 2,7 |
| 0,40 | 0,85 | 0,84 | 0,9 | 0,83 | 2,1 |

Бачимо, що при співвідношенні осей еліптичного отвору 4:20 відносна похибка між значеннями КІН становить приблизно 8%, коли коливання відбувались із частотами, що помітно відрізняються від власних. При коливаннях з частотами, близькими до власних, похибка визначення КІН сягає 29%. При заміні тріщини еліптичним отвором із співвідношенням осей 1:20 отримуємо значно кращі результати. Тут розбіжність результатів при частотах коливань, віддалених від власних, не перевищує 1%, а при коливаннях з частотами, близькими до власних, спостерігається похибка величиною приблизно 5%.

Графіки залежності нормованого КІН K_I від безрозмірного параметру частоти коливань наведені на рис. 3. Так само, пунктирна лінія, відповідає значенням, отриманим за методом скінченних елементів. Суцільною лінією з'єднані точки, отримані за допомогою розробленого чисельного алгоритму при співвідношенні осей еліптичного отвору 1:20. Точкова лінія побудована при співвідношенні осей отвору 4:20.

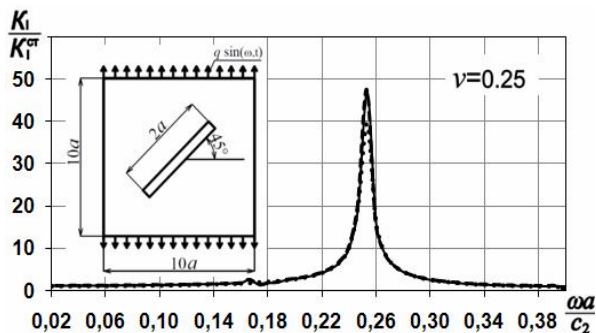


Рис. 3.

Подібним чином оформлені графіки залежності від безрозмірного параметру частоти коливань нормованого КІН K_{II} (рис. 4).

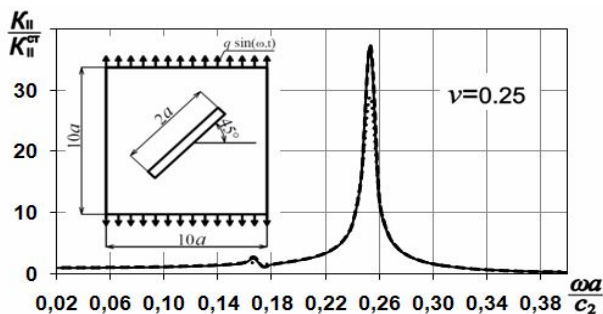


Рис. 4.

Ці приклади також свідчать про те, що при дослідженні гармонійних пружних коливань в широкому діапазоні частот пластина з тріщиною може бути замінена пластиною, послабленою вузьким еліптичним отвором.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бенерджи П., Баттерфілд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
2. Cruse T.A. BIE fracture mechanics analysis: 25 years of developments // Computational Mechanics, 18 (1996), pp. 1-11
3. Ворона Ю.В., Гончаренко М.В., Козак А.А., Черненко Е.С. Колебания двумерных массивных тел, ослабленных трещинами нормального відриву // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2011. – Вип. 87. – С.131–143

4. Ворона Ю.В., Русанова О.С. Алгоритм розв'язання задач про коливання масивів з тріщинами поздовжнього зсуву // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2010. – Вип. 86.– С.102–113
5. Кантор Б.Я., Науменко В.В., Стрельникова Е.А. Об аппроксимации поверхности плоскими элементами при численном решении сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Адамара Алгоритм розв'язання задач про коливання масивів з тріщинами поздовжнього зсуву // Доповіді НАНУ. – 1995. – № 11.– С.21–23.

Стаття надійшла до редакції 17.10.2012 р.

Vorona Yu.V., Chernenko E.S., Kozak A.A.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПО МЕТОДУ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН С ТРЕЩИНАМИ

Излагается подход к решению по методу граничных интегральных уравнений двумерной динамической задачи механики разрушения, который состоит в замене трещины узким эллиптическим отверстием. На тестовых примерах показана удовлетворительная точность полученных таким образом результатов.

Vorona Yu.V., Chernenko O.S., Kozak A.A.

BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS METHOD ANALYSIS OF PLATES WITH CRACKS STEADY STATE VIBRATIONS

Boundary integral equations approach to 2D dynamic fracture mechanics problem is developed. It is proposed to substitute straight crack with elliptic hole. The abilities of such an approach are illustrated through the comparison of calculated values with FEM results.