УДК 539.3

Г.М. Іванченко, д-р. техн. наук

ВПЛИВ ПАРАМЕТРІВ АНІЗОТРОПІЇ ПРУЖНОЇ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОЇ ЛІНЗИ НА ЇЇ ФОКУСУЮЧІ ВЛАСТИВОСТІ

Розглядаються випадки фокусування плоскої нестаціонарної розривної хвилі в трансверсально-ізотропному середовищі поверхнями плоско-випуклої трансверсально-ізотропної пружної лінзи. Досліджується залежність положення зон фокусування хвилі від величин параметрів анізотропії середовища лінзи.

Вступ. Явища фокусування світлових променів оптичними приладами – лінзами і дзеркалами – широко використовуються для локального збільшення освітленості і концентрації світлової енергії. Аналогічні ефекти виявляються і при розповсюдженні нестаціонарних розривних хвиль в пружних середовищах. Для кількісного опису таких явищ, а також для дослідження їх особливостей застосовні методи геометричної оптики [1-3].

Задача актуальна при дослідженні особливостей розповсюдження нестаціонарних розривних хвиль в земній корі, породжуваних вибухами, землетрусом, де практичний інтерес мають питання геометричної побудови рухомих поверхонь розривів перших похідних польових функцій, які часто називають ударними хвилями або хвилями сильного розриву.

Для постановки і розв’язування таких задач в теорії пружності використовуються методи геометричної оптики, зокрема, нульове наближення променевого методу, який забезпечує хороший кількісний опис багатьох хвильових явищ різної фізичної природи [2,3].

Променевий метод припускає виділення функції оптичного шляху хвилі, або ейконалу, і побудова за допомогою рівняння ейконалу системи променів і фронтів ударної хвилі. Ця задача достатньо легко розв'язується для ізотропних середовищ, проте і там виникають деякі ускладнення, пов'язані з дослідженням взаємодія хвилі з поверхнями розділу середовищ, які володіють різними механічними властивостями (пружні відбивачі, лінзи, шаруваті середовища та ін.), внаслідок чого утворюється каустик, де фокусується енергія і значно зростає інтенсивність поля.

При дослідженні розповсюдження хвиль сильних розривів в пружних анізотропних середовищах фізична картина динамічних явищ різко ускладнюється, оскільки в цих випадках векторна польова функція для кожного напряму є три види хвиль, відмінні поляризацією; фазові швидкості хвиль залежать як від поляризації хвилі, так і від напряму її розповсюдження; промені, в загальному випадку, не ортогональні поверхні хвильового фронту, а променеві швидкості відрізняються від фазових швидкостей і між їх напрямами не завжди є однозначна відповідність.

Постановка задачі. Стан динамічної рівноваги пружного середовища в декартовій системі координат x_1, x_2, x_3 визначається системою трьох диференціальних рівнянь

$$\sum_{k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \, \partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1,2,3), \tag{1}$$

де $\lambda_{ik,pq} = c_{ik,pq}/\rho$; $c_{ik,pq}$ – параметри пружності середовища; ρ – її густина; u_1, u_2, u_3 – компоненти вектора пружних зсувів, t – час.

Враховуючи те, що в анізотропних середовищах промені в загальному випадку не ортогональні поверхням хвильових фронтів, розрізнятимемо вектори фазової $\mathbf{v}$ і променевої ξ швидкостей, вважаючи, що фронтом хвилі є поверхня постійної фази, де кожна елементарна площадка фронту рухається уздовж місцевої одиничної нормалі $\mathbf{n}$ зі швидкістю v. Тут $\mathbf{r}$ – радіус-вектор точки фронту.

Фазові швидкості $\mathbf{v}$ хвилі і вектори її поляризації $\mathbf{A}$ для вибраного напряму $\mathbf{n}$ можна побудувати з однорідної системи алгебраїчних рівнянь [2,4]

$$\sum_{k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q - \mathrm{v}^2 A_i = 0 \qquad (i = 1,2,3) \tag{2}$$

як власні числа і вектори матриці її коефіцієнтів.

Ненульові рішення системи (2) мають місце при виконанні умови

$$\left| \sum_{k,p=1}^{3} \lambda_{ik,pq} n_k n_p - v^2 \delta_{iq} \right| = 0\,, \tag{3}$$

за допомогою якого для кожного напряму нормалі $\mathbf{n}$ можна визначити і розташувати у порядку зменшення три швидкості по різному поляризованих хвиль.

Підставляючи замість величини v^2 в систему (2) по черзі одне із відшуканих значень $\mathrm{v}_r^2(\mathbf{n})$ (r = 1,2,3), можна визначити компоненти векторів поляризації $\mathbf{A}^{(r)}$ трьох хвиль, які рухаються у даному напрямі $\mathbf{n}$ зі своїми фазовими швидкостями $\mathbf{v}_r(\mathbf{n})$.

Поверхня фронту хвилі сильного розриву визначається співвідношенням

$$\tau(x_1,\, x_2,\, x_3) - t = 0\,, \tag{4}$$

у якому функція τ повинна задовольняти диференціальному рівнянню в часткових похідних першого порядку [2]

$$\sum_{i,k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq}\, p_k\, p_p\, A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1\,, \tag{5}$$

Яке узагальнює рівняння ейконалу геометричної оптики для пружних анізотропних хвиль.

Величини p_k (k = 1, 2, 3), що входять у рівняння (5), є компонентами вектора рефракції $p_k \equiv \partial\tau / \partial x_k = n_k / \mathrm{v}_r(\mathbf{n})$ (k = 1,2,3).

Фронт (4) хвилі сильного розриву в анізотропному середовищі постійної густини будується після знаходження розв'язків рівняння (5), яке методом характеристик приводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} dx_k / d\tau \;&=\; \xi_k = \sum_{i,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq}\, p_p\, A_q^{(r)} A_i^{(r)}\,, \\ dp_k / d\tau &= 0\,, \qquad (k = 1, 2, 3). \end{aligned} \tag{6}$$

У системі (6) перша група рівнянь характеризує розповсюдження хвилі уздовж променя з променевою швидкістю, а друга – показує на прямолінійність променів в анізотропному середовищі з постійною густиною.

Методика розв'язування. Розглядатимемо два трансверсально-ізотропні середовища, в яких осі симетрії пружних параметрів співпадають з віссю Ox_2 декартової системи координат. Завдяки властивостям симетрії, компоненти $c_{ik,pq}$ тензора пружних постійних кожного середовища можна представити у формі квадратної матриці

$$(C_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda-l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu-p & \lambda-l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda-l & \lambda-l & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu-m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu-m \end{pmatrix}, \tag{7}$$

де λ і μ – параметри Ламе, l, m, p – константи, що відрізняють середовище від ізотропної (параметри анізотропії).

Нехай у середовищі $\bar{\underline{\mathrm{I}}}$ збурена плоска подовжня хвиля сильних розривів, вектор поляризації якої направлений уздовж оси Ox_2. Будемо досліджувати дифракцію такої хвилі при її взаємодії з криволінійними осесиметричними межами G_1 і G_2 розділу середовищ, вісь симетрії якої також співпадає з Ox_2. Задача є осесиметричною, тому достатньо розглянути явища перебудови і формування слідів хвиль сильних розривів на одній із площин, наприклад на площині, яка містить вісь симетрії. Приймемо „локально-плоске наближення” [2], відповідно до якого у місці падіння хвилі на елементарну площадку розділяючої поверхні G_i в площині падіння, всі відображені і заломлені хвилі також належатимуть цій площині, тобто треті компоненти всіх векторів поляризації рівні нулю. Це дозволяє застосовувати узагальнений закон Снелліуса, який описується рівністю [2,4,5]

$$\frac{\sin(\gamma)}{v}=\frac{\sin(\Theta_{\nu}^{\bar{I}}-\gamma)}{v_{\nu}^{\bar{I}}(\Theta_{\nu}^{\bar{I}})}=\frac{\sin(\Theta_{\mu}^{\bar{II}}+\gamma)}{v_{\mu}^{\bar{II}}(\Theta_{\mu}^{\bar{II}})}, \qquad \nu,\ \mu = 1,2, \tag{8}$$

де γ – кут нахилу дотичної до поверхні G_1 в точці падіння променя на межу розділу середовищ, $\Theta_1^{\bar{I}}, \Theta_2^{\bar{I}}$ – кути між віссю Ox_2 і напрямами векторів фазових швидкостей квазіподовжньої qP і квазіпоперечної qS хвиль, відображених в середовище $\bar{\underline{I}}$; $\Theta_1^{\bar{II}}, \Theta_2^{\bar{II}}$ – аналогічні кути для хвиль, заломлених в середовище $\bar{\underline{II}}$ (у середній шар – в лінзу); $v, v_{\nu}^{\bar{I}}, v_{\mu}^{\bar{II}}$. Для випадків анізотропних середовищ співвідношення (8) закону Снелліуса характеризуються тим, що знаменники і чисельники є функціями відповідних кутів $\Theta_{\nu}^{\bar{I}}, \Theta_{\mu}^{\bar{II}}$ і неявно функціями кута γ. Значення кутів $\Theta_{\nu}^{\bar{I}}, \Theta_{\mu}^{\bar{II}}$ ($\nu,\ \mu\ =\ 1,\ 2$) віддзеркалення і заломлення променя у деякій точці межі, визначаються розв’язками системи нелінійних рівнянь (8) методом Ньютона спільно із алгоритмом продовження розв’язку по параметру [3]. Тут за провідний параметр зручно вибрати кут нахилу дотичної γ. Тоді, наприклад, для першого рівняння системи (8) при деяких відомих величинах параметра $\gamma=\gamma^n$

$$\Delta\Theta_{\nu}^{\bar{I}}=\frac{\cos\gamma\cdot v_{\nu}^{\bar{I}}\ (\Theta_{\nu}^{\bar{I}})+\cos(\Theta_{\nu}^{\bar{I}}-\gamma)\cdot v}{\cos(\Theta_{\nu}^{\bar{I}}-\gamma)\cdot v-\sin(\gamma)\cdot dv_{\nu}(\Theta_{\nu}^{\bar{I}})/d\Theta_{\nu}^{\bar{I}}}\cdot\Delta\gamma+r_{\nu}, \tag{9}$$

де $r_{\nu}=\sin(\Theta_{\nu}^{\bar{I}}-\gamma)\cdot v-\sin\gamma\cdot v_{\nu}^{\bar{I}}(\Theta_{\nu}^{\bar{I}})$ – нев'язка на даному кроці побудови розв’язку.

На поверхню розділу G_2 падають промені квазіподовжньої і квазіпоперечної хвиль, які породжуються в деякій точці взаємодії початкового променя з першою межею розділу середовищ. На другій межі розділу середовищ обидва промені також підлеглі співвідношенням Снелліуса

$$\frac{\sin(\Theta-\varphi)}{\mathrm{v}(\Theta)}=\frac{\sin(\Theta_{\nu}^{\overline{\underline{\mathrm{II}}}}+\varphi)}{\mathrm{v}_{\nu}^{\overline{\underline{\mathrm{II}}}}(\Theta_{\nu}^{\overline{\underline{\mathrm{II}}}})}=\frac{\sin(\Theta_{\mu}^{\overline{\underline{\mathrm{I}}}}-\varphi)}{\mathrm{v}_{\mu}^{\overline{\underline{\mathrm{I}}}}(\Theta_{\mu}^{\overline{\underline{\mathrm{I}}}})},\ \ \nu,\ \mu=1,2, \tag{10}$$

де φ – кут нахилу дотичної до поверхні G_2 в точці падіння відповідного променя квазіподовжньої або квазіпоперечної хвилі, $\Theta_1^{\overline{\underline{\mathrm{I}}}}, \Theta_2^{\overline{\underline{\mathrm{I}}}}$ – кути між віссю *Ox₂* і напрямами векторів фазових швидкостей квазіподовжньої і квазіпоперечної хвиль, заломлених в середовище $\overline{\underline{\mathrm{I}}}$; $\Theta_1^{\overline{\underline{\mathrm{II}}}}, \Theta_2^{\overline{\underline{\mathrm{II}}}}$ – аналогічні кути для хвиль, відображених в середній шар $\overline{\underline{\mathrm{II}}}$; $\mathrm{v}, \mathrm{v}_{\nu}^{\overline{\underline{\mathrm{I}}}}, \mathrm{v}_{\mu}^{\overline{\underline{\mathrm{II}}}}$ – величини фазових швидкостей падаючої хвилі на поверхню, заломлених в середовище $\overline{\underline{\mathrm{I}}}$ і відображених в середовище $\overline{\underline{\mathrm{II}}}$. Розв’язок системи (10) також формується покроково. Наприклад, мала зміна кута нахилу дотичної до поверхні G_2 на величину $\Delta\varphi=\Delta\varphi^n$ спричинить прирости направляючих кутів векторів фазових швидкостей відображених хвиль обох типів

$$\Delta\Theta_{\nu}^{\overline{\underline{\mathrm{II}}}}=\frac{f_1\cdot\Delta\Theta+f_2\cdot\Delta\varphi}{f_3}+r_{\nu}\ . \tag{11}$$

Тут позначені функції

$$f_1=\sin\left(\Theta_{\nu}^{\overline{\underline{\mathrm{II}}}}+\varphi\right)\cdot\frac{d\,\mathrm{v}(\Theta)}{d\,\Theta}-\cos(\Theta-\phi)\cdot\mathrm{v}_{\nu}^{\overline{\underline{\mathrm{II}}}}(\Theta_{\nu}^{\overline{\underline{\mathrm{II}}}}),$$

$$f_2=\cos\left(\Theta-\varphi\right)\cdot\mathrm{v}_{\nu}^{\overline{\underline{\mathrm{II}}}}(\Theta_{\nu}^{\overline{\underline{\mathrm{II}}}})+\cos(\Theta_{\nu}^{\overline{\underline{\mathrm{II}}}}+\varphi)\cdot\mathrm{v}\left(\Theta\right),$$

$$f_3=\sin(\Theta-\varphi)\cdot\frac{d\,\mathrm{v}_{\nu}^{\overline{\underline{\mathrm{II}}}}\left(\Theta_{\nu}^{\overline{\underline{\mathrm{II}}}}\right)}{d\,\Theta_{\nu}^{\overline{\underline{\mathrm{II}}}}}-\cos(\Theta_{\nu}^{\overline{\underline{\mathrm{II}}}}+\varphi)\cdot\mathrm{v}(\Theta)$$

і нев'язку рівняння (11) $r_{\nu}=\sin(\Theta_{\nu}^{\overline{\underline{\mathrm{II}}}}+\gamma)\cdot\mathrm{v}(\Theta)-\sin\left(\Theta-\gamma\right)\cdot\mathrm{v}_{\nu}^{\overline{\underline{\mathrm{II}}}}(\Theta_{\nu}^{\overline{\underline{\mathrm{II}}}})$.

Обчислення по формулах вигляду (9), (11) можливі за наявності деякого початкового стану $\gamma^0, \mathrm{v}^0, \left(\Theta_{\nu}^{\overline{\underline{\mathrm{I}}}}\right)^0, \left[\mathrm{v}_{\nu}^{\overline{\underline{\mathrm{I}}}}(\Theta_{\nu}^{\overline{\underline{\mathrm{I}}}})\right]^0, \left(\Theta_{\mu}^{\overline{\underline{\mathrm{II}}}}\right)^0, \left[\mathrm{v}_{\mu}^{\overline{\underline{\mathrm{II}}}}(\Theta_{\mu}^{\overline{\underline{\mathrm{II}}}})\right]^0$. Для даних випадків з осесиметричним середнім шаром (лінзою) зручно починати побудову сімейства падаючого, відображених і заломлених променів із променя, орієнтованого уздовж осі Ox_2.

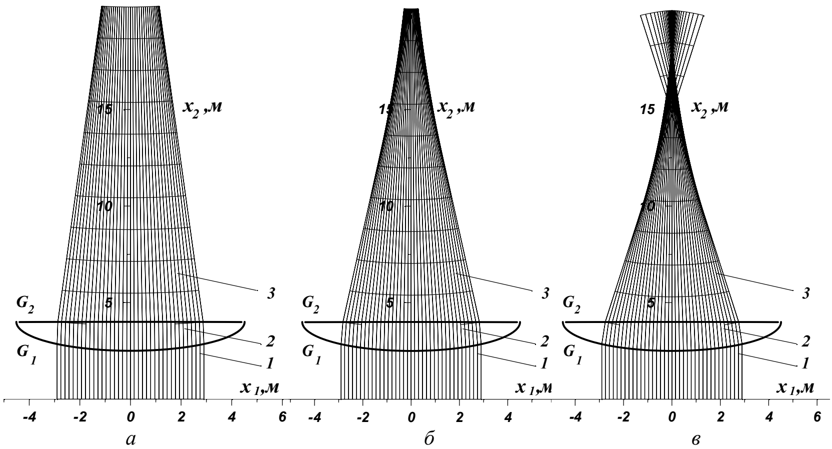

Рис. 1

Результати досліджень. Розглянута задача про дослідження впливу параметрів анізотропії *l, m, p* пружної плоско-опуклої лінзи на її фокусуючу здатність.

При розв’язуванні поставленої задачі прийнято: $\rho_1 = 2.650 \times 10^3 кг/м^3$, $\lambda_1 = 4.972 \times 10^{10} Па$, $\mu_1 = 3.906 \times 10^{10} Па$ для середовища $\overline{\underline{\mathrm{I}}}$ і для середовища $\overline{\underline{\mathrm{II}}}$ (лінзи): $\rho_2 = 2.760 \times 10^3 кг/м^3$, $\lambda_2 = 3.409 \times 10^9 Па$, $\mu_2 = 1.364 \times 10^{10} Па$. Коефіцієнти анізотропії для першого середовища постійні: $\boldsymbol{m}_1 = 0.1\boldsymbol{\mu}_1$, $l_2 = 0.3\lambda_2$ і $p_1 = 0.1(\lambda_1 + 2\mu_1)$, а для лінзи вони варіювались. Виявлено, що ступінь і рівномірність фокусування або розсіювання двічі заломлених променів залежать не лише від геометрії поверхонь, G_2, G_2 і пружних характеристик середовищ, але і в значній мірі вони залежать від параметрів анізотропії. Це видно на рис. 1, де показані промені падаючої (1) і заломленої в лінзу (2) квазіподовжньої хвилі а також промені і еволюція фронту квазіподовжньої хвилі (3), заломленої за лінзою. Для пружних лінз однакової геометрії приймалися наступні параметри: $m_2 = 0.3\mu_2$, $l_2 = -0.4\lambda_2$, $p_2 = -0.6(\lambda_2 + 2\mu_2)$ (рис. 1,*а*); $m_2 = 0.1\mu_2$, $l_2 = -0.2\lambda_2$, $p_2 = -0.3(\lambda_2 + 2\mu_2)$ (рис. 1,*б*) і $m_2 = 0.1\mu_2$, $l_2 = 0.2\lambda_2$, $p_2 = 0.05(\lambda_2 + 2\mu_2)$ (рис. 1,*в*). При цьому густина і коефіцієнти Ламе середовища лінзи залишалися постійними.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кравцов Ю.А. Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. Г.:, Наука, 1980. 304 с.
2. *Петрашень Г.И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. Ленинград, Наука, 1980. 280 с.
3. *Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К.* Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. К.:, Наукова думка, 1988. 220 с.
4. *Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М. Яковенко Е.В.* Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред //Прикл. математика и механика. – 2000. – Т.64, №3. – С. 394–402.
5. *Gulyayev V.I., Lugovoyy P.Z., Ivanchenko G.M.* Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media // International Journal of Solids and Structures – 2003. – 40. – P. 237-247.

Стаття надійшла до редакції 21.12.2012 р.

Иванченко Г.М.

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ АНИЗОТРОПИИ УПРУГОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ЛИНЗЫ НА ЕЕ ФОКУСИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА

Рассматриваются случаи фокусировки плоской нестационарной разрывной волны в трансверсально-изотропной среде поверхностями плоско-выпуклой трансверсально-изотропной упругой линзы. Исследуется зависимость положения зон фокусировки волны от величин параметров анизотропии среды линзы.

Ivanchenko G.M.

ANISOTROPIC PARAMETERS EFFECT OF ELASTIC TRANSVERSALLY ISOTOPIC LENS ON ITS FOCUSING PROPERTIES

The cases of focusing of a plane unstationary discontinuous wave by the surfaces of a plane-convex transversally isotropic elastic lens in a transversally isotropic medium are examined. Dependence of position of focusing zones of the wave on the values of parameters of anisotropy of the lens medium is explored.