

УДК 539.3

О.І. Гуляр, д-р. техн. наук,  
 С.О. Пискунов, д-р. техн. наук,  
 Ю.В. Максим'юк  
 Б.І. Сизевич

## ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОВИМІРНИХ ЗАДАЧ СТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ І ПОВЗУЧОСТІ З УРАХУВАННЯМ ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ

Розглянуто двовимірний плоский скінчений елемент (СЕ) для розв'язку стаціонарної задачі теплопровідності в геометрично нелінійній постановці і отримана матриця теплопровідності. Достовірність результатів, що отримуються на основі розробленої методики, обґрунтовується порівнянням з відомими аналітичними результатами.

### Вступ.

Визначення нерівномірних температурних полів в вісесиметричних та плоско-деформованих тілах є однією із ланок усієї послідовності інженерних розрахунків термо-напруженого стану конструкцій і конструктивних елементів. Тому від правильного розв'язання цієї задачі залежить успіх розрахунку в цілому. Особливо важливим це уявляється при визначенні ресурсу елементів конструкцій під дією тривалого термосилового навантаження, оскільки в цьому випадку відбувається континуальне руйнування об'єкту. При цьому вплив нерівномірності температурного поля проявляється, як при визначенні температурних де

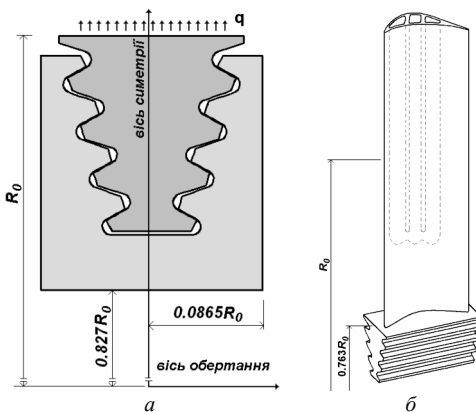


Рис. 1

формацій, так і при необхідності врахування залежності механічних констант від температури. Крім того, в процесі роботи навіть масивного тіла може відбуватися його формозмінення. Воно може хоч і несуттєво впливати на пружно-деформований стан, але як зазначається в багатьох роботах [1-5,7] значно більше може впливати на величину

розрахункового ресурсу. В якості прикладу такого об'єкту розглянуто хвостовик лопатки (рис. 1,а,б) газотурбінної установки (ГТУ), який є складовою частиною ялинкового з'єднання і одним із найбільш напружених і відповідальних елементів.

**1. Розв'язувальні співвідношення для двовимірної задачі стаціонарної теплопровідності.** Для визначення розподілення температур із використанням МСЕ в якості вихідного взято варіаційне рівняння двовимірної задачі стаціонарної теплопровідності [9]:

$$\delta\chi = \int_{x^1} \int_{x^2} \lambda_T \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \delta T}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} \sqrt{g} dx^1 dx^2 = 0, \quad (1)$$

де  $g^{\alpha\beta} \sqrt{g}$  - обчислюються в проміжній відрахунковій конфігурації [8];  $\lambda_T$  - коефіцієнт теплопровідності;  $T$  - функція, що описує розподілення температур в площині досліджуваного об'єкта.

При скінченноелементній апроксимації досліджуваного об'єкта для системи з  $N$  СЕ зазначене рівняння набуває вигляду:

$$\delta\chi = \sum_{n=1}^N \delta\chi_n = \sum_{n=1}^N \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \lambda_T \left( \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \delta T}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2 = 0 \quad (2)$$

Для чисельного розв'язання задач теплопровідності розроблений плоский скінченний елемент, конфігурація якого є аналогічною СЕ для задач термов'язкопружнопластичного деформування [8]. Загальний вигляд цього СЕ в базисній і місцевій системах координат наведений на рис. 2.

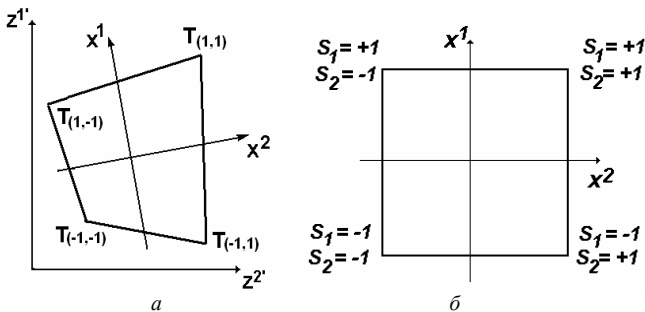


Рис. 2

В межах СЕ передбачається, що коефіцієнт теплопровідності  $\lambda_T$  змінюється незначно і приймається рівним відповідному значенню в центрі СЕ:

$$g^{ij} = \overset{\circ}{g}^{ij} = g^{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \lambda_T = \overset{\circ}{\lambda}_T = \lambda_T \Big|_{x^\alpha=0}.$$

В якості невідомих при розв'язанні задачі стаціонарної теплопровідності приймається значення температури в вузлах елемента  $T_{(S_1, S_2)}$ .

Розподілення температури у межах СЕ описується білінійним законом:

$$T = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1, S_2)} \left( \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (3)$$

де  $T_{(S_1, S_2)}$  – вузлові значення температури.

Вирази для похідних від температури мають вигляд:

$$T_{, \alpha} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1, S_2)} \left( \frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) S_\alpha. \quad (4)$$

Після підстановки в (2) значень температури (3) та її похідних (4) отримаємо:

$$\begin{aligned} \delta \chi_n = & \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \lambda_T \left[ \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left( T_{(S_1, S_2)} \left( \frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) S_\alpha \right) \times \right. \\ & \left. \times \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \left( \delta T_{(P_1, P_2)} \left( \frac{1}{2} + P_{(3-\beta)} x^{(3-\beta)} \right) P_\beta \right) g^{\alpha\beta} \right] \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (5) \end{aligned}$$

Грунтуючись на введених гіпотезах про постійність теплофізичних і геометричних характеристик в межах поперечного перерізу СЕ, а також після обчислення наступних інтегралів по площі СЕ:

$$\begin{aligned} \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} dx^1 dx^2 = 1, \quad \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha dx^1 dx^2 = 0, \\ \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha x^\beta dx^1 dx^2 = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{12}, & \alpha = \beta \end{cases}, \quad (6) \end{aligned}$$

отримаємо:

$$\delta\chi_n = \lambda_T \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \left[ T_{(S_1, S_2)} \delta T_{(P_1, P_2)} \left( \frac{1}{4} S_\alpha P_\beta g^{\circ\alpha\beta} + \frac{1}{12} S_1 S_2 P_1 P_2 g^{\circ\alpha\alpha} \right) \right] \sqrt{g}$$

або в матричному вигляді:

$$\delta\chi_n = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^L \left[ \delta \{T\}^T [A] \{T\}_l \right], \quad (7)$$

де  $\{T\}^T = \{T_{(-1,-1)}, T_{(1,-1)}, T_{(-1,1)}, T_{(1,1)}\}$  – вектор температури;  $[A]$  – матриці теплопровідності плоского СЕ, що обчислюються за формулами:

$$[A]_l = \left( \frac{1}{4} S_\alpha P_\beta g^{\circ\alpha\beta} + \frac{1}{12} S_1 S_2 P_1 P_2 g^{\circ\alpha\alpha} \right) \sqrt{g} \lambda_l. \quad (8)$$

З метою доведення достовірності результатів розв'язку задачі стаціонарної теплопровідності із використанням отриманих співвідношень розглянуто тестову задачу про теплопровідність нескінченного циліндру. Вихідні дані:  $r_1 = 10$  мм,  $r_2 = 40$  мм, температура на внутрішній поверхні стінки  $T_1 = 100^\circ\text{C}$ , температура на зовнішній поверхні стінки  $T_2 = 400^\circ\text{C}$ . Дискретна модель МСЕ наведена на рис. 3.

Поверхні вздовж осей  $z^1$  та  $z^2$  абсолютно теплоізолювані. В якості еталонного прийнятий аналітичний розв'язок отриманий в роботі [9]. Як видно, отримані результати (табл. 1) майже повністю збігаються із еталонним розв'язком.

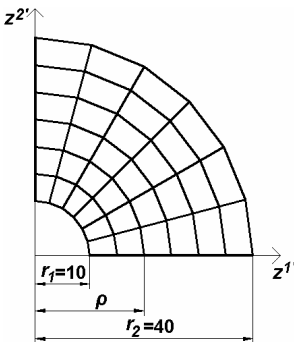


Рис. 3

Таблиця 1

$\rho$ , мм	Температура $T$ , $^\circ\text{C}$		Похибка, %
	Аналітично [9]	МСЕ	
10	100	100	0
15	187,74	186,62	0,60
20	250	247,87	0,85
25	298,27	296,12	0,72
30	337,74	336,62	0,33
35	371,10	370,33	0,21
40	400	400	0

**2. Вихідні та розрахункові співвідношення геометрично нелінійної задачі повзучості з урахуванням пошкодженості.** При дослідженні геометрично нелінійних задач для двовимірних тіл доцільно використовувати дві системи координат: базисну і місцеву (Лагранжеву).

Опис напружено-деформованого стану об'єктів в процесах, що супроводжуються великими подовженнями і поворотами, як правило, виконується в двох конфігураціях: відрахунковій початковій  $x_0^i$  і актуальній  $X^i$  (рис. 4).

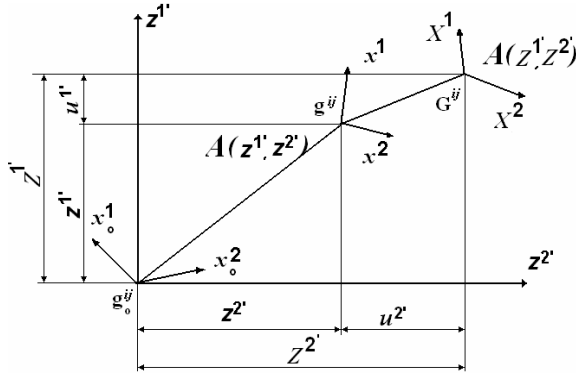


Рис. 4

Повні деформації в актуальній конфігурації визначаються співвідношенням :

$$\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2} (F^{ij} - G^{ij}). \quad (9)$$

де  $F^{ij}$  – компоненти міри деформації Фінгера, що дорівнюють відповідним компонентам метричного тензору в початковій відрахунковій конфігурації  $g_o^{ij}$ ,  $F^{ij} = g_o^{ij}$ , де  $G^{ij}$  – компоненти метричного тензору в актуальній конфігурації.

Введемо проміжну перемінну відрахункову конфігурацію  $x^i$  (рис.4), компоненти метричного тензора якої позначимо через  $g^{ij}$  [8].

Перемінну відрахункову конфігурацію приймаємо достатньо близькою до актуальної таким чином, щоб приріст компонент метричного тензора був малою величиною порівняно з  $G^{ij}$  :

$$\Delta G^{ij} = (G^{ij} - g^{ij}) \ll G^{ij}. \quad (10)$$

Використовуючи перемінну відрахункову конфігурацію представимо деформацію в вигляді суми компонент, обумовлених переходом від початкової відрахункової до перемінної і від перемінної до відрахункової конфігурації:

$$\varepsilon_o^{ij} = \varepsilon^{ij} + \Delta \varepsilon^{ij},$$

де

$$\begin{aligned}\varepsilon^{ij} &= \frac{1}{2} (g_o^{ij} - g^{ij}), \\ \Delta\varepsilon^{ij} &= \frac{1}{2} (g^{ij} - G^{ij}) = -\frac{1}{2} \Delta G^{ij}.\end{aligned}\quad (11)$$

Коваріантні компоненти  $\Delta G^{ij}$  визначаються з умови:

$$G^{ik} G_{kj} = \delta_j^i. \quad (12)$$

Представимо компоненти метричного тензора в актуальній конфігурації в відповідності з (2):

$$(g^{ik} + \Delta G^{ik}) (g_{kj} + \Delta G_{kj}) - \delta_j^i = 0. \quad (13)$$

Нехтуючи приростом малих величин  $\Delta G^{ik} \Delta G_{kj}$ , одержуємо:

$$\Delta G^{ik} g_{kj} + \Delta G_{kj} g^{ik} = 0,$$

звідси

$$\Delta G^{ik} = -\Delta G_{kj} g^{ik} g^{jl}. \quad (14)$$

Коваріантні компоненти приросту деформацій в актуальній конфігурації відносно перемінної відрахункової дорівнюють:

$$\Delta\varepsilon_{kl} = \Delta\varepsilon^{ij} G_{ik} G_{jl} \approx \Delta\varepsilon^{ij} g_{ik} g_{jl} = -\frac{1}{2} \Delta G^{ij} g_{ik} g_{jl} = \frac{1}{2} \Delta G_{kl}. \quad (15)$$

Будемо вважати, що в кожній точці тіла для актуальної і проміжної відрахункової конфігурації відомі компоненти тензору перетворення  $z_{,\beta}^{\alpha'}$ , і  $Z_{\beta}^{\alpha'}$  відповідно, що обумовлюють зв'язок між місцевою та базисною системою координат:

$$z_{,\beta}^{\alpha'} = \frac{\partial z^{\alpha'}}{\partial x_{\beta}}, \quad Z_{\beta}^{\alpha'} = \frac{\partial Z^{\alpha'}}{\partial X_{\beta}}. \quad (16)$$

Подамо компоненти метричного тензору  $g_{mn}$  в місцевій системі координат через коефіцієнти перетворення і компоненти метричного тензора базисної декартової системи координат:

$$\begin{aligned}g_{ij} &= z_i^{m'} z_j^{n'} g_{m'n'}, \quad g_{\alpha'\beta'} = 1, \quad g_{\alpha'3'} = 0, \quad g_{3'3'} = 1 \\ g_{\alpha\beta} &= z_{\alpha}^{v'} z_{\beta}^{v'}, \quad g_{33} = 1\end{aligned}$$

Аналогічно,

$$G_{\alpha\beta} = Z_{\alpha}^{v'} Z_{\beta}^{v'}, \quad G_{33} = (Z^{2'})^2. \quad (17)$$

Нове положення точки А в системі  $z^{i'}$  визначається координатами:

$$Z^{\alpha'} = z^{\alpha'} + u^{\alpha'}.$$

Диференціюючи по  $x^i$ , визначимо компоненти тензора перетворення:

$$Z_{,\beta}^{\alpha'} = z_{,\beta}^{\alpha'} + u_{,\beta}^{\alpha'}$$

Представимо коваріантні компоненти метричного тензора  $G_{\alpha\beta}$  в актуальній конфігурації через компоненти тензора перетворень:

$$G_{\alpha\beta} = (z_{,\alpha}^{\nu'} + u_{,\alpha}^{\nu'}) (z_{,\beta}^{\nu'} + u_{,\beta}^{\nu'}) = z_{,\alpha}^{\nu'} z_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} u_{,\alpha}^{\nu'} + u_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'}$$

$$G_{33} = (z^{2'} + u^{2'})^2. \quad (18)$$

Перепишемо (18) в вигляді:

$$G_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \Delta G_{\alpha\beta},$$

$$G_{33} = g_{33} + \Delta G_{33},$$

де

$$\Delta G_{\alpha\beta} = z_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} u_{,\alpha}^{\nu'} + u_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'}$$

$$\Delta G_{33} = \left( 2z^{2'} u^{2'} + (u^{2'})^2 \right). \quad (19)$$

Підставляючи (19) в (15), опускаємо в подальшому знак  $\Delta$  запишемо геометричні рівняння деформованого тіла для коваріантних і контраваріантних компонент приросту деформації в проміжній відрахунковій конфігурації:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} u_{,\alpha}^{\nu'} + u_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'}),$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2} \left( 2z^{2'} u^{2'} + (u^{2'})^2 \right). \quad (20)$$

Згідно з прийнятим припущенням, співвідношення (20) справедливе при малих  $\Delta\varepsilon_{kl}$  і великих переміщеннях.

Лінійний тензор деформацій обчислюємо за формулою:

$$\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} u_{,\alpha}^{\nu'}),$$

$$\hat{\varepsilon}_{33} = z^{2'} u^{2'}.$$

При ізотермічному навантаженні зв'язок між напруженнями і деформаціями визначається співвідношеннями теорії пластичного течіння для матеріалу при ізотропному спрочненні.

Повний приріст тензора деформацій  $d\varepsilon_{ij}$  дорівнює сумі приросту пружних  $d\varepsilon_{ij}^e$  і деформацій повзучості  $d\varepsilon_{ij}^c$

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^c. \quad (21)$$

Передбачається, що пружні деформації малі і зв'язані з напруженнями узагальненим законом Гука:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}.$$

Опис деформування в умовах повзучості з урахуванням накопичення пошкодженості здійснюється на основі співвідношень теорії Качанова-Работнова [11,13]:

$$\xi_i^c = D \left( \frac{\sigma_i}{1 - \omega} \right)^m, \quad (22)$$

де інтенсивність швидкості деформацій повзучості  $\xi_c^i = \frac{d\varepsilon_c^i}{dt}$ ,

$\varepsilon_c^i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{I_2(D_\varepsilon)}$  – інтенсивність деформацій повзучості [12];  $t$  – час,  $\omega$  – параметр пошкодженості матеріалу Ю.М. Работнова [13],  $\sigma_i = \sqrt{3s_{ij}s^{ij}}/2$  – інтенсивність нормальних напружень;  $D, m$  – константи матеріалу, що залежать від температури і визначаються з базових експериментів на повзучість.

Значення величини параметра пошкодженості  $\omega = \omega(t)$  змінюється в процесі деформування матеріалу від  $\omega_0 = 0$  в вихідному стані матеріалу до  $\omega^* = 1$ , що відповідає умові локальної втрати несучої здатності.

Взаємозв'язок компонент тензора швидкостей деформацій повзучості  $\xi_{ij}^c$  і напружень має вигляд:

$$\xi_{ij}^c = \frac{d\varepsilon_{ij}^c}{dt} = \frac{3}{2} \xi_i^c \frac{s_{ij}}{\sigma_i}. \quad (23)$$

Для здійснення опису деформування матеріалу в умовах повзучості необхідно наведене співвідношення доповнити рівнянням, що описує зміни з часом параметра пошкодженості:

$$\frac{d\omega}{dt} \omega^{-\beta} = C_2 \left[ \frac{\sigma_e}{1-\omega} \right]^m,$$

де  $\sigma_e$  – еквівалентне напруження, обчислене відповідно до обраного критерію міцності [10].

Згідно з роботою [6] найбільш загальною структурою виразу для еквівалентного напруження при ізотропному характері накопичення пошкодженості є:

$$\sigma_e = \alpha \sigma_1 + \beta I_1(\sigma_{ij}) + \gamma I_2(s_{ij}),$$



де  $I_1(\sigma_{ij})$ ,  $I_2(s_{ij})$  – відповідно перший і другий інваріанти тензора  $\sigma_{ij}$  і дівіатора напружень  $s_{ij}$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$  – константи матеріалу,  $\alpha + \beta + \gamma = 1$

Наведені фізичні співвідношення дозволяють проводити опис процесу континуального руйнування двовимірних тіл на основі моделювання деформацій повзучості з урахуванням пошкодженості матеріалу.

Для отримання матриці жорсткості використовуємо лінійний зв'язок між приростом деформацій і приростом переміщень. Враховуючи залежності між коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій, отримуємо вираз варіації енергії:

$$\delta W = (\delta \{u\}^T) [K]_n \{u\}_n, \quad (24)$$

де  $[K]_n$  – матриця жорсткості:

$$[K]_n = \left\{ \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B} \wedge \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B} \wedge \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_1 \wedge \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_1 \wedge \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_2 \wedge \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_2 \wedge \end{bmatrix} \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right\}. \quad (25)$$

При поданні варіації енергії деформацій в такому вигляді:

$$\delta W = \left( \delta \{u\}^T \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B} \end{bmatrix}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{12} \left( \delta \{u\}^T \left( \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_1 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_2 \end{bmatrix}^T \right) \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}} = \delta \{u\}^T \left\{ \overset{\circ}{\tilde{r}} \right\}, \\ \left\{ \overset{\circ}{\tilde{r}} \right\} = \left[ \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B} \end{bmatrix}^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_1 \end{bmatrix}^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\} + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_2 \end{bmatrix}^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\} \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}}, \quad (26)$$

отримуємо вектор вузлових реакцій, що визначаються по значенням повних напружень в актуальній конфігурації за такою формулою (26).

### 3. Вплив геометричної нелінійності при визначенні величини ресурсу ялинкового з'єднання в умовах повзучості

Хвостовик лопатки (рис. 1) являє собою тіло із складною формою поперечного перерізу і, фактично однорідне в напрямку, перпендикулярному до площини поперечного перерізу. Зважаючи на це, розрахунок хвостовика доцільно виконувати в двовимірній постановці. При роботі ГТУ найбільш значними статичними зусиллями, що виникають в лопатках турбін і передаються на хвостовик є відцентрові зусилля розтягу від лопатки, розподілення яких вздовж поверхні хвостовика є майже сталим.

Внаслідок симетрії при розрахунку розглядалася половина поперечного перетину об'єкта (рис. 5,а). При побудові СЕ сітки використана концепція багатофрагментності.

Граничні умови визначено з умов симетрії та закріплення в радіальному напрямку:

$$u^1(z^1=0)=0, \\ u^2(z^2=0)=0,$$

$u^2(z^2=0,066R_0)=0$ . Частина поперечного перерізу в межах яких сітка є регулярною – фрагменти позначені на (рис. 5.2,а) цифрами в

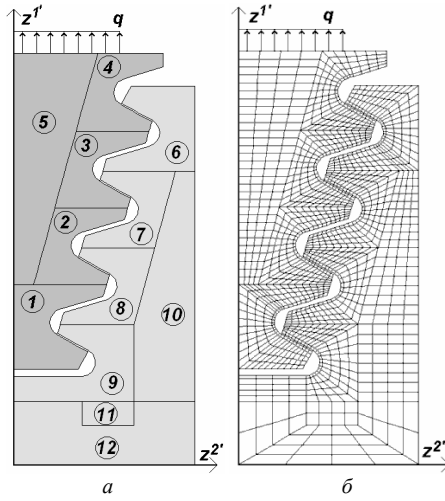


Рис. 5

кружках. Дослідження збіжності отримуваних результатів в залежності від кількості невідомих скінченоеlementної моделі проведено шляхом співставлення розподілів безрозмірної інтенсивності напружень для сіток з кількістю невідомих 1074, 3344 та 9596. Похибка визначення напружень при пружному деформуванні становить біля 2%. Тому в подальшому використовуємо сітку з кількістю невідомих 3344 (рис. 5,б).

Для опису деформування матеріалу в умовах повзучості застосовано рівняння:

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} = \frac{B\sigma^n}{(1-\omega)^r}, \quad \frac{d\omega}{dt} = C \left( \frac{\sigma}{1-\omega} \right)^m \frac{1}{(1-\omega)^q}, \quad (5.1)$$

де  $B = B(T)$ ,  $C = C(T)$ ,  $m = m(T)$ ,  $n = n(T)$ ,  $r = r(T)$ ,  $q = q(\sigma, T)$  – константи матеріалу,  $T$  – температура,  $\omega$  – параметр пошкодженості Качанова-Работнова,  $t$  – час,  $\varepsilon_c$  – інтенсивність деформацій повзучості,  $\sigma$  – інтенсивність нормальних напружень,  $\sigma_e = \sigma_i = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}$  – еквівалентне напруження.

Деформована схема об'єкта зображена на рис. 6. Розкриття в галтелі на хвостовику в фрагментах 1, 2, 3, 4 є однаковим.

Отримане розподілення безрозмірної інтенсивності напружень наведено на рис. 7. Також досліджувалася збіжність при квазірегулярному згущенні в фрагменті 1, де виникають максимальні напруження.

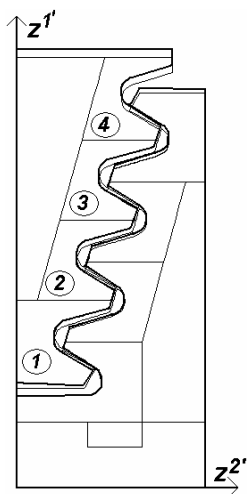


Рис 6.

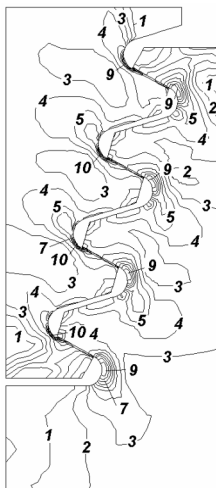


Рис 7.

Поз. на ізол.	$\sigma_i / \sigma_0$
1	0,12
2	0,24
3	0,36
4	0,48
5	0,60
6	0,72
7	0,84
8	0,95
9	1,07
10	1,19
$\sigma_i / \sigma_0 (\max)$	1,3

Згущення виконувалось в такій послідовності: по радіусу 9 елементів (рис. 8,а), по радіусу 13 елементів (рис. 8,б). В останньому варіанті в місці концентрації напружень, характерні розміри СЕ в напрямку  $z'$  суттєво перевищували розміри в напрямку  $z''$  в зв'язку з цим проведено згущення в коловому напрямку вздовж галтелі (рис. 8,в). Розподілення безрозмірної інтенсивності напружень для трьох дискретних моделей є однаковим.

Для більш детального аналізу збіжності результатів було досліджено розподілення безрозмірної інтенсивності напружень хвостовика вздовж радіусів 1, 2, 3, 4 галтелей (рис. 9), та по дузі тих самих галтелей (рис. 10), що проходить через точку максимальних напружень.

Показані результати, отримані при застосуванні скінченоелементних моделей з кількістю невідомих 3344 та 9596, які майже повністю співпали між собою (похибка менше 1%), в той же час на сітці з кількістю невідомих 1074 отримані максимальні напруження є меншими майже на 10%. Розподілення інтенсивності напружень показано на (рис. 11,а) по дузі галтелі, що проходить через точки виникнення максимальних напружень фрагмента 1 та на (рис. 11,б) по радіусу галтелі.

В подальшому досліджувався вплив геометричної нелінійності в умовах повзучості на напружено-деформований стан об'єкту та величину основного ресурсу хвостовика до досягнення параметром пошкоженості критичного значення  $\omega^* = 1$ .

На рис. 12 проілюстровано зміну безрозмірної інтенсивності напружень і пошкодженості з часом в нижній галтелі хвостовика з урахуванням і без урахування геометричної нелінійності.

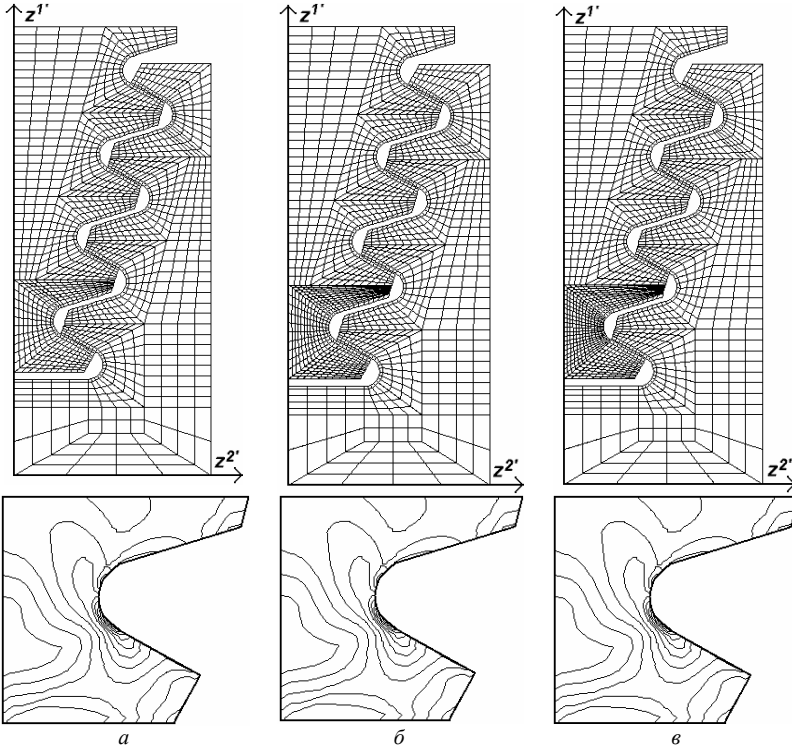


Рис. 8

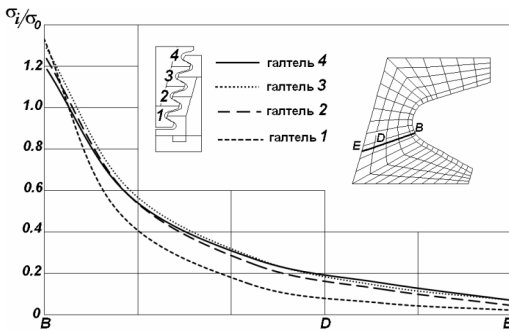


Рис. 9

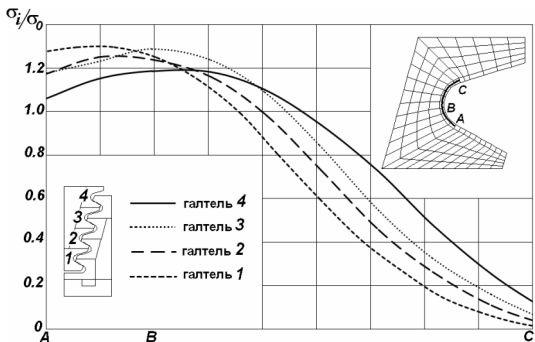


Рис. 10

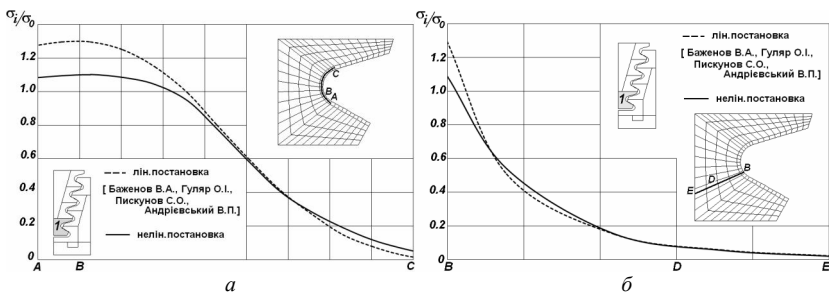


Рис. 11

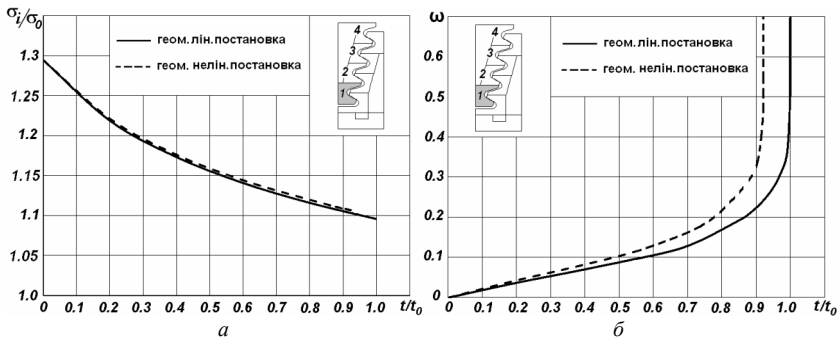


Рис. 12

На рис. 13,*а* показане накопичення різниці величини пошкодженості  $\Delta\omega$  у відсотках обчислене в точці максимальних значень  $\omega$ , 
$$\omega = \frac{\omega_{\text{геом.лн.}} - \omega_{\text{геом.нелн.}}}{\omega_{\text{геом.лн.}}} \cdot 100\%$$
 , за часом між результатами отриманими з

урахуванням і без урахування геометричної нелінійності. Розглядаючи графік можна зробити висновок, що накопичення різниці відбувається по лінійному закону. На рис. 13,б показано розподілення параметра пошкодженості вздовж радіусу цієї галтелі в момент часу  $0,8t_0$ .

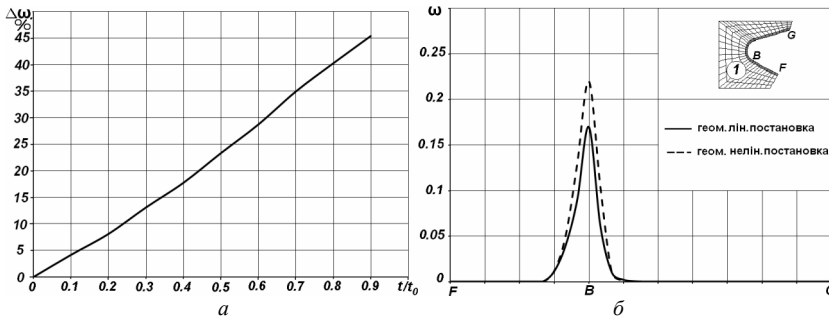


Рис. 13

Аналіз показав, що зміна інтенсивності напружень при геометрично лінійній і нелінійній постановках складає порядку біля 0,6%. В той же час величини пошкодженості відрізняються майже вдвічі, а ресурс зменшується на 8%.

На другому етапі розв'язання даної задачі проведено дослідження впливу неоднорідного температурного поля на еволюцію параметрів напружено-деформованого стану і розрахунковий ресурс хвостовика лопатки з урахуванням і без урахування геометричної нелінійності. Зміна температури по висоті поперечного перерізу хвостовика лопатки описується лінійним законом, максимальні і мінімальні значення лежать в межах  $\pm 0.5\%$  від значення температури в перерізі, що знаходиться на відстані  $0,9345R_0$  від осі обертання диска.

В першу чергу для більш детального аналізу впливу температурного поля було досліджено відмінності розподілення безрозмірної інтенсивності напружень (рис. 14,а) та пошкодженості (рис. 14,б) на протязі усього часу експлуатації в точці, де виникають максимальні напруження з урахуванням ( $T \neq \text{const}$ ) і без урахування ( $T = \text{const}$ ) неоднорідного температурного поля.

По-друге було досліджено розподілення безрозмірної інтенсивності напружень (рис. 15,а) та пошкодженості (рис. 15,б) по самій галтелі що проходить через СЕ де виникають максимальні напруження.

При проведенні розрахунку передбачалось, що внаслідок малих розмірів хвостовика по висоті вплив температурних деформацій на напружено-деформований стан є незначним. В той же час залежність

констант рівнянь (5.1) від температури приводить до суттєвих відмінностей в перебігу процесу повзучості при урахуванні неоднорідного розподілу температури, що призводить до зміни ресурсу. Для даного розподілення температури значення розрахункового ресурсу становить  $t_T=0,91t_0$ .

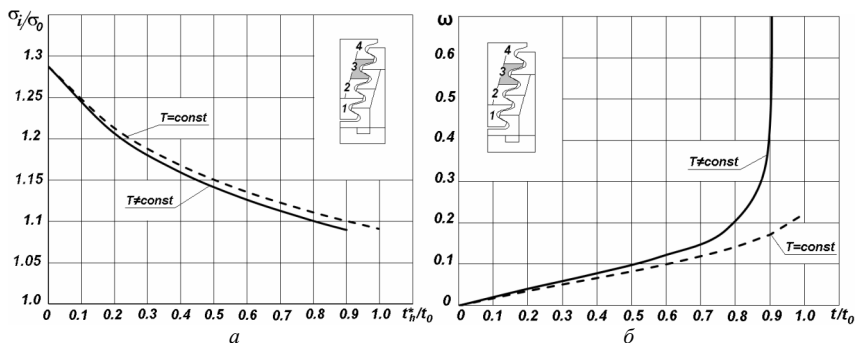


Рис. 14

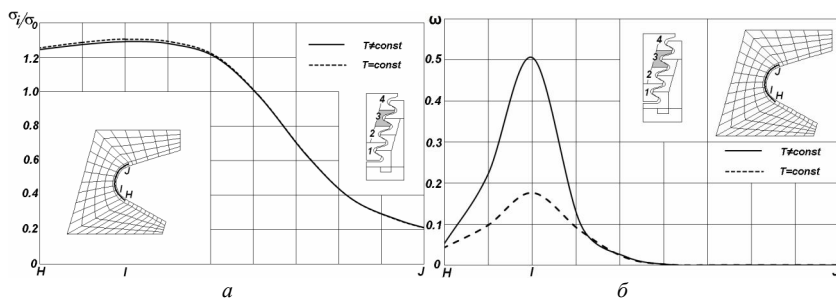


Рис. 15

З графіка зміни безрозмірної інтенсивності напружень (рис. 16,*a*) та параметра пошкоженості з часом (рис. 16,*б*), що побудовані із урахуванням та без урахування геометричної нелінійності видно, що врахування нерівномірного розподілення температури в хвостовику приводить до зміни розташування точки, де виникають максимальні значення пошкоженості порівняно з розрахунком при постійній температурі.

Максимальні значення напружень в початковий момент часу виникають в точці В, що знаходиться на галтелі фрагмента 1, а максимальні значення пошкоженості виникають в точці L фрагмента 3.

На (рис. 17,*a*) показана накопичення різниці величин пошкоженості ( $\Delta\omega$ ) за часом з урахуванням і без урахування геометричної нелінійності

для галтелі L фрагмента 3. Також на (рис. 17,б) показано зміну параметра пошкодженості вздовж радіусу цієї галтелі в момент часу  $0,8t_0$ .

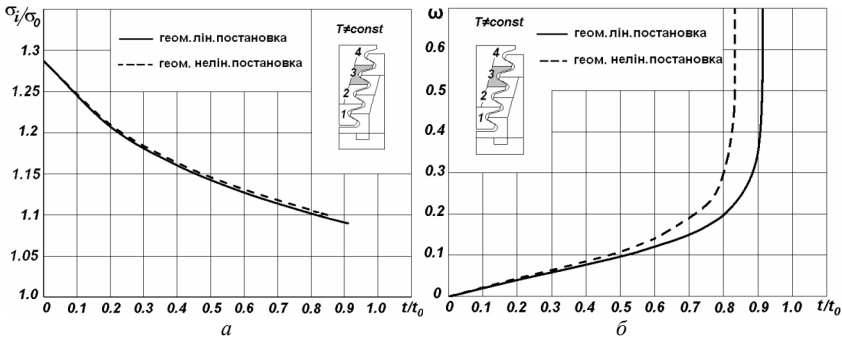


Рис. 16

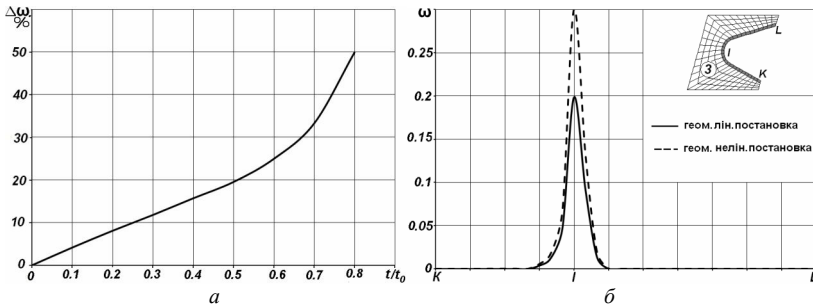


Рис. 17

**Висновки.** В даній роботі отриманий вираз матриці теплопровідності (8) плоского СЕ. Ефективність отриманих співвідношень стаціонарної теплопровідності було показано на тестовому прикладі про теплопровідність нескінченного циліндру. Отримані результати майже повністю збігаються із еталоном. Проведене дослідження урахування геометричної нелінійності на ресурс хвостика лопатки стаціонарної газотурбінної установки (ГТУ) в умовах повзучості з урахуванням пошкодженості матеріалу та в умовах термосилового навантаження показало, що врахування нерівномірного розподілення температур по висоті дозволяє уточнити розрахунковий ресурс більш ніж на 9%.



## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Анищенко Г.О., Морачковський О.К.* Обзор решений задач ползучести и разрушения елочных замковых соединений лопаток ГТД. – Весник націогального технічного університета «ХПИ» - Харьков.: №38, 2007.
2. *Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Юсильевич Г.Б.* Расчет на прочность деталей машин. Справочник. – М.: Машиностроение, 1979. – 702 с.
3. *Бойл Дж., Спенс Дж.* Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. – М.: Мир, 1976. – 360 с.
4. *Гецов Л.Б.* Материалы и прочность деталей газовых турбин. – М.: Недра, 1996. – 591с.
5. *Гецов Л.Б.* Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. – Санкт-Петербург.:Изд. Политехнического университета, 2005. – 52 с.
6. *Голуб В.П.* Нелинейная механика континуальной поврежденности и ее приложение к задачам ползучести и усталости // Прикл. механика. – 2000. – № 3. – С. 31–66.
7. *Грубин Н.А.* Расчет на прочность елочного замка лопаток турбин. – М.: Машиностроение, 1970. – 184 с.
8. *Гуляр О.І., Пискунов С.О., Максим'юк Ю.В., Сизевич Б.І* Розрахункові співвідношення МССЕ геометрично нелінійної задачі темов'язкопружно-пластичного деформування вісесиметричних тіл з урахуванням пошкодженості матеріалу. - Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.79, 2007.
9. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. –М.: Мир, 1975. – 539 с.
10. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974.– 312 с.
11. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
12. *Приложение методов теории пластичности и ползучести к решению инженерных задач в машиностроении: в 2 ч.* – К.: Вища школа, 1991.– Ч. 2. Можаровский Н.С., Качаловская Н.Е. Методы и алгоритмы решения краевых задач.: Учеб.пособие – 287 с.
13. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций.– М., Наука, 1966. – 732 с.

*Стаття надійшла до редакції 03.10.11.*

*Гуляр А.І., Пискунов С.О., Максим'юк Ю.В., Сизевич Б.І.*

### **ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ**

Рассмотрен двумерный плоский конечный элемент (КЭ) для решения стационарной задачи теплопроводности в геометрически нелинейной постановке и полученная матрица теплопроводности. Достоверность результатов, которые получаются на основе разработанной методики, обосновывается сравнением с известными аналитическими результатами.

*Guliar A.I., Piskunov S.O., Maksymiuk Y.V., Syzevych B.I*

### **THE FEATURES OF DECISION OF TWO-DIMENSIONAL TASKS OF STATIONARY HEAT-CONDUCTING AND CREEP**

Taking into account geometrical non-linearity are considered two-dimensional flat complete element (THIS) for the decision of stationary task of heat-conducting in the geometrically nonlinear raising and got matrix of heat-conducting. Authenticity of results which turn out on the basis of the developed method is grounded comparing to the known analytical results.