

УДК 539.3

А.Д. Легостаєв, канд. техн. наук

Н.А. Гречух

О.О. Яковенко

## КОЛИВАННЯ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ З ПРИЄДНАНИМИ МАСАМИ

Запропонована методика побудови скінченноелементних моделей з урахуванням нерегулярностей типу 'приєднана маса' в задачах про власні коливання континуальних конструкцій. Регулярність сіткової області моделі забезпечується шляхом введення особливих СЕ, яким надається статус 'включення'. Обчислені значення частот власних коливань пластини з приєднаними масами порівнювались з тими, що отримані аналітичними методами.

На несучих поверхнях оболонок, що відчують на собі вібраційні впливи можуть бути приєднані тверді тіла (пристрої, механізми, елементи автоматики), неметалічні матеріали (армовані пластики, ситали, технічне скло), що мають специфічні фізико-механічні властивості суттєво впливають на власні коливання і обумовлюють складнощі при розрахунку вказаних механічних систем. Визначення динамічних характеристик таких конструкцій, які суттєво залежать від жорсткісних і інерційних неоднорідностей представляє собою практичний інтерес і вимагає розробки надійних методів визначення ускладненого спектра власних частот.

Коливання циліндричних оболонок з приєднаними масами досліджував В.С. Бреславський [1,2]. В.Г. Паламарчук розглядав замкнуту кругову циліндричну оболонку регулярно підкріплену стрингерами і шпангоутами що має всередині себе абсолютно тверде тіло, шарнірно прикріплене вздовж твірної. Оболонка шарнірно оперта на два ряди проміжних опор, розміщених вздовж твірних. Система симетрична відносно поздовжньої діаметральної площини. Робота [4] присвячена створенню математичної моделі взаємодії циліндричної оболонки і абсолютно жорсткого тіла, що приєднано до одного з її кінців. Альбо-Рао [5] досліджував коливання вільно опертої прямокутної пластини до якої приєднана зосереджена маса. Власні коливання підкріплених ребрами оболонок з приєднаними масами розглянуто в роботі [6]. Також досліджено випадки жорсткого і пружного приєднання маси, вплив розміру площинки контакту маси і оболонки, з'єднання твердого тіла і оболонки за допомогою двох пружин, а також шарнірне приєднання

твердого тіла до оболонки у ряді точок. У роботі [7] досліджено особливості впливу підкріплюючих ребер і приєднаних твердих тіл на частоти та форми вільних коливань тонких пружних оболонок обертання. Задача реалізується в лінійній постановці методом Рітца з урахуванням дискретного розміщення ребер.

Використання аналітичних методів для розв'язання задач динаміки пластинчато-оболонкових конструкцій з інерційною неоднорідністю вимагає високої математичної культури, так як доводиться враховувати усі особливості в розв'язувальних рівняннях.

Проведення багатоваріантних розрахунків задач динаміки тонкостінних конструкцій на сьогодні в більшості випадків виконується за методом скінченних елементів (МСЕ) в середовищі сертифікованих програмних комплексів.

В той же час, стосовно до задач динаміки тонкостінних конструкцій зі складним розподілом матеріалу питання аналізу скінченноелементних схем в сучасній науковій літературі ще не досить повно висвітлені. А тому застосування скінченноелементних моделей для визначення динамічних характеристик тонкостінних конструкцій з особливостями вимагає ретельної перевірки запропонованих моделей і порівняння наблизених результатів з отриманими аналітичним методами або експериментально.

Нами запропонована методика побудови співвідношень МСЕ в переміщеннях на основі положень тривимірної теорії пружності при одношаровій апроксимації скінченням елементом по товщині оболонки.

Нерегулярності типу приєднаних мас усуваються за допомогою введення особливих скінченних елементів, в межах яких не змінюється жорсткість конструкції, а змінюється тільки її інерційні властивості.

Нанесення сітки скінченних елементів виконується таким чином, щоб лінії сітки охоплювали ділянку з приєднаною масою. цій ділянці надається статус "включення", а вузлам сітки на границях області призначається спеціальний код. Таким чином забезпечується регулярність сіткової області і спрощується процедура побудови матриць жорсткості та інерції. для області включення задається відповідна щільність матеріалу при збереженні інших його характеристик.

Для аналізу динамічної поведінки континуального об'єкта вихідним є рівняння руху його дискретної скінченноелементної моделі

$$[K]\{\ddot{u}\}-\omega^2[M]\{u\}=0. \quad (1)$$

Розв'язком рівняння буде гармонічна функція  $\{u\}=\{u_0\}\text{Sin}(\omega t)$ , що приводить рівняння до узагальненої проблеми про власні значення

$$\left([K]\{\ddot{u}\}-\omega^2[M]\right)\{u\}=0. \quad (2)$$

Процедура розв'язання задачі виконується методом ітерацій в підпросторі, на кожному кроці якого виконуються такі дії:

1) задаються наближені значення власних векторів, кількість яких визначає розмір підпростору. Число компонент кожного вектора відповідає числу ступенів вільності дискретної моделі. З цих векторів формується модальна матриця  $[\Phi]$ ;

2) обчислюється нове наближення модальних векторів  $[K][\Phi]_{i+1}=[K][\Phi]_i$ ;

3) виконується ортогоналізація власних векторів за алгоритмом обертання Якобі. Одночасно визначаються власні числа.

Процес ітерацій по п.п.2-3 продовжується до тих пір, поки значення власних чисел  $i$ -го та  $(i+1)$ -го кроків не співпадуть з заздалегідь заданою точністю.

Для отримання необхідної кількості власних чисел (колових частот власних коливань) виконується збільшення розміру модальної матриці на 20% в порівнянні з тією, що треба визначити.

Запропонований алгоритм випробований на тестових задачах, для яких існують аналітичні розв'язки. В роботі [8] наведені результати розв'язку задачі про визначення динамічних характеристик сталевій пластини ( $E=2.1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $\rho=7.85 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu=0.3$ ) з приєднаною масою (включення чужорідного матеріалу) при різних граничних умовах: 1) жорстко защемлена по контуру; 2) два суміжних країв жорстко защемлені а два інші шарнірно оперті; 3) жорстко защемлена по трьом сторонам. Розміри пластини в плані  $0.6 \times 0.6 \times 0.001 \text{ м}$ .

Розв'язок цієї ж задачі з використанням запропонованої нами методики виконано для сітки  $32 \times 32$  скінченних елемента. Розмірність підпростору, в межах якого реалізовувався процес одночасних ітерацій, дорівнював десяти.

Розглянуто вплив розташування приєднаної маси на власні коливання пластини. Маса тіла  $M_1=0.1M_0$ , де  $M_0$  маса пластини. Площа ділянки, де розташована приєднана маса складає  $1/250$  загальної площі пластини.

В результаті розрахунку отримані форми коливань пластини без маси (рис. 1, рис. 4, рис. 7), при розміщенні маси на чверті діагоналі (рис. 2, рис. 5, рис. 8) та на половині діагоналі пластини (рис. 3, рис. 6, рис. 9) при різних граничних умовах пластини.

Результаті розв'язку задачі у вигляді залежності  $\lambda=\lambda_i(z)$   $\lambda_i=\omega^2/\omega_0^2$ , де  $\omega_0$  - частота коливань пластини без додаткової маси) представлені на графіку (рис. 10).

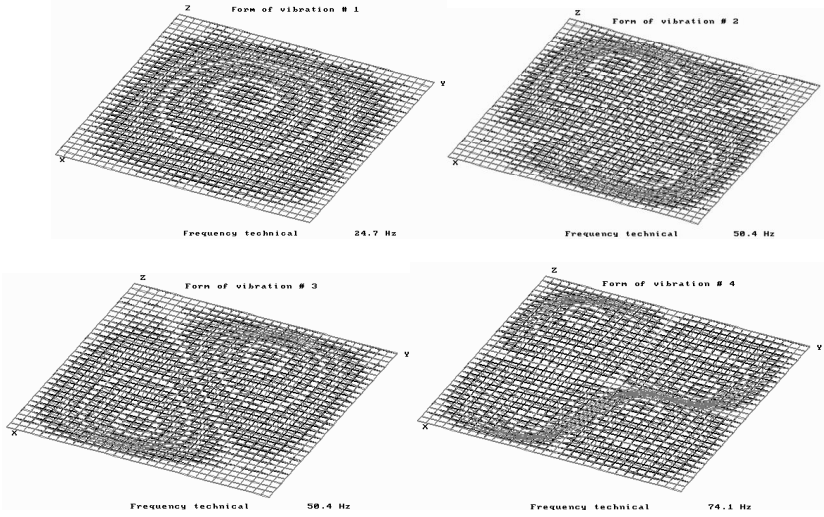


Рис. 1. Форми коливань пластини жорстко зашцевленої по контуру без приділеної маси

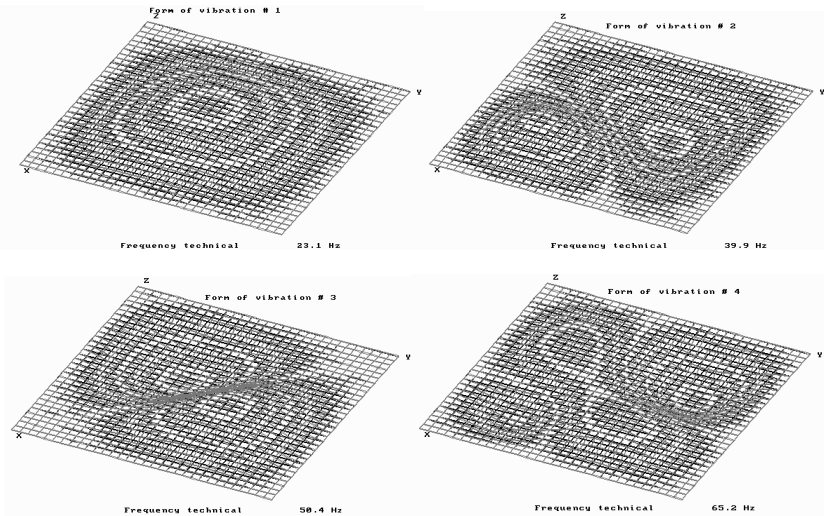


Рис. 2. Форми коливань пластини жорстко зашцевленої по контуру з приділеною масою розміщеною на чверті діагоналі

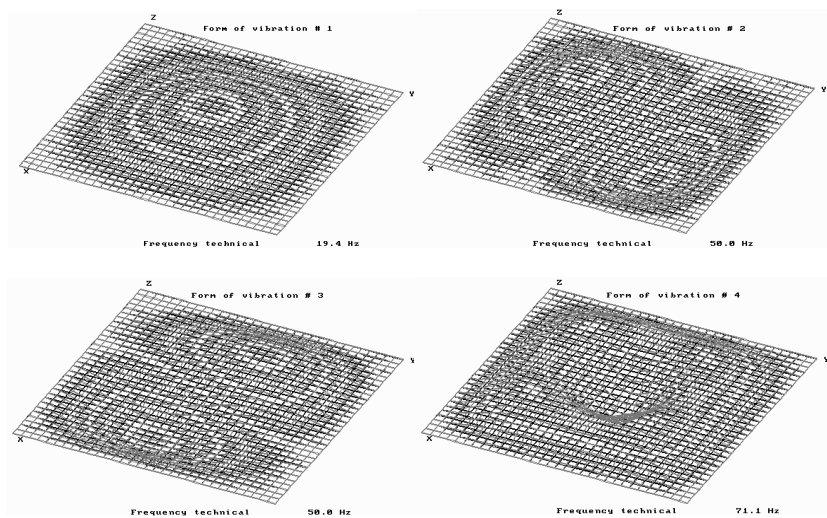


Рис. 3. Форми коливань пластини жорстко защемленої по контуру з приєднаною масою розміщеною по середині діагоналі

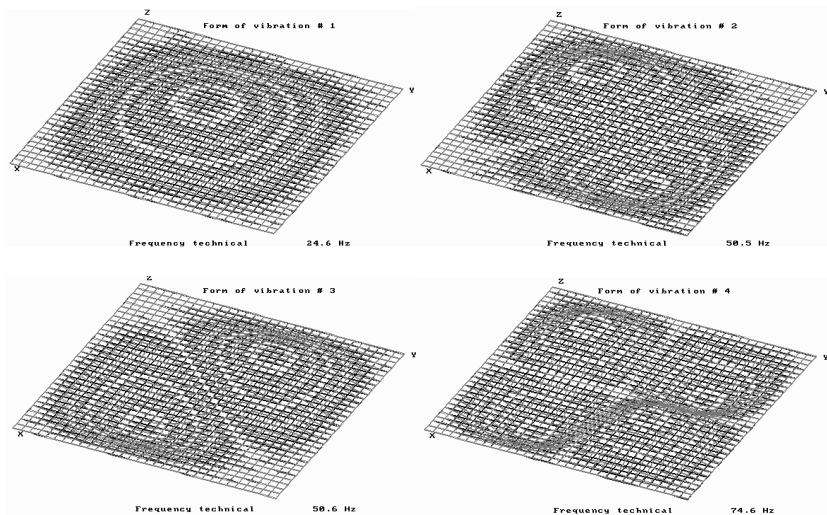


Рис. 4. Форми коливань пластини (без приєднаної маси), у якій два суміжних краї жорстко защемлені, а два інші шарнірно оперті

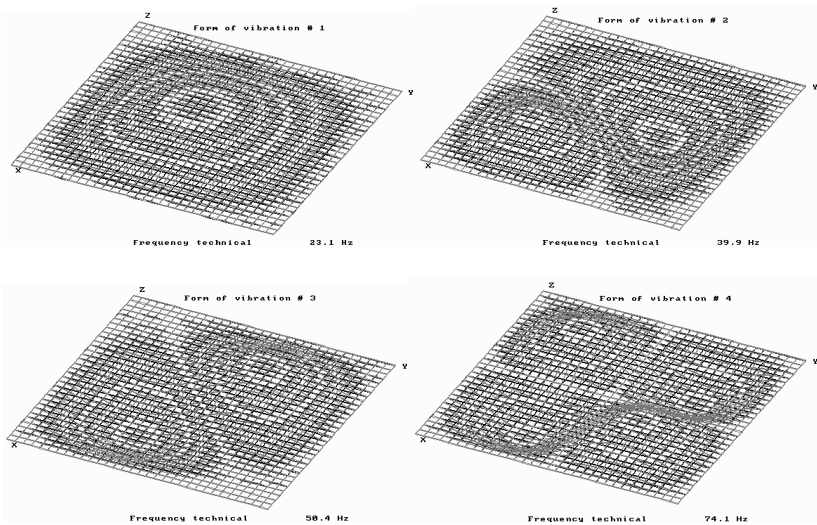


Рис. 5. Форми коливань пластини (з приднаною масою, розміщеною на чверті діагоналі), у якій два суміжних краї жорстко защемлені, а два інші шарнірно оперті

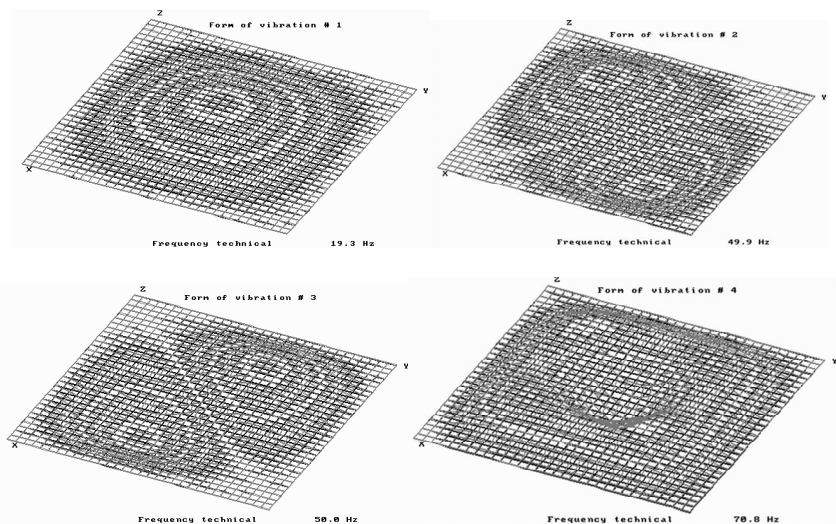


Рис. 6. Форми коливань пластини (з приднаною масою, розміщеною посередині діагоналі), у якій два суміжних краї жорстко защемлені а два інші шарнірно оперті

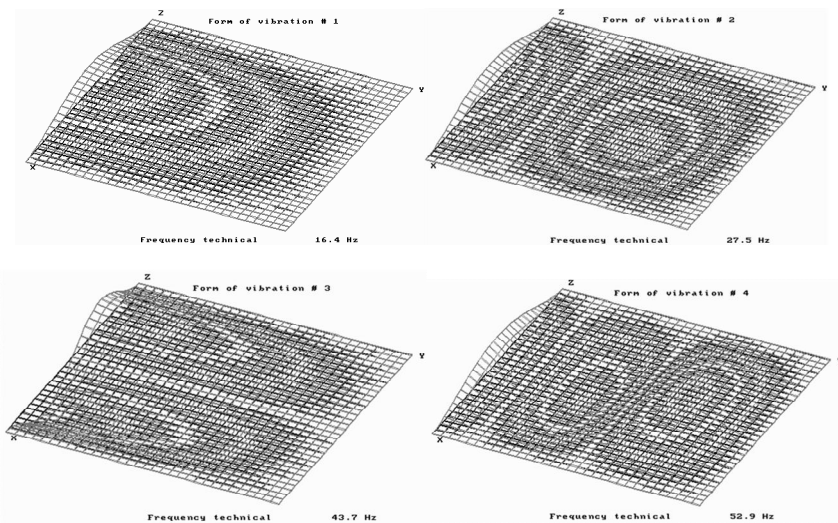


Рис. 7. Форми коливань пластини (без приєднаної маси) жорстко защемленої по трьом сторонам

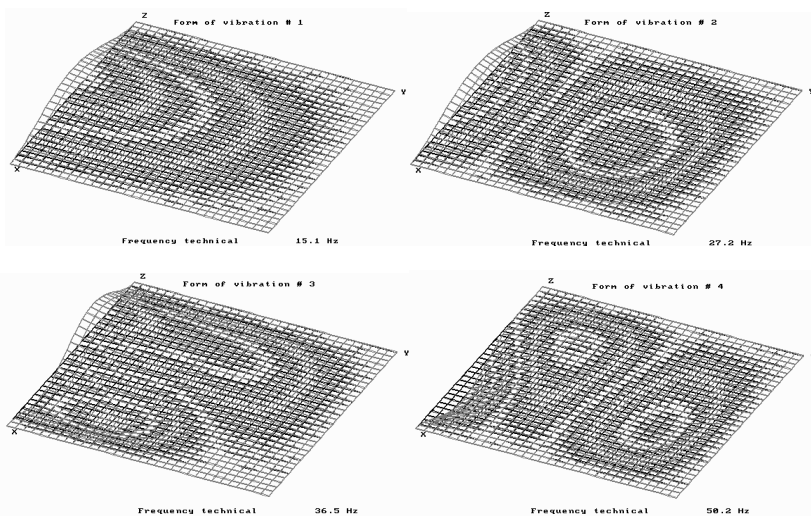


Рис. 8. Форми коливань пластини (з приєднаною масою, розміщеною на чверті діагоналі) жорстко защемленої по трьом сторонам

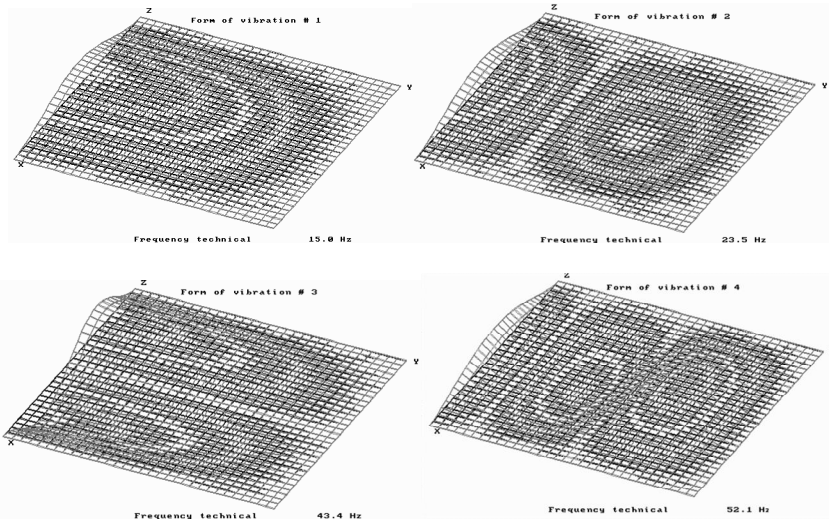


Рис. 9. Форми коливань пластини (з приєднаною масою, розміщеною посередині діагоналі) жорстко защемленої по трьом сторонам.

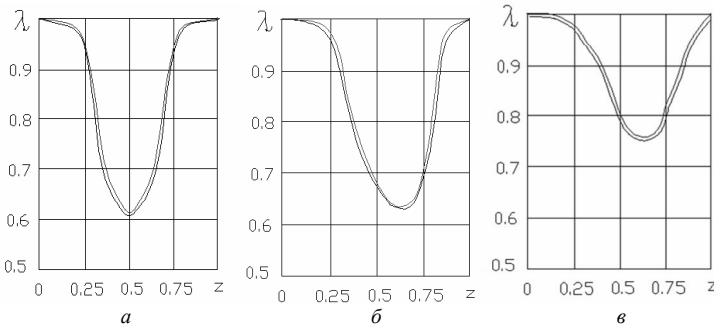


Рис. 10. Порівняння результатів розрахунку для пластини при різних граничних умовах: а) жорстко защемлена по контуру; б) два суміжних краї жорстко защемлені а два інші шарнірно оперті; в) жорстко защемлена по трьом сторонам (верхня лінія результат наведений в роботі [8], нижня лінія за мсе).

Приведені результати свідчать про ефективність методики, що застосовується і достатній практичній точності отриманих результатів.



## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бреславский В.Е.* Исследование колебаний тонких оболочек, скрепленных с наполнителем // Труды VIII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Ленинград, 21–28 мая, 1973.– М: Наука.–1973.– С. 271
2. *Бреславский В.Е.* Продольные колебания цилиндрической оболочки, скрепленной с упруго-вязким наполнителем и сосредоточенными массами // Проблемы машиностроения.– 1981.– N 14.–С. 27–32.
3. *Паламарчук В.Г.* Свободные колебания системы, состоящей из ребристой цилиндрической оболочки и абсолютно твердого тела // Прикл. мех.– 1978.–14, N 4.– С. 56–62.
4. *Yu.V. Trotsenko.* On equilibrium equations of cylindrical shell with attached rigid body, Nonlinear Oscillations 4 (2001) 422–431.
5. *Amba-Rao C.L.* On the Vibration of a Rectangular Plate Carrying a Concentrated Mass. Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics 1964:550–1.
6. *Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Паламарчук В.Г.* Динамика ребристых оболочек. Киев: Наукова думка, 1983. 204с.
7. *Каиров А.С., Каиров В.А.* Численное исследование свободных колебаний конструктивно неоднородных подкрепленных оболочек с присоединенными твердыми телами // Вісник Донецького університету, Сер.А: Природничі науки, 2008, вип.1.- С. 170-174.
8. *Беспалова Е.И.* Колебания пластин с присоединенными массами, распределенными по участку поверхности // Прикл. мех.– 1978.–23, N 6.– С. 78–83.

*Стаття надійшла до редакції 23.11.2012 р.*

*Legostaev A.D., Grechukh N.A., Yakovenko O.O.*

#### **КОЛЕБАНИЯ ОБЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ПРИСОЕДИНЕННЫМИ МАССАМИ**

Предложена методика построения конечноэлементных моделей с учетом нерегулярностей типа 'присоединена масса' в задачах о собственных колебаниях континуальных конструкций. Регулярность сеточной области модели обеспечивается путем введения особенных КЭ, которым предоставляется статус 'включения'. Вычисленные значения частот собственных колебаний пластины с присоединенными массами сравнивались с теми, которые получены аналитическими методами.

*Legostaev A.D., Grechukh N.A., Yakovenko O.O.*

#### **VIBRATIONS OF SHELL CONSTRUCTIONS WITH ATTACHED MASSES**

The method of construction of finite element models is offered taking into account irregularities of type 'attached mass' in tasks of free vibrations of continuous constructions. Regularity of net area of model is provided by introduction of special FE, to which status of 'including' is given. Determined values of frequencies of free vibrations of plate with attached masses compared to those which are got by analytical methods.