УДК 539.3

М.О. Шульга, д-р фіз.-мат. наук

ЗАСТОСУВАННЯ ГАМІЛЬТОНОВОГО ФОРМАЛІЗМУ В ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Рівняння осесиметричних коливань циліндричних оболонок в теорії Кірхгофа-Лява та теорії типу Тимошенка вперше в науковій літературі представлені в операторній гамільтоновій формі по поздовжній координаті.

Ключові слова: змішана система рівнянь осесиметричних коливань, теорія Кірхгофа-Лява, теорія типу Тимошенка, операторна гамільтонова форма

Розвитку теорії і методів розрахунку стержнів, пластин і оболонок належить провідне значення в прикладних задачах будівельної механіки. В монографії [4] вперше в світовій науковій літературі з механіки деформування твердих тіл було запропоновано перетворення рівнянь теорії пружності до гамільтонової форми по просторовій координаті. Подальшому розвитку цього підходу присвячені чисельні роботи, аналіз яких проведено в оглядах [10, 11] та інших публікаціях. В теоріях стержнів і пластин гамільтонів формалізм по просторових координатах розвинутий в роботах [2, 3, 5 – 9, 13]. В цій статті гамільтонів формалізм по поздовжній координаті вперше розвинуто в теорії оболонок. Розглядаються рівняння осесиметричних коливань циліндричних оболонок теорії Кірхгофа-Лява і типу Тимошенка. Показано яким чином їх можна представити у вигляді змішаних операторних гамільтонових систем.

1. Теорія типу Тимошенка. Циліндричну оболонку товщиною h віднесемо до ортогональної системи координат $\alpha_1 = s, \alpha_2, z$ в її серединній поверхні радіусу R. В теорії типу Тимошенка коливань циліндричних оболонок при осесиметричній деформації тангенціальні зусилля N_{11}, N_{22}, згинальний момент M_{11}, перерізуюча сила Q_{1z}, тангенціальне переміщення $v_1(s,t)$, прогин $w(s,t)$ серединної поверхні, тимошенківська функція зсуву $\psi_1(s,t)$ знаходяться з рівнянь коливань

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial s} = \rho h \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial s} - Q_{1z} = -\rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial Q_{1z}}{\partial s}-\frac{N_{22}}{R}+q_3=\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

і матеріальних залежностей

$$N_{11}=B\left(\frac{\partial v_1}{\partial s}+\nu\frac{w}{R}\right),\quad N_{22}=B\left(\nu\frac{\partial v_1}{\partial s}+\frac{w}{R}\right),$$

$$M_{11}=-D\frac{\partial\psi_1}{\partial s},\quad Q_{1z}=B_{55}\left(\frac{\partial w}{\partial s}-\psi_1\right) \tag{1.2}$$

при відповідних граничних і початкових умовах. В рівняннях (1.1), (1.2) ρ, E, ν, $G_{13}=G_{23}\neq 2(1-\nu)E$ – густина, модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона, модулі зсуву матеріалу, $D=I_1E/(1-\nu^2)$ – згинальна жорсткість, $B=hE/(1-\nu^2)$ і $B_{55}=k_G hG_{13}$ – жорсткості при розтягуванні і зсуві, k_G – коефіцієнт зсуву, h – товщина оболонки, $I_1=h^3/12$ – момент інерції поперечного перерізу на одиницю довжини.

Оскільки в перерізах $s=const$ величини M_{11}, w, N_{11}, ψ_1, Q_{1z}, v_1 при досконалому механічному контакті залишаються неперервними, то рівняння (1.1) і (1.2) доцільно записати в операторній нормальній формі Коші відносно цих функцій по просторовій координаті s

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial s}=-\rho I_1\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}+Q_{1z},\quad \frac{\partial\psi_1}{\partial s}=-\frac{M_{11}}{D},$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\psi_1+\frac{Q_{1z}}{B_{55}},\quad \frac{\partial Q_{1z}}{\partial s}=(1-\nu^2)B\frac{w}{R^2}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\nu\frac{N_{11}}{B},$$

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial s}=\rho h\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2},\quad \frac{\partial v_1}{\partial s}=-\nu\frac{w}{R}+\frac{N_{11}}{B}. \tag{1.3}$$

Тангенціальне зусилля N_{22}, що не входить в систему (1.3), визначається за формулою

$$N_{22}=(1-\nu^2)B\frac{w}{R}+\nu N_{11} \tag{1.4}$$

через функції w, N_{11} системи (1.3).

Важливо наголосити, що коєфіцієнти системи (1.3), а значить і рівнянь (1.1) і (1.2), можуть бути довільними функціями координати s з розривами першого роду.

Покажемо тепер, що система (1.3) є операторною гамільтоновою системою [1, 2] по просторовій координаті s

$$\frac{\partial q_i}{\partial s}=\frac{\partial \hat{H}}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial s}=-\frac{\partial \hat{H}}{\partial q_i}, \quad i=1,2,3\,. \tag{1.5}$$

З цією метою за "канонічні" змінні треба взяти вектор-стовпці

$$\mathbf{q}=col(M_{11},w,N_{11})\,, \quad \mathbf{p}=col(\psi_1,Q_{1z},-v_1)\,, \tag{1.6}$$

а операторну функцію Гамільтона вибрати у вигляді

$$\hat{H}=\frac{1}{2}\hat{P}_{ij}q_iq_j+\frac{1}{2}\hat{Q}_{ij}p_ip_j\,, \quad i,j=1,2,3\,, \tag{1.7}$$

де ненульові елементи операторних симетричних матриць $\hat{P}_{ij},\hat{Q}_{ij}$ мають наступний вигляд

$$-\hat{P}_{11}=-\frac{1}{D}\,, \quad -\hat{P}_{22}=(1-\nu^2)BR^{-2}+\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,,$$
$$-\hat{P}_{23}=-\hat{P}_{32}=\nu R^{-1}\,, \quad -\hat{P}_{33}=-B^{-1}\,,$$
$$\hat{Q}_{11}=-\rho I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,, \quad \hat{Q}_{12}=\hat{Q}_{21}=1\,,$$
$$\hat{Q}_{22}=B_{55}^{-1}\,, \quad \hat{Q}_{33}=-\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,. \tag{1.8}$$

Неважко бачити, що система (1.5) з урахуванням (1.7) і (1.8) співпадає з системою (1.3), тобто система (1.3) є операторною гамільтоновою системою по просторовій координаті s. При виконанні операцій диференціювання елементи $\hat{P}_{ij},\hat{Q}_{ij}$ матриць $\hat{\mathbf{P}}$, $\hat{\mathbf{Q}}$ слід вважати "замороженими" ("сталими") величинами.

2. Теорія Кірхгофа-Лява. Розглянемо теорію з засадничими гіпотезами Кірхгофа-Лява. Рівняння коливань і матеріальні залежності тепер будуть такі

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial s}=\rho h\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}\,,$$
$$\frac{\partial M_{11}}{\partial s}-Q_{1z}=0\,,$$
$$\frac{\partial Q_{1z}}{\partial s}-\frac{N_{22}}{R}+q_3=\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,; \tag{2.1}$$

$$N_{11}=B\left(\frac{\partial v_1}{\partial s}+\nu\frac{w}{R}\right), \quad N_{22}=B\left(\nu\frac{\partial v_1}{\partial s}+\frac{w}{R}\right), \quad M_{11}=-D\frac{\partial \varphi_1}{\partial s}\,, \tag{2.2}$$

причому $\varphi_1=\dfrac{\partial w}{\partial s}$.

На перерізах $s=const$ неперервними повинні бути значення M_{11}, w, N_{11}, φ_1, Q_{1z}, v_1, які і приймемо за основні розвязуючі функції. Відповідним чином перетворимо систему (2.1)-(2.2) до вигляду

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial s}=Q_{1z}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial s}=-\frac{M_{11}}{D},$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\varphi_1, \quad \frac{\partial Q_{1z}}{\partial s}=(1-\nu^2)B\frac{w}{R^2}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\nu\frac{N_{11}}{R},$$

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial s}=\rho h\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial s}=-\nu\frac{w}{R}+\frac{N_{11}}{B}. \tag{2.3}$$

Тангенціальне зусилля

$$N_{22}=(1-\nu^2)B\frac{w}{R}+\nu N_{11}.$$

Якщо ввести “канонічні” змінні $\mathbf{q}=col(M_{11},w,N_{11})$, $\mathbf{p}=col(\varphi_1,Q_{1z},-v_1)$, то система (2.3) також набуде вигляду операторної гамільтонової системи

$$\frac{\partial q_i}{\partial s}=\frac{\partial \widehat{H}}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial s}=-\frac{\partial \widehat{H}}{\partial q_i}, \quad i=1,2,3 \tag{2.4}$$

де операторна функція Гамільтона

$$\widehat{H}=\frac{1}{2}\widehat{P}_{ij}q_i q_j+\frac{1}{2}\widehat{Q}_{ij}p_i p_j, \quad i,j=1,2,3. \tag{2.5}$$

Ненульові елементи матриць $\widehat{\mathbf{P}}$ і $\widehat{\mathbf{Q}}$ мають наступні значення

$$-\widehat{P}_{11}=-\frac{1}{D}, \quad -\widehat{P}_{22}=(1-\nu^2)BR^{-2}+\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$-\widehat{P}_{23}=-\widehat{P}_{32}=\nu R^{-1}, \quad -\widehat{P}_{33}=-B^{-1},$$

$$\widehat{Q}_{12}=\widehat{Q}_{21}=1, \quad \widehat{Q}_{33}=-\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{2.6}$$

Таким чином, показано, що система (2.4) з врахуванням (2.5) і (2.6) співпадає з системою (2.3), тобто система (2.3) є операторною гамільтоновою системою по просторовій координаті s. При виконанні операцій диференціювання елементи $\widehat{P}_{ij}$, $\widehat{Q}_{ij}$ матриць $\widehat{\mathbf{P}}$, $\widehat{\mathbf{Q}}$ слід вважати “замороженими” (“сталими”) величинами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Павловський М.А.* Теоретична механіка. – Київ: Техніка, 2002. – 512 с.

2. *Шульга М.О.* О гамильтоновом формализме в теории типа Тимошенко изгиба пластин // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 3-7.
3. *Шульга М.О.* О гамильтоновом формализме в кирхгофовой теории изгиба пластин // Теорет. и прикл. механика. – 2010. – № 1 (47). – С. 7-10.
4. *Шульга Н.А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с.
5. *Шульга О.М.* Построение решений уравнений колебаний классической теории *пластин* с периодическими по одной координате параметрами // Теоретическая и прикладная механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 109-113.
6. *Шульга О.М.* Волновые решения уравнений типа Тимошенко поперечных колебаний пластины с периодическими по одной координате параметрами // Теоретическая и прикладная механика. – 1996. – Вып. 26. – С. 105-111.
7. *Шульга М.О., Тробюк О.М.* Про змішану систему рівнянь типу Тимошенка коливань неоднорідних пластин // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2011. – № 87. – С. 158-163.
8. *Шульга О.М.* Коливання неоднорідних стержнів періодичної структури. – Автореф. дис. … канд. фіз.-мат. наук. – К.: Ін-т механіки, 2000. – 19 с.
9. *Шульга М.О.* Застосування гамільтонового формалізму в теорії типу Тимошенка коливань пластин. – Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2011. – 54, №1. – С. 189-195.
10. *Shul'ga N.A.* Propagation of elastic waves in periodic-nonhomogeneous space // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, № 7. – P.763 – 796.
11. *Shul'ga N.A.* Theory of dynamic processes in mechanical systems and materials of regular structure // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, № 12. – P. 1301-1338.
12. *Schul'ga N.A.* On certain mixed system of equations of theory of elasticity // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, № 3. – P. 271-275.
13. *Shul'ga M.O.* Appication of the Hamilton formalism in a Timoshenko-type theory of vibrations of plates // Journal of Mathematical Sciences. – Vol. 183, № 2, May, 2012. – P. 222-230.

Стаття надійшла до редакції 14.07.2012 р.

Шульга М.О.

ПРИМЕНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНОВОГО ФОРМАЛИЗМА В ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Уравнения осесимметричных колебаний цилиндрических оболочек в теории Кирхгофа-Лява и типа Тимошенко впервые в научной литературе представлены в операторной гамильтоновой форме по продольной координате.

Ключевые слова: смешанная система уравнений осесимметричных колебаний, теория Кирхгофа-Лява, теория типа Тимошенко, операторная гамильтонова форма.

Shul'ga M.O.

THE USE OF THE HAMILTONIAN FORMALISM IN THE THEORY OF VIBRATIONS OF CYLINDRICAL SHELLS

The equations of axisymmetric vibrations of cylindrical shells in the theory of Kirchhoff-Love and Timoshenko-type for the first time in the scientific literature presented in the form of the Hamiltonian operator in the longitudinal coordinate.

Keywords: mixed system of equations of axisymmetric vibrations, theory of Kirchhoff-Love, theory of Timoshenko-type, operator Hamiltonian form.