

УДК 539.3

Ю.В. Ворона, канд. техн. наук

А.А. Козак

О.С. Черненко

ДВОВИМІРНИЙ НДС ПРУЖНОГО МАСИВУ З ДВОМА ОТВОРАМИ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

На основі співвідношень методу потенціалу побудовано чисельний алгоритм для розв'язання у двовимірній постановці задачі про нестационарні коливання пружних масивів, послаблених отворами. Розв'язана модельна задача про коливання простору з двома циліндричними отворами.

В стані плоскої деформації за відсутності об'ємних сил динамічний деформований стан тіла описується рівнянням

$$(C_1^2 - C_2^2)u_{j,jk} + C_2^2 u_{k,jj} - \ddot{u}_k = -\Phi_k, \quad j,k=1,2. \quad (1)$$

Фундаментальний розв'язок задачі $U_{kj}(\bar{x}, \bar{y}, t)$, тобто j -а компонента переміщення в точці \bar{y} в момент часу t , яке відповідає дії в точці $\bar{x}\{x_1, x_2\}$ безмежної двовимірної області зосередженого миттєвого одиничного імпульсу, що мав місце в момент часу $t_0=0$ і діяв в k -му напрямі. Таке поле динамічних переміщень задовольняє рівнянню

$$(C_1^2 - C_2^2)u_{j,jk} + C_2^2 u_{k,jj} - \ddot{u}_k = \delta(t)\delta(\bar{x}-\bar{y}). \quad (2)$$

$$r(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$

Розв'язок рівняння (2) може трактуватись як реакція на дію в тривимірному пружному просторі миттєвого імпульсного навантаження, рівномірно з одиничною інтенсивністю розподіленого вздовж прямої, яка проходить через т. $\bar{x}\{x_1, x_2\}$ паралельно осі x_3 [1]:

$$U_{kj}(r, t) = \frac{1}{2\pi\rho} \left[\frac{H(C_1 t - r)}{C_1 r^2} f_{kj}^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, t) + \frac{H(C_2 t - r)}{C_2 r^2} f_{kj}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, t) \right], \quad (3)$$

де

$$f_{kj}^{(1)}(r, t) = \left(2d_1 + \frac{r^2}{d_1} \right) r_{,k} r_{,j} - \delta_{kj} d_1,$$

$$f_{kj}^{(2)}(r, t) = \left(2d_2 + \frac{r^2}{d_2} \right) r_{,k} r_{,j} - \delta_{kj} \left(d_2 + \frac{r^2}{d_2} \right),$$

$$d_1 = \sqrt{(C_1 t)^2 - r^2}, \quad d_2 = \sqrt{(C_2 t)^2 - r^2}.$$

Гранично-часове інтегральне рівняння за нульових початкових умов і відсутності масових сил має наступний вигляд

$$\frac{1}{2} u_k(\bar{x}_0, t) = \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} U_{kj}(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) q_j(\bar{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau - \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} T_{kj}(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) u_j(\bar{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau, \quad (4)$$

де $T_{jk}(\bar{x}, \bar{y}, t)$ - узагальнена похідна фундаментального розв'язку, тобто напруження на площинках з компонентами нормалі n_k , які виникають в пружному двовимірному просторі від дії миттєвого імпульсу, одиничної інтенсивності:

$$\begin{aligned} T_{kj}(r, t) = & \frac{1}{2\pi\rho} \left\{ \frac{H(C_1 t - r)}{C_1} \left[-g_{kj}^{(1)}(r) \left(2d_1 + \frac{r^2}{d_1} \right) - g_{kj}^{(2)}(r) \frac{r^3}{d_1^3} \right] + \right. \\ & + \frac{H(C_2 t - r)}{C_2} \left[g_{kj}^{(1)}(r) \left(2d_2 + \frac{r^2}{d_2} \right) + g_{kj}^{(2)}(r) \frac{r^3}{d_2^3} + g_{kj}^{(3)}(r) \frac{r}{d_2^3} \right] + \\ & \left. + \frac{\delta(C_1 t - r)}{C_1} g_{kj}^{(2)}(r) \left(2d_1 + \frac{r^2}{d_1} \right) - \frac{\delta(C_2 t - r)}{C_2} g_{kj}^{(2)}(r) \left(2d_2 + \frac{r^2}{d_2} \right) + g_{kj}^{(3)}(r) \frac{r}{d_2} \right\}, \quad (5) \\ g_{kj}^{(1)}(r) = & \frac{-2}{r^3} \left(\delta_{kj} \frac{\partial r}{\partial n} - 4 \frac{\partial r}{\partial n} r_{,k} r_{,j} + n_k r_{,j} + n_j r_{,k} \right), \\ g_{kj}^{(2)}(r) = & \frac{-2\mu}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial n} r_{,k} r_{,j} + \frac{1}{1-2\nu} n_j r_{,k} \right), \\ g_{kj}^{(3)}(r) = & \mu \left(\delta_{kj} \frac{\partial r}{\partial n} + n_k r_{,j} + \frac{2}{1-2\nu} n_j r_{,k} \right). \end{aligned}$$

Неважко побачити, що вираз узагальненої похідної $T_{kj}(r, t)$ містить в своєму складі величину

$$\frac{1}{[C_k^2(t-\tau)^2 - r^2]^{1/2}} \delta[C_k(t-r) - r], \quad (6)$$

яка є сингулярною, коли $C_k^2(t-\tau)^2 = r^2$, і з цієї причини потребує деяких додаткових перетворень для свого чисельного визначення. Зазначимо, що з'являється ця компонента в результаті диференціювання за просторовою координатою фундаментального розв'язку (3). Як і у задачі антиплоскої деформації, розглянутої в [2], диференціювання за просторовою координатою можна замінити диференціюванням за часом з подальшим

зменшенням сингулярності за допомогою інтегрування частинами. Похідну фундаментального розв'язку (3) за просторовою координатою запишемо наступним чином

$$\frac{\partial}{\partial x_j} U_{lk} = \frac{1}{2\pi\rho} \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ H[C_\alpha(t-\tau)-r] \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f_{lk}^{(\alpha)}}{C_\alpha r^2} \right) + \frac{f_{lk}^{(\alpha)}}{C_\alpha r^2} \frac{\partial}{\partial x_j} H[c_\alpha(t-\tau)-r] \right\}. \quad (7)$$

Беручи до уваги, що

$$\frac{\partial}{\partial x_j} H[c_\alpha(t-\tau)-r] = \frac{r_{,j}}{c_\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} H[c_\alpha(t-\tau)-r] \quad (8)$$

та

$$\frac{\partial}{\partial \tau} U_{lk} = \frac{1}{2\pi\rho} \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ H[C_\alpha(t-\tau)-r] \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{f_{lk}^{(\alpha)}}{C_\alpha r^2} \right) + \frac{f_{lk}^{(\alpha)}}{C_\alpha r^2} \frac{\partial}{\partial x_j} H[c_\alpha(t-\tau)-r] \right\}, \quad (9)$$

похідній (7) надамо вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} U_{lk} = & \frac{1}{2\pi\rho} \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ H[C_\alpha(t-\tau)-r] \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f_{lk}^{(\alpha)}}{C_\alpha r^2} \right) - \frac{r_{,j}}{C_\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{f_{lk}^{(\alpha)}}{C_\alpha r^2} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{r_{,j}}{C_\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{H(C_\alpha t - r)}{C_\alpha r^2} f_{kj}^{(\alpha)}(\bar{x}, \bar{y}, t) \right] \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

Якщо підставити (10) у вираз

$$T_{lk} = \left[\rho(C_1^2 - 2C_2^2) U_{lk,j} \delta_{km} + \rho C_2^2 (U_{lk,m} + U_{lm,k}) \right] n_m, \quad (11)$$

який пов'язує між собою розв'язки $T_{kj}(r, t)$ та $U_{kj}(r, t)$, то інтегруючи частинами за часом при нульових початкових умовах другий інтеграл у правій частині рівняння (4), будемо мати:

$$\begin{aligned} & \int_0^{t^+} T_{lk}(x, y, t-\tau) u_k(y, \tau) d\tau = \\ & = \int_0^{t^+} Z_{lk}(x, y, t-\tau) u_k(y, \tau) - W_{lk}(x, y, t-\tau) \dot{u}_k(y, \tau) d\tau. \quad (12) \end{aligned}$$

Тепер гранично-часове інтегральне рівняння (4) набуває такого вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(\bar{x}_0, t) = & \int_0^{t^+} \int_\Gamma U_{kj}(\bar{x}_0, \bar{y}, t-\tau) q_j(\bar{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau - \\ & - \int_0^{t^+} \int_\Gamma \left[Z_{kj}(\bar{x}_0, \bar{y}, t-\tau) u_j(\bar{y}, \tau) - W_{kj}(\bar{x}_0, \bar{y}, t-\tau) \dot{u}_j(\bar{y}, \tau) \right] d\Gamma_y d\tau, \quad (13) \end{aligned}$$

де

$$W_{lk} = \frac{C_2^2}{2\pi C_1^2} \left[\frac{\partial r}{\partial n} 2r_{,l} r_{,k} + \frac{\lambda}{\mu} r_{,l} n_{,k} \right] \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial r}{\partial n} (\delta_{lk} - 2r_{,l} r_{,k}) + r_{,k} n_{,l} \right] \frac{1}{R_2} \quad (14)$$

і

$$\begin{aligned} Z_{lk} = Z_{lk}^{(1)} + Z_{lk}^{(2)} = & \frac{C_2^2}{2\pi C_1} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[\delta_{lk} \left(\frac{2}{rR_1} + \frac{4R_1}{r^3} \right) - 2r_{,l} r_{,k} \left(\frac{C_1(t-\tau)-r}{R_1^3} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{4}{rR_1} + \frac{8R_1}{r^3} \right) \right] + n_{,l} r_{,k} \left(\frac{2}{rR_1} + \frac{4R_1}{r^3} \right) + n_{,k} r_{,l} \left(-\frac{\lambda}{\mu} \frac{C_1(t-\tau)-r}{R_1^3} + \frac{2}{rR_1} + \frac{4R_1}{r^3} \right) \right\} + \\ & + \frac{C_1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[-\delta_{lk} \left(\frac{2}{rR_2} + \frac{4R_2}{r^3} + \frac{C_2(t-\tau)-r}{R_2^3} \right) + 2r_{,l} r_{,k} \left(\frac{C_2(t-\tau)-r}{R_2^3} + \frac{4}{rR_2} + \frac{8R_2}{r^3} \right) \right] - \right. \\ & \left. - n_{,l} r_{,k} \left(\frac{2}{rR_2} + \frac{4R_2}{r^3} + \frac{C_2(t-\tau)-r}{R_2^3} \right) - n_{,k} r_{,l} \left(\frac{2}{rR_2} + \frac{4R_2}{r^3} \right) \right\}. \quad (15) \end{aligned}$$

Для алгебраїзації гранично-часового інтегрального рівняння (4) за звичайною процедурою МГЕ необхідно розділити область інтегрування на окремі елементи і зробити припущення про характер зміни невідомих величин (переміщень і напружень) в межах кожного з елементів. Особливість розглядуваної задачі полягає в тому, що до складу змінних додається час. Якщо прийняти, що граничні напруження в межах кожного проміжку часу залишаються постійними, то інтегрування за часом в першому з доданків у правій частині рівняння (4) може бути виконане аналітично:

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} U_{kj}(\bar{x}_0, \bar{y}, t_n - \tau) q_j(\bar{y}, \tau) d\tau = \\ & = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{4\pi\rho C_\alpha^2} \left[\delta_{lk} H_\alpha + (-1)^\alpha (\delta_{lk} - 2r_{,l} r_{,k}) G_\alpha \right], \quad (16) \end{aligned}$$

де

$$H_\alpha = \ln \frac{\left[\eta_\alpha + (\eta_\alpha^2 - 1)^{1/2} \right]}{\left[\theta_\alpha + (\theta_\alpha^2 - 1)^{1/2} \right]}, \quad G_\alpha = \eta_\alpha (\eta_\alpha^2 - 1)^{1/2} - \theta_\alpha (\theta_\alpha^2 - 1)^{1/2}, \quad (17)$$

$$\eta_\alpha = \begin{cases} C_\alpha (t_n - \tau_{m-1}) / r, & \text{при } r < C_\alpha (t_n - \tau_{m-1}) \\ 1, & \text{при } r \geq C_\alpha (t_n - \tau_{m-1}) \end{cases} \quad (18)$$

$$\theta_\alpha = \begin{cases} C_\alpha (t_n - \tau_m) / r, & \text{при } r < C_\alpha (t_n - \tau_m) \\ 1, & \text{при } r \geq C_\alpha (t_n - \tau_m) \end{cases}. \quad (19)$$

Аналогічні вирази можуть бути отримані і для обчислення другого інтегралу у правій частині рівняння (4) [1].

Наведені співвідношення складають основу методики чисельного дослідження нестационарних двовимірних коливань пружних масивів, яку було застосовано для аналізу динамічної поведінки двовимірного масиву, послабленого двома однаковими круговими отворами радіусу R . Границя одного з отворів рівномірно навантажена радіальним тиском (рис. 1), зміна якого в часі описується трапецеїдальним імпульсом [2].

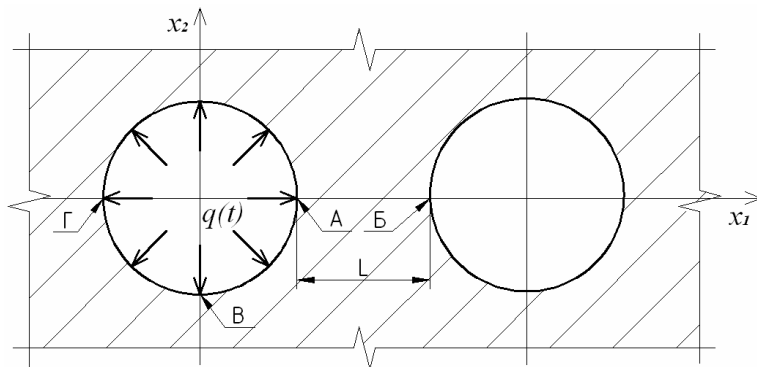


Рис. 1. Розрахункова область

Розрахунки були проведені при трьох варіантах відстані L між границями отворів - $L=2R$, $L=2R/3$ і $L=R/3$. Найменший взаємний вплив на деформацію сусіднього отвору має місце в першому випадку, коли відстань між отворами дорівнювала двом радіусам (рис. 2). На вказаному рисунку цифрою 1 позначено графік залежності від часу нормованого переміщення в т. A (точка на контурі навантаженого отвору, найближча до ненавантаженого). Цифрою 2 позначено графік залежності

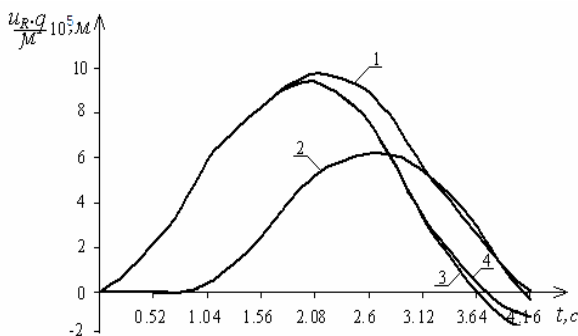


Рис. 2. Переміщення точок системи при $L=2R$

переміщення в т. B (точка на ненавантаженому отворі). Графік із позначкою 3 відповідає залежності від часу переміщення в т. B , яка є точкою перетину контуру навантаженого отвору та осі x_2 (рис. 1). І нарешті, цифрою 4 позначено графік залежності переміщення в т. Γ (точка на контурі навантаженого отвору, найвіддаленіша від ненавантаженого). Максимального значення, величиною $9.89 \cdot 10^{-5}$ м, переміщення в т. A отримує в момент часу 2.094 с., при цьому впродовж перших 0.7 с. т. B є взагалі нерухомою.

Аналогічні результати для значень $L=2R/3$ і $L=R/3$ показані відповідно на рисунках 3 і 4. Максимальні значення нормованого переміщення в т. A також мали місце в момент близько 2 с. і дорівнювали відповідно $1.79 \cdot 10^{-4}$ м і $2.99 \cdot 10^{-4}$ м.

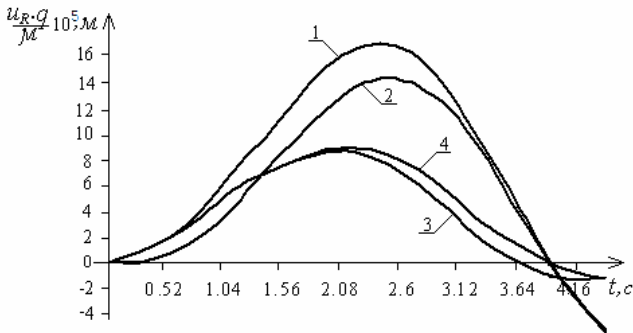


Рис. 3. Переміщення точок системи при $L=2R/3$

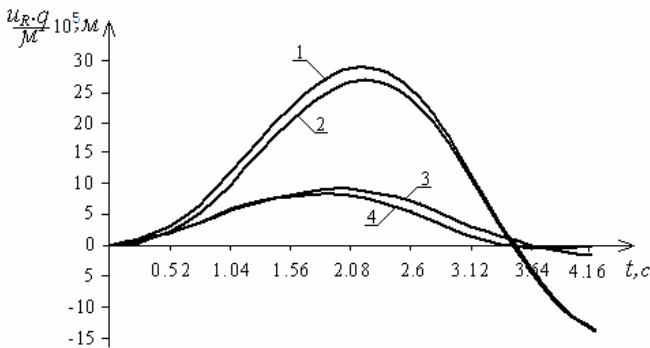


Рис. 4. Переміщення точок системи при $L=R/3$

Наведені дані наочно свідчать про роботоспроможність розробленого методологічного апарату.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Dominguez J.* Boundary Elements in Dynamics. – Southampton, Boston: Computational Mechanics Publications, 1993.
2. *Ворона Ю.В., Козак А.А., Черненко Е.С.* Методика чисельного дослідження антиплоских нестационарних коливань масивних елементів конструкцій // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2011. – Вип. 88. – С.83–96

Стаття надійшла до редакції 14.10.2012 р.

Ворона Ю.В., Козак А.А., Черненко Е.С.

ДВУМЕРНОЕ НДС УПРУГОГО МАССИВА С ДВУМЯ ОТВЕРСТИЯМИ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

На основе соотношений метода потенциала построен численный алгоритм для решения в двумерной постановке задачи про нестационарные колебания упругих массивов, ослабленных отверстиями. Решена модельная задача про колебания пространства с двумя цилиндрическими отверстиями.

Vorona Yu.V., Kozak A.A., Chernenko O.S.

DEFORMING OF 2D ELASTIC SOLID WITH TWO HOLES UNDER IMPULSE LOADINGS

The boundary element technique for analysis 2D transient vibration of elastic solids with holes is developed. Oscillations of the solid with two round holes subjected to impulse loadings were investigated.