УДК 539.3

І.В. Жупаненко, канд. техн. наук

ЗАСТОСУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ НЕОДНОРІДНОГО ПОРОЖНИННОГО ТОВСТОСТІННОГО ЦИЛІНДРА

З позиції просторової задачі теорії пружності досліджено власні вісесиметричні коливання неоднорідного товстостінного циліндра скінченної довжини при різних граничних умовах на торцях. Вихідні рівняння теорії пружності в частинних похідних узагальненим методом скінченних інтегральних перетворень зведено до задачі на власні значення для системи звичайних диференціальних рівнянь високого порядку, яку розв'язано стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації спільно з методом покрокового пошуку. Достовірність результатів, отриманих по запропонованій методиці, досліджено при розв'язанні тестових задач.

Вступ. Актуальність задачі про визначення динамічних характеристик порожнинних циліндрів скінченної довжини визначається широким застосуванням конструктивних елементів і деталей циліндричної форми в будівництві, машинобудуванні, авіаційній, нафтовій і газовій промисловості, багатьох інших галузях сучасної техніки.

Разом з тим, останнім часом створюються і впроваджуються нові композитні матеріали, фізичні властивості яких можна регулювати, задаючи необхідний плавно змінний розподіл модуля пружності в заданому напрямку. При цьому підвищуються вимоги до точності оцінки міцності тіла, виникає потреба більш повного врахування реальних властивостей конструктивного матеріалу і дослідження впливу фізичних властивостей матеріалу на динамічні характеристики об’єкта.

Дослідженню вільних коливань циліндричних тіл присвячена значна кількість робіт, наприклад [1], проте лише в окремих з них розглядається задача про коливання циліндричних тіл зі змінними фізико-механічними властивостями вздовж деякого напрямку. В даній статті неоднорідні порожнинні циліндри розглядаються з позиції теорії товстостінних оболонок обертання сталої товщини. Для розв’язання задачі про власні коливання таких об’єктів застосовано узагальнений метод скінченних інтегральних перетворень в поєднанні з методом покрокового пошуку.

Постановка задачі. Розглядається пружне тіло, внутрішня та зовнішня поверхні якого є круговими циліндрами радіусом відповідно R_0 та R. Товщина $h = R - R_0$ співрозмірна з його довжиною L.

В якості вихідних рівнянь прийнято співвідношення лінійної динамічної теорії пружності в вісесиметричній постановці, записані відносно компонент вектора переміщень та напружень в циліндричній системі координат [2]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z}+\frac{1}{R_0+r}\left(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}\right)+F_r=\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{1}{R_0+r}\sigma_{rz}+F_z=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\sigma_{rr}=\left(\lambda+2\mu\right)\frac{\partial u_r}{\partial r}+\lambda\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\lambda}{R_0+r}u_r;$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\lambda\frac{\partial u_r}{\partial r}+\lambda\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\lambda+2\mu}{R_0+r}u_r;$$

$$\sigma_{zz}=\lambda\frac{\partial u_r}{\partial r}+\left(\lambda+2\mu\right)\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\lambda}{R_0+r}u_r;$$

$$\sigma_{rz}=\mu\frac{\partial u_z}{\partial r}+\mu\frac{\partial u_r}{\partial z}, \quad (2)$$

де $\lambda=E\left(r\right)\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu=E\left(r\right)\frac{1}{2(1+\nu)}$.

Методика розв’язання задачі. Редукція по товщині оболонки здійснюється шляхом застосування узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень [3], що базується на розкладі шуканих функцій напружено-деформованого стану оболонки в ряди по системі нормованих поліномів Лежандра:

$$P_i^H\left(\xi\right)=\sqrt{\frac{2i+1}{h}}\cdot P_i\left(\xi\right) \quad \left(i=0,1,2,...,N\right),$$

де $P_i(\xi)$ – поліноми Лежандра; $\xi=\frac{2(r-h_{cp})}{h}$ $\left(-1\le\xi\le1\right)$, $h_c=\frac{R+R_0}{2}$.

В результаті цього задача зводиться до одновимірної (по просторових координатах) і описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних (по просторовій – поздовжній – і часовій координатах) відносно функціональних коефіцієнтів розкладу по системі нормованих поліномів Лежандра (моментів невідомих функцій напружено-деформованого стану).

За часовою координатою при гармонійному збуджуючому навантаженні приймаємо стаціонарні коливання системи у вигляді стоячих хвиль виду:

$$u_z^i(z,t)=u_{z,0}^i(z)\cdot\sin(\theta\cdot t) \quad (u_z^i \Leftrightarrow u_r^i \Leftrightarrow \sigma_z^i \Leftrightarrow \sigma_r^i \Leftrightarrow \sigma_{zr}^i), \tag{3}$$

в результаті чого після редукції і виключення характеристик, що входять в редуковані рівняння алгебраїчно, задача про власні коливання неоднорідних товстостінних оболонок формулюється як задача на власні значення для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, записаної в нормальній формі Коші:

$$\frac{\partial u_z^i}{\partial z}=-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\cdot\left(b^{ij}+\frac{2}{h}\cdot m^{ij}\right)\cdot u_r^j+\frac{\mu}{\lambda+2\mu}[b_*^{ij}]^{-1}\cdot\sigma_{zz}^j;$$

$$\frac{\partial u_r^i}{\partial z}=-\frac{2}{h}\cdot m^{ij}\cdot u_z^j+[b_*^{ij}]^{-1}\cdot\sigma_{rz}^i;$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}^i}{\partial z}=-\frac{\rho\cdot\omega^2}{\mu}\cdot u_z^i-\left(b^{ij}-\frac{2}{h}\cdot m^{ji}\right)\cdot\sigma_{rz}^j;$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}^i}{\partial z}=\left(2\cdot b^{i\alpha}\cdot b_*^{\alpha k}\cdot b^{kj}-\frac{4}{h}\cdot b^{i\alpha}\cdot b_*^{\alpha k}\cdot m^{kj}+\frac{2\lambda}{\lambda+2\mu}\cdot\frac{2}{h}\cdot b^{i\alpha}\cdot b_*^{\alpha k}\cdot m^{jk}+\right.$$
$$\left.+\frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\cdot\frac{4}{h^2}\cdot m^{i\alpha}\cdot b_*^{\alpha k}\cdot m^{jk}-\frac{\rho\cdot\omega^2}{\mu}\cdot\delta^{ij}\right)\cdot u_r^j+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\cdot\frac{2}{h}\cdot m^{ji}\cdot\sigma_{zz}^j, \tag{4}$$

з граничними умовами для невідомих вектор-функцій, записаними у вигляді алгебраїчних співвідношень.

Матричні коефіцієнти, що входять в редуковані рівняння (4), описані в [3]. Елементи матриці $B_*=[b_*^{ij}]$ визначаються для кожного окремого випадку функції $E(r)$ за формулою:

$$b_*^{ij}=\int_{R_0}^{R} E(r)\cdot P_i^H(\xi)P_j^H(\xi)dr.$$

У випадку, коли функція E є поліномом по координаті r, елементи матриці $B_*=[b_*^{ij}]$ визначаються точно [4].

Чисельний етап методики полягає в застосуванні для розв'язання отриманих на попередньому етапі редукованих одновимірних крайових задач на власні значення алгоритму покрокового пошуку з розв'язанням двох-точкових лінійних крайових задач n-го порядку методом ортогональної прогонки С.К. Годунова при інтегруванні відповідних задач Коші за алгоритмом Рунге–Кутта–Мерсона четвертого порядку точності. Докладно алгоритм знаходження частот і форм власних коливань по запропонованій методиці описано в [5].

Тестові задачі. Для якісної і кількісної оцінки достовірності запропонованого алгоритму розв'язано тестові задачі, розв'язки яких порівняно з відомими результатами, отриманими методом сплайн-коллокації.

Задача 1. В якості першого прикладу розв'язана задача про визначення частот власних коливань порожнинного циліндра з полімерного функціонально градієнтного матеріалу, що відповідає квадратичному закону зміни модуля Юнга по товщині:

$$E(r)=26,5\cdot r^2-278,5\cdot r+839,5$$

$$\left(E(R-H)=243,0\ МПа,\ \mathrm{E(R)}=150,0\ МПа,\ E(R+H)=110,0\ МПа\right).$$

На торцях циліндра змодельовано два варіанти закріплень: умови шарнірного обпирання та жорсткого защемлення.

Щільність матеріалу вважається постійною і рівною усередненому по товщині значенню, коефіцієнт Пуассона $\nu=0,4$. Геометричні параметри циліндра: довжина – $L=5$, внутрішній радіус – $R_{внут}=R-H=3$, зовнішній радіус – $R_{зовн}=R+H=5$.

В табл. 1 наведено порівняння безрозмірних значень частот власних коливань $\overline{\omega}=\omega H\sqrt{\rho/E_0}$, визначених по запропонованій вище методиці на основі узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень (УМСІП) та значень частот, отриманих в роботі [6] на основі методу сплайн-коллокації (МСК). Для більш повної картини наведено також визначені обома методами частоти власних коливань циліндра, матеріал якого має усереднений по товщині модуль пружності $E_{cp}=158,33\ МПа$.

Таблиця 1

	Модуль Юнга	Метод	$\overline{\omega}_1$	$\overline{\omega}_2$	$\overline{\omega}_3$	$\overline{\omega}_4$	$\overline{\omega}_5$	$\overline{\omega}_6$
Шарнірне опирання	E_{cp}	УМСІП	0,311	0,610	0,673	0,935	1,170	1,200
		МСК	0,302	0,597	0,679	0,962	1,184	1,186
	$E(r)$	УМСІП	0,248	0,538	0,710	0,914	0,944	1,185
		МСК	0,309	0,598	0,654	0,956	1,127	1,700
Защемле-ння	E_{cp}	УМСІП	0,408	0,633	0,725	1,003	1,177	1,265
		МСК	0,401	0,618	0,722	0,983	1,175	1,264
	$E(r)$	УМСІП	0,409	0,591	0,752	0,968	1,177	1,269
		МСК	0,407	0,605	0,693	0,978	1,150	1,196

Задача 2. Для тестування розробленого підходу у випадку лінійного закону зміни модуля пружності по товщині циліндра розглядалась задача про власні вісесиметричні коливання порожнинного ізотропного $(\nu = 0,34)$ неоднорідного жорстко защемленого по торцях циліндра, матеріал якого має змінний по радіальній координаті модуль пружності:

$$E = \frac{E_0}{1+\alpha}\left[1+\alpha\left(\frac{r}{R-H}\right)\right].$$

Щільність матеріалу вважається постійною. Товщина циліндра – $2H$; радіус серединної поверхні – R; $H/R = 0,25$, довжина – $L = 10$.

В табл. 2 наведено порівняння безрозмірних значень частот власних коливань $\overline{\omega} = \omega H\sqrt{\rho/G_0}$, визначених по запропонованій вище методиці (УМСІП) та значень частот, отриманих в роботі [7] на основі методу сплайн-коллокації (МСК), при різній кількості півхвиль деформації *m*, що укладаються на довжині циліндра при коливаннях.

Таблиця 2

α	*m**	УМСІП	МСК
0	1	0,464	0,465
	2	0,501	0,497
	1	0,622	0,620
	3	0,769	0,765
	4	1,027	1,025
	2	1,104	1,099
	5	1,310	1,311
1	1	0,558	0,4964
	2	0,586	0,5353
	1	0,684	0,6706
	3	0,874	0,8217
	4	1,141	1,1036
	2	1,193	1,1947
	5	1,440	1,4144
2	1	0,587	0,507
	2	0,626	0,547
	1	0,707	0,686
	3	0,916	0,839
	4	1,182	1,128
	2	1,250	1,224
	5	1,486	1,447

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Loy C.T. and Lam K.Y.* Vibration of thick cylindrical shells on the basis of three-dimensional theory of elasticity // J. Sound and Vibration. – 1999. – 226, № 4. – P. 719 – 737.
2. *Новожилов В.В.* Теория упругости. – Лен.: Судпромгиз, 1958.–372 с.
3. *Чибіряков В.К., Смоляр А.М.* Теорія товстих пластин та оболонок: монографія. – Черкаси: ЧДТУ, 2002. – 160 с.: іл.
4. *Исаханов Г.В., Чибиряков В.К.* Исследование напряженно-деформированного состояния и динамического поведения толстых пластин. Сообщение 1. Методика построения разрешающих уравнений // Проблемы прочности. – 1987. – № 2. – С. 89 – 95.
5. *Жупаненко І.В.* Власні коливання товстої кільцевої пластини. // Опір матеріалів і теорія споруд. – Вып. 83. – К.: КНУБА. – 2009.
6. *Григоренко А.Я. и др.* О свободных осесимметричных колебаниях цилиндров конечной длины из полимерных функционально градиентных материалов // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2010. – Вип. 8. – С. 92 – 99.

7. *Григоренко А.Я.*, *Ефимова Т.Л.* Применение метода сплайн-аппроксимации для решения задач об осесимметричных свободных колебаниях толстостенных ортотропных цилиндров // Прикладная механика. – 2008. – 44, № 10. – С. 74 – 85.

Стаття надійшла до редакції 12.07.2013 р.

Жупаненко И.В.

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ НЕОДНОРОДНОГО ТОЛСТОСТЕННОГО ЦИЛИНДРА С ПОЛОСТЯМИ

С позиции трехмерной теории упругости исследованы свободные осесимметричные колебания толстостенного цилиндра конечной длины при различных граничных условиях на торцах. Исходные уравнения теории упругости в частных производных обобщенным методом конечных интегральных преобразований сведены к задаче на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка, которая решена устойчивым численным методом дискретной ортогонализации совместно с методом пошагового поиска. Достоверность полученных по предложенной методике результатов исследована при решении тестовых задач.

Zhupanenko I.V.

APPLICATION OF THE GENERALIZED METHOD OF FINITE INTEGRAL TRANSFORMATIONS FOR SOLUTION OF NATURAL VIBRATIONS OF THE HETEROGENEOUS THICK-WALLED CYLINDER WITH CAVITIES

A problem on natural axisymmetric vibrations of finite-length inhomogeneous thick-walled cylinder under various boundary conditions is considered on the basis of 3D theory of elasticity. The original partial equations of the theory of elasticity, using the generalized method of finite integral transforms are reduced to the problem for eager values for the high order system of ordinary differential equation. The problem is decided by the study-state numerical method of discrete ortogonalization with incremental search. The reliability of the technique has been checked by solving of the test problems.