УДК 539.3

ВПЛИВ ДЕФОРМАЦІЙ ЗСУВУ НА ЕФЕКТИВНІСТЬ РОБОТИ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ СЕНСОРІВ ТА АКТУАТОРІВ ПРИ АКТИВНОМУ ДЕМПФУВАННІ РЕЗОНАНСНИХ КОЛИВАНЬ НЕПРУЖНИХ ПЛАСТИН І ОБОЛОНОК

В.Г. Карнаухов[1]
д-р. фіз.-мат. наук

В.І. Козлов[1]
д-р. фіз.-мат. наук

Т.В. Карнаухова[2]
канд. фіз.-мат. наук

[1]*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,*
вул. Несторова, 3, м. Київ 03457

[2]*Національний технічний університет України "КПІ",*
проспект Перемоги 37, м. Київ 03056

Досліджується вплив деформацій зсуву на ефективність работи п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів при активному демпфуванні резонансних коливань трансверсально-ізотропних шарнірно обпертих циліндричної панелі і прямокутної пластини. Для моделювання коливань тонкостінних елементів з сенсорами та актуаторами використовуються дві уточнені теорії типу С.П. Тимошенка. Методом Фур'є одержано аналітичний розв'язок задачі про резонансні коливання згаданих елементів. Наведено формули для різниць потенціалів, які необхідно підвести до актуатора для компенсації механічного навантаження. Аналогічні формули одержано і для показників сенсора. Представлено також вирази для коефіцієнта демпфування резонансних коливань при сумісному використанні сенсорів та актуаторів. Ці прості формули дозволяють дати оцінку впливу деформацій зсуву на ефективність роботи сенсорів та актуаторів при активному демпфуванні резонансних коливань згаданих елементів конструкцій.

Ключові слова: пластини й оболонки, анізотропія, резонансні коливання, активне демпфування, сенсори та актуатори.

Вступ

Як конструктивні елементи, тонкі стрижні, пластини й оболонки з пасивних (без п'єзоефекту) і п'єзоактивних непружних матеріалів широко використовуються в різних галузях сучасної техніки: авіа-, машино-, суднобудуванні, космічній і ракетній техніці, цивільному будівництві, гідроакустиці, медицині, електроніці й ін. [1, 4, 8, 24, 32, 38]. Одним з основних режимів роботи таких елементів є вимушені гармонічні коливання, зокрема, резонансні. З метою зменшення динамічних напружень тонкостінних елементів конструкцій розробляються різні методи демпфування вимушених резонансних коливань. Для цієї мети широко використовуються пасивні методи, коли в структуру елемента включаються компоненти з високими гістерезисними втратами. З питань пасивного демпфування коливань тонкостінних элементів опубліковано велику кількість статей, монографій і видань енциклопедичного характеру [3, 5, 23, 24 – 26, 28, 32]. В останні роки для демпфування коливань тонкостінних елементів з пасивних металевих, полімерних чи композитних матеріалів почали застосовувати більш ефективні активні методи, коли в їх структуру включаються п'єзоелектричні компоненти. Огляд закордонних публікацій по активному керуванню стаціонарними й нестаціонарними коливаннями пластин та оболонок представлено в [30, 31, 36-39]. Результати вітчизняних авторів з цих питань висвітлено в [4, 6-9, 20-21, 29]. Основними елементами, за допомогою яких реалізується активний контроль коливань, є п'єзоелектричні сенсори та актуатори. Сенсори дають іформацію про механічний стан тіла, а з використанням актуаторів до конструкції прикладається електричне навантаження. Конструкції з пасивних матеріалів з п'єзоактивними сенсорами й актуаторами називають смарт – конструкціями, а активні матеріали – смарт – матеріалами (від англійського слова smart – розумний) [30, 36-39]. Ефективність активного демпфування коливань суттєво залежить від ефективності роботи сенсорів та актуаторів, на яку, в свою чергу, впливає багато факторів: їх геометричні й електромеханічні характеристики, механічні й електричні граничні умови, температура й ін.. Для оцінки ефективності роботи сенсорів й актуаторів використовуються такі критерії: при заданому навантаженні той актуатор більш ефективний, до якого потрібно підвести меншу різницю потенціалів для компенсації механічного навантаження; той сенсор більш ефективний, з якого знімається більша різниця потенціалів. Для моделювання механічної поведінки тонкостінних елементів використовуються різні гіпотези. Якщо вони виготовлені з анізотропного матеріалу і їх товщина недостатоньо мала, використання класичних гіпотез Кірхгофа-Лява може привести до значних похибок при розрахунку параметрів п'єзоелектричних включень. В таких випадках виникає необхідність при дослідженні ефективності роботи сенсорів та актуаторів використовувати уточнені моделі. Для оцінки ефективності роботи сенсорів та актуторів, як правило, застосовуються чисельні методи (наприклад, метод скінченних елементів). При цьому для вибору найбільш ефективного п'єзовключення потрібно перебрати багато варіантів параметрів таких включень [22]. При резонансних коливаннях можна одержати досить точні наближені вирази для оцінки ефективності роботи сенсорів та актуаторів. Такі формули для прямокутних пластин з шарнірним і жорстким защемленням торців з використанням гіпотез Кірхгофа – Лява одержано в [11-19].

В даній статті для шарнірно обпертих трасверсально-ізотропних непружних прямокутних пластин і циліндричних панелей з використанням уточнених гіпотез типу С.П.Тимошенка одержано формули для різниць потенціалів, які необхідно підвести до актуатора для компенсації заданого механічного навантаження. Аналогічні формули одержано для показників сенсора та для коефіцієнтів демпфування при сумісному використанні сенсорів та актуаторів. Ці прості формули дозволяють дати оцінку впливу деформацій зсуву на ефективніть роботи сенсорів та актуаторів і на ефективність активного демпфування резонансних коливань за їх допомогою.

1. Постановка задачі. Розглянемо тришарову оболонку обертання з товщиною $H = h_1 + h_2 + h_3$, складену з трасверсально – ізотропних в'язкопружних п'єзоелектричних шарів з товщинною поляризацією. Оболонка віднесена до криволінійної ортогональної системи координат (s, θ, z). Як базисну, вибираємо серединну поверхню внутрішнього шару оболонки. Приймається $\sigma_{zz} = 0$ і квадратичний закон зміни зсувних деформацій ε_{sz} і $\varepsilon_{\theta z}$ в межах кожного шару. При цьому зсувні напруження $\sigma_{zs}, \sigma_{\theta z}$ повинні задовольняти умовам контакту між шарами. Меридіан базисної поверхні описується рівнянням $r = r(x)$, де x відраховується вздовж вісі обертання. На п'єзоелектричних поверхнях $z = a_0, a_1, a_2, a_3$ (a_0, a_1 обмежують перший зовнішній шар; a_1, a_2 – середній шар, а a_2, a_3 – другий зовнішній шар оболонки) нанесено суцільні або дискретні електродні покриття, на яких задаються відповідні значення потенціалів $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$. Для моделювання електромеханічної поведінки матеріалів використовується концепція комплексних характеристик [9]. Спрощені визначальні рівняння одержуємо на основі вказаних вище уточнених механічних гіпотез, доповнених адекватними їм гіпотезами про розподіл по товщині електричних польових величин, коли вважається, що відмінними від нуля є компоненти вектора напруженості електричного поля E_z, E_s, E_θ і нормальна складова електричної індукції ($D_z \neq 0$, $D_s = 0, D_\theta = 0$). При цьому спрощені комплексні рівняння стану для k-го шару приймають вигляд

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ss}^k = B^k{}_{11}\varepsilon_{ss}^k + B^k{}_{12}\varepsilon_{\theta\theta}^k - \gamma^k{}_{11}E_z{}^k, \\
&\sigma_{\theta\theta}^k = B^k{}_{12}\varepsilon_{ss}^k + B^k{}_{11}\varepsilon_{\theta\theta}^k - \gamma^k{}_{11}E_z{}^k, \\
&\sigma_{s\theta}^k = 2G_{12}^k\varepsilon_{s\theta}^k, \sigma_{sz}^k = 2G_{13}^k\varepsilon_{sz}^k, \sigma_{\theta z}^k = 2G_{23}^k\varepsilon_{\theta z}^k, \\
&D_z^k = \gamma_{33}^k E_z^k + \gamma_{11}^k(e_{ss}^k + e_{\theta\theta}^k),
\end{aligned} \tag{1}$$

де

$$B_{11}^k = \frac{1}{S_{11}^{Ek} 1-(\nu^k)^2]};\ B_{12}^k = \nu^k B_{11}^k;\ \nu^k = -\frac{S_{12}^{Ek}}{S_{11}^{Ek}};\ \gamma_{11}^k = d_{31}^1(1+\nu^k)B_{11}^k;$$

$$\gamma_{33}^k = e_{33}^k[1-(k_p^2)^k];(k_p^2)^k = 2(d_{31}^k)^2/[S_{11}^{Ek} e_{33}^k(1-\nu^k)];G_{13}^k = G_{23}^k = \frac{e_{11}^k}{S_{55}^{Ek} e_{33}^k - (d_{15}^k)^2}, \tag{2}$$

$s_{ij}^{Ek}, d_{ij}^k, e_{ij}^k$ - податливості, п'єзомодулі, діелектричні проникливості матеріалу k-го п'єзоелектричного шару [4, 6-8, 29]. Якщо середній шар ($k=2$) пасивний, то $d_{31}^2 = 0$, $\gamma_{33}^2 = e_{33}^2$ (для пасивного діелектрика), $\gamma_{33}^2 = \infty$ (для металевого шару). В рівняннях стану (1) зсувні напруження апроксимуються квадратичними функціями по координаті z. Відповідно до теорії, представленої в [27], в кожному шарі вони можуть бути записані у вигляді:

$$\sigma_{sz}^k = \sigma_{s3}^k = G_{13}^k u_1(s,\theta) q^k(z), \sigma_{\theta z}^k = \sigma_{\theta 3}^k = G_{13}^k v_1(s,\theta) q^k(z). \quad (k=1,2,3) \tag{3}$$

Функції $u_1(s,\theta), v_1(s,\theta)$ знаходяться з розв'язку задачі для всього пакету шарів, а $\sigma_{sz}^k = \sigma_{13}^k, \sigma_{s3}^k = \sigma_{23}^k$ знаходяться шляхом інтегрування рівнянь рівноваги

$$\sigma_{i3}^k = -\int \sigma_{ij,j} dz + \Phi_3^k\ . \tag{4}$$

Функції інтегрування Φ_3^k визначаються з умов контакту шарів оболонки й умов на зовнішніх поверхнях. Поперечні зсувні деформації для кожного шару знаходяться з рівнянь стану (1)

$$e^k{}_{sz} = e^k{}_{13} = \frac{1}{2} u_1(s,\theta) q^k(z), \mathrm{e}^k{}_{\theta z} = \mathrm{e}^k{}_{23} = \frac{1}{2} v_1(s,\theta) q^k(z). \tag{5}$$

В подальшому будемо розглядати такі оболонки, для яких можна знехтувати $\frac{z}{R_1}, \frac{z}{R_2}$ в порівнянні з 1 (R_1, R_2 – радіуси головних кривизн базової поверхні). В цьому випадку, наприклад, для тришарової оболонки симетричної будови, коли

$$\mathrm{B}_{11}^1 = \mathrm{B}_{11}^3, \mathrm{G}_{13}^1 = \mathrm{G}_{13}^3, \mathrm{G}_{23}^1 = \mathrm{G}_{23}^3; \quad a_3 = -a_0, a_2 = -a_1,$$

апроксимуючі функції $\mathrm{q}^k(z)(k=1,2,3)$ можна записати у вигляд:

$$q^1(\mathrm{z}) = \frac{B_{11}^1}{2G_{13}^1}\left(1 - \frac{z^2}{a_0^2}\right), q^3(\mathrm{z}) = q^1(\mathrm{z}),$$
$$q^2(\mathrm{z}) = \frac{B_{11}^2}{2G_{13}^2}\left[\frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{z^2}{a_0^2} + \frac{B_{11}^1}{B_{11}^2}\left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2}\right)\right]. \quad (6)$$

Використовуючи співвідношення Коші, після інтегрування виразів (5) по товщині компоненти вектора зміщень запишемо у вигляді:

$$u^k = u_0 - \frac{\partial w}{\partial s} z + u_1 f^k(z), \quad v^k = v_0 - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} z + v_1 f^k(z), \quad (7)$$

де u_0, v_0 – тангенціальні зміщення базової поверхні $z = 0$, w – нормальний прогин оболонки, а

$$f^k(z) = f_1^k(z) + f_0^k(z),$$
$$f_1^1(z) = \frac{B_{11}^1}{2G_{13}^1}\left(z - \frac{z^3}{3a_0^2}\right), f_1^2(z) = \frac{B_{11}^2}{2G_{13}^2}\left[\frac{a_1^2}{a_0^2} z - \frac{z^3}{3a_0^2} + \frac{B_{11}^1}{B_{11}^2}\left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2}\right) z\right],$$
$$f_1^3(z) = f_1^1(z), f_0^1 = \frac{B_{11}^2}{2G_{13}^2}\left[\frac{2a_1^3}{3a_0^2} + \frac{B_{11}^1}{B_{11}^2}\left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2}\right) a_1\right] - \frac{B_{11}^1}{2G_{13}^1}\left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2}\right) a_1, \quad (8)$$
$$f_0^2 = 0, f_0^3 = -f_0^1.$$

З використанням залежностей (7) і співвідношень Коші [3] для компонент тензора деформацій к-го шару матимемо:

$$\varepsilon_{ss}^k = \varepsilon_{ss}^0 + \kappa_{ss} z + \delta_{ss} f^k(z), \varepsilon_{\theta\theta}^k = \varepsilon_{\theta\theta}^0 + \kappa_{\theta\theta} z + \delta_{\theta\theta} f^k(z),$$
$$\varepsilon_{s\theta}^0 = \varepsilon_{s\theta}^0 + \kappa_{s\theta} z + \delta_{s\theta} f^k(z), e_{sz}^k = \frac{1}{2} u_1 q^k(z), e_{\theta z}^k = \frac{1}{2} v_1 q^k(z), \quad (9)$$

де

$$\varepsilon_{ss}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{w}{R_1}, \kappa_{ss} = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \delta_{ss} = \frac{\partial u_1}{\partial s}, \varepsilon_{\theta\theta}^0 = \frac{1}{r}\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\cos\alpha}{r} u^0 + \frac{w}{R_2}, \kappa_{\theta\theta} = -\left(\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{cos\alpha}{r}\frac{\partial w}{\partial s}\right),$$
$$\delta_{\theta\theta} = \frac{\partial v_1}{r\partial \theta} + \frac{cos\alpha}{r} u_1, \varepsilon_{s\theta}^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial s} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{\cos\alpha}{r} v_0\right), \kappa_{s\theta} = -\left(\frac{\partial^2 w}{r \partial s \partial \theta} - \frac{cos\alpha}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right),$$
$$\delta_{s\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{cos\alpha}{r} v_1\right). \quad (10)$$

Відповідно до вказаної вище гіпотези відносно індукції D_z для кожного п’єзошару $D^k{}_z = D^k{}_z(\mathrm{s}, \theta)$. Після інтегрування залежності $[4]$

$$E^k{}_z = \frac{1}{\gamma^k_{33}} D^k{}_z - \frac{\gamma_{11}{}^k}{\gamma_{33}{}^k}[\left(\varepsilon_{ss}{}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}{}^0\right) + \left(\chi_{ss}{}^0 + \chi_{\theta\theta}{}^0\right) z + \left(\delta ss + \delta_{\theta\theta}\right) f^k\left(z\right)] \quad (11)$$

по товщині оболонки одержимо

$$D^k{}_z\left(s,\theta\right) = -\frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{H_1{}^k} + \left(\varepsilon_{ss}{}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}{}^0\right)\frac{H_2{}^k}{H_1{}^k} + \left(\kappa_{ss}{}^0 + \kappa_{\theta\theta}{}^0\right)\frac{H_3{}^k}{H_1{}^k} + \left(\delta_{ss} + \delta_{\theta\theta}\right)\frac{H_4{}^k}{H_1{}^k}. \quad (12)$$

Тут введено такі позначення:

$$H_1{}^k = \frac{a_k - a_{k-1}}{\gamma^k{}_{33}}, H_2{}^k = \frac{\gamma^k{}_{11}}{\gamma^k{}_{33}}\left(a_k - a_{k-1}\right), H_3{}^k = \frac{\gamma^k{}_{11}}{2\gamma^k{}_{33}}\left(a^2{}_k - a^2{}_{k-1}\right),$$

$$H_4{}^k = \frac{\gamma^k{}_{11}}{\gamma^k{}_{33}}\left[\left(F\left(a_k\right) - F\left(a_{k-1}\right)\right)\right], \mathrm{F}^k = \int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} f^k\left(z\right) dz. \quad (13)$$

Враховуючи (11), рівняння стану (1) можна записати у вигляді:

$$\sigma^k{}_{ss} = A_{11}{}^k \varepsilon_{ss}{}^k + A_{12}{}^k \varepsilon_{\theta\theta}{}^k - \frac{\gamma_{11}{}^k}{\gamma_{33}{}^k} D_z{}^k, \sigma^k{}_{\theta\theta} = A_{12}{}^k \varepsilon_{ss}{}^k + A_{11}{}^k \varepsilon_{\theta\theta}{}^k - \frac{\gamma_{11}{}^k}{\gamma_{33}{}^k} D_z{}^k,$$

$$\sigma^k{}_{s\theta} = 2G_{12}{}^k \varepsilon_{s\theta}{}^k, \sigma^k_{sz} = G_{13}{}^k u_1 q^k\left(z\right), \quad \sigma^k{}_{\theta s} = G_{23}{}^k v_1 q^k\left(z\right), \quad (14)$$

де

$$A_{11}{}^k = B^k{}_{11} + \frac{\gamma_{11}{}^k \gamma_{11}{}^k}{\gamma_{33}{}^k}, A_{12}{}^k = B^k{}_{12} + \frac{\gamma_{11}{}^k \gamma_{11}{}^k}{\gamma_{33}{}^k}. \quad (15)$$

Розв’язок задачі про коливання оболонки при дії на неї нормального тиску P_0 знаходиться з використанням тривимірного варіаційного рівняння [4, 9]

$$\delta Э = 0, \quad (16)$$

де

$$Э = \frac{1}{2}\int\limits_v \left(C^E{}_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - 2e_{ijk}E_i\varepsilon_{jk} - \mu_{ij}{}^s E_i E_j - \rho\omega^2 u_k u_k\right) dV - \int\limits_S P_k u_k dS. \quad (17)$$

З врахуванням указаних вище гіпотез і співвідношень варіаційне рівняння (17) для оболонки обертання зводиться до двохвимірного

$$\partial Э = \partial Э_1 + \partial Э_2 + \partial Э_3 = 0. \quad (18)$$

Тут введено такі позначення:

$$Э_1=\frac{1}{2}\iint_v\begin{bmatrix}C_{11}\left(\varepsilon_{ss}{}^0\right)^2+2C_{12}\varepsilon_{ss}{}^0\varepsilon_{\theta\theta}{}^0+C_{11}\left(\varepsilon_{\theta\theta}{}^0\right)^2+4C_{44}\left(\varepsilon_{\theta s}{}^0\right)^2+\\ +D_{11}\kappa^2{}_{SS}+2D_{11}\kappa_{SS}\kappa_{\theta\theta}+D_{11}\kappa^2{}_{\theta\theta}+4D_{44}\kappa^2{}_{S\theta}+2(D_{11}^{\kappa}\kappa_{ss}\delta_{ss}+D_{12}^{\kappa}\kappa_{ss}\delta_{\theta\theta}+\\ +D_{21_{21}}^{\kappa}\kappa_{\theta\theta}\delta_{ss}+D_{11}^{\kappa}\kappa_{\theta\theta}\delta_{\theta\theta}+4D_{44}^{\kappa}\kappa_{s\theta}\delta_{s\theta})+\\ +D_{11}^{\delta}\delta^2{}_{ss}+2D_{12}^{\delta}\delta_{\theta\theta}\delta_{ss}+D_{22}^{\delta}\delta^2{}_{\theta\theta}+4D_{44}^{\delta}\delta_{s\theta}{}^2+C_{55}u_1{}^2+C_{55}v_1{}^2\end{bmatrix}rdsd\theta,$$

$$Э_2=-\frac{1}{2}\iint_F\omega^2\begin{Bmatrix}\rho_1\left(u^2{}_0+v^2{}_0+w^2\right)+\rho_2\left[\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2\right]+\\ +\rho_3(u^2{}_1+v^2{}_1)-2\rho_4\left(\frac{\partial w}{\partial s}u_1+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}v_1\right)\end{Bmatrix}rdsd\theta,$$

$$Э_3=\frac{1}{2}\iint_F\left\{(\varphi_k-\varphi_{k-1})\left[\left(\varepsilon_{SS}{}^0+\varepsilon^0{}_{\theta\theta}\right)\frac{H_2{}^k}{H_1{}^k}+(\kappa_{SS}+\kappa_{\theta\theta})\frac{H_3{}^k}{H_1{}^k}+(\delta_{SS}+\delta_{\theta\theta})\frac{H_4{}^k}{H_1{}^k}\right]-P_0w\right\}rdsd\theta,$$

$$C_{ij}=\int_{a_{k-1}}^{a_k}A^k{}_{ij}dz-\frac{H_2{}^kH_2{}^k}{H_1{}^k},D_{ij}=\int_{a_k-1}^{a_k}A_{ij}^kz^2dz-\frac{H_3^kH_3^k}{H_1^k},D_{ij}^{\kappa}=\int_{a_k-1}^{a_k}A_{ij}^kzf^k(z)dz-\frac{H_3^kH_4^k}{H_1^k},$$

$$D_{ij}^{\delta}=\int_{a_k-1}^{a_k}A_{ij}^k(f^k(z))^2dz-\frac{H_4^kH_4^k}{H_1^k},\ C_{44}=\int_{a_k-1}^{a_k}G_{12}^kdz,\ D_{44}=\int_{a_k-1}^{a_k}G_{12}^kz^2dz,\ D_{44}^{\kappa}=$$

$$=\int_{a_k-1}^{a_k}G_{12}^kzf^k(z)dz,\ D_{44}^{\delta}=\int_{a_k-1}^{a_k}G_{12}^k(f^k(z))^2dz,\ C_{55}=\int_{a_k-1}^{a_k}G_{13}^k(q^k(z))^2dz,$$

$$\rho_1=\int_{a_k-1}^{a_k}\rho^kdz,\rho_2=\int_{a_k-1}^{a_k}\rho^kz^2dz,\rho_3=\int_{a_k-1}^{a_k}\rho^kf^k(z)f^k(z)dz,\rho_4=\int_{a_k-1}^{a_k}\rho^kzf^k(z)dz. \tag{19}$$

При механічному навантаженні для випадку розімкнутих електродів з умови $\iint_s D_z ds=0$ можна визначити різницю потенціалів між електродами

$$\varphi_k-\varphi_{k-1}=\frac{1}{\iint_s\frac{ds}{H_1^k}}\iint_s\left[\left(e_{ss}{}^0+e_{\theta\theta}{}^0\right)\frac{H_2{}^k}{H_1{}^k}+\left(\kappa_{ss}{}^0+\kappa_{\theta\theta}{}^0\right)\frac{H_3{}^k}{H_1{}^k}+(\delta_{ss}+\delta_{\theta\theta})\frac{H_4{}^k}{H_1{}^k}\right]ds\,. \tag{20}$$

Тут S - площа електродів, з яких знімається різниця потенціалів, k - номер шару оболонки.

Для демпфування коливань тонкостінних елементів при сумісному використанні сенсорів та актуаторів до актутору підводиться різниця потенціалів φ_a , яка пов'язана з показниками сенсора φ_s рівнянням оберненого зв'язку:

$$\varphi_a = G_1\varphi_s + G_2\frac{\partial\varphi_s}{\partial t} + \frac{\partial^2\varphi_s}{\partial t^2}. \quad (21)$$

У випадку гармонічного деформування воно приймає вигляд:

$$\varphi_a = G_1\varphi_s + i\omega G_2\varphi_s - \omega^2 G_3\varphi_s, \quad (22)$$

де G_i –параметри керування, ω - частота.

При дослідженні коливань неоднорідних пластин і оболонок широко використовується теорія С.П. Тимошенка, в якій поле зміщень характеризується п'ятьма незалежними функціями - прогином w , двома тангенціальними зміщеннями u_0, v_0 серединної поверхні і двома функціями, які характеризують незалежний поворот нормалі u_1, v_1 :

$$w = w(s,\theta), u(s,\theta,z) = u_0(s,\theta) + zu_1(s,\theta), v = v_0(s,\theta) + zv_1(s,\theta). \quad (23)$$

Зв'язок між компонентами деформацій і компонентами вектора зміщень визначається такими залежностями:

$$\varepsilon^0{}_{ss} = \frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{w}{R_1}, \kappa_{ss} = \frac{\partial u_1}{\partial s}, \varepsilon^0{}_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_0}{\partial\theta} + \frac{\cos\alpha}{r}u^0 + \frac{w}{R_2},$$

$$\kappa_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_1}{\partial\theta} + \frac{\cos\alpha}{r}u_1, \varepsilon^0{}_{S\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial s} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_0}{\partial\theta} - \frac{\cos\alpha}{r}v_0\right),$$

$$\kappa_{s\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial\theta} - \frac{\cos\alpha}{r}v_1\right), \varepsilon_{sz} = \frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u_0}{R_1}\right), \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(v_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta} - \frac{v_0}{R_1}\right), \quad (24)$$

Повні деформації знаходяться за формулами:

$$\varepsilon_{ss} = \varepsilon^0{}_{ss} + \kappa_{ss}z, \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon^0{}_{\theta\theta} + \kappa_{\theta\theta}z, \varepsilon_{s\theta} = \varepsilon^0{}_{s\theta} + \kappa_{s\theta}z, \varepsilon_{sz} = \varepsilon_{13}, \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{23}. \quad (25)$$

Спрощений вираз для напруженості електричного поля має вигляд:

$$E_z^k = \frac{1}{\gamma_{33}^k}D_z^k - \frac{\gamma_{11}^k}{\gamma_{33}^k}(\varepsilon_{ss}^k + \varepsilon_{\theta\theta}^k). \quad (26)$$

Підставляючи (25), (26) в (17), одержимо наступний вираз для двовимірного функціоналу:

$$Э = Э_1 + Э_2 + Э_3, \quad (27)$$

де для вказаної структури оболонки по товщині

$$Э_1=\frac{1}{2}\iint\limits_{v}\left[\begin{array}{l}C_{11}\left(\varepsilon_{ss}{}^{0}\right)^2+2C_{12}\varepsilon_{ss}{}^{0}\varepsilon_{\theta\theta}{}^{0}+C_{11}\left(\varepsilon_{\theta\theta}{}^{0}\right)^2+4C_{44}\left(\varepsilon_{\theta s}{}^{0}\right)^2+\\+D_{11}\kappa^2{}_{SS}+2D_{12}\kappa_{SS}\kappa_{\theta\theta}+D_{11}\kappa^2{}_{\theta\theta}+4D_{44}\kappa^2{}_{S\theta}+4C_{55}(\varepsilon_{13}{}^2+\varepsilon_{23}{}^2)\end{array}\right]rdsd\theta,$$

$$Э_2=-\frac{1}{2}\iint\limits_{F}\omega^2\left\{\rho_1\left(u_0^2+v_0^2+w^2\right)+2\rho_2\left(u_0u_1+v_0v_1\right)+\rho_3(u_1^2+v_1^2)\right\}rdsd\theta,$$

$$Э_3=-\frac{1}{2}\iint\limits_{F}\left\{\left(\varphi_k-\varphi_{k-1}\right)\left[\left(\varepsilon_{SS}{}^{0}+\varepsilon^{0}{}_{\theta\theta}\right)\frac{H_2{}^k}{H_1{}^k}+\left(\kappa_{SS}+\kappa_{\theta\theta}\right)\frac{H_3{}^k}{H_1{}^k}\right]-P_0w\right\}rdsd\theta.$$

Тут C_{ij}, D_{ij} визначаються по виписаним вище формулам (19), а

$$C_{44}=\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k}G_{12}dz, D_{44}=\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k}G_{12}z^2dz, C_{55}=\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k}G_{13}dz.$$

2. Аналітичний розв’язок задачі. Лінійні задачі про коливання шарнірно обпертої циліндричної панелі з сенсорами та актуаторами мають аналітичний розв’язок, який може бути використано, як еталонний, при розробці чисельних методів. Сформульована вище задача зводиться до розв’язку варіаційної задачі (19) при таких граничних умовах:

$$\begin{gathered}w=0, M_x=0, v_0=0, v_1=0\ \ (x=0;a),\\ w=0, M_y=0, \mathrm{u}_0=0, \mathrm{u}_1=0\ (y=0,\mathrm{b})\quad \left(y=R\theta\right)\end{gathered}\qquad(28)$$

Розв’язок шукається у вигляді подвійних рядів Фур’є

$$w=0,\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}w_{mn}\sin k_mx\sin p_ny, \mathrm{u}_0=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u^{0}{}_{mn}\cos k_mx\sin p_ny,$$

$$v_0=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}v^{0}{}_{mn}\sin k_mx\cos p_ny, u_1=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}v^{0}{}_{mn}\cos k_mx\sin p_ny,$$

$$v_1=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}v^{1}{}_{mn}\sin k_mx\cos p_ny, k_m=\frac{m\pi}{a}, p_n=\frac{n\pi}{b}.\qquad(29)$$

Представимо компоненти механічного й електричного навантаження також у вигляді рядів Фур’є

$$P_0=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P_{mn}\sin k_mx\sin p_ny,$$

$$\varphi_k-\varphi_{k-1}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi^{k}{}_{mn}\sin k_mx\sin p_ny, P_{mn}=\frac{16P_0}{abk_mp_n}, \varphi^{k}{}_{mn}=\frac{16(\varphi_k-\varphi_{k-1})}{abk_mp_n}.\qquad(30)$$

Враховуючи (29) і (30), з умови стаціонарності функціоналу (27) для визначення коефіцієнтів рядів Фур'є для $w_{mn},...,v^1{}_{mn}$ одержимо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\left(C_{11}k_m{}^2+C_{44}p_n{}^2-\omega^2\rho_1\right)u^0{}_{mn}+\left(C_{12}+C_{44}\right)k_m p_n v^0{}_{mn}=C_{12}k_m\frac{w_{mn}}{R}+\varphi^k{}_{mn}\frac{H^k{}_2}{H^k{}_1}k_m,$$

$$\left(C_{12}+C_{44}\right)k_m p_n u^0{}_{mn}+\left(C_{11}p^2{}_n+C_{44}k_m{}^2-\omega^2\rho_1\right)v^0{}_{mn}=C_{11}p_n\frac{w_{mn}}{R}+\varphi^k{}_{mn}\frac{H^k{}_2}{H^k{}_1}p_n,$$

$$\left(D^\delta{}_{11}k_m{}^2+D^\delta{}_{44}p_n{}^2+C_{55}-\omega^2\rho_3\right)u^1{}_{mn}+\left(D^\delta{}_{12}+D^\delta{}_{44}\right)k_m p_n v^1{}_{mn}=$$

$$=\left[D^\kappa{}_{11}k_m\left(k_m{}^2+p^2{}_n\right)-\omega^2\rho_4 k_m\right]w_{mn}+\varphi^k{}_{mn}\frac{H^k{}_4}{H^k{}_1}k_m,$$

$$\left(D^\delta{}_{12}+D^\delta{}_{44}\right)k_m p_n u^1{}_{mn}+\left(D^\delta{}_{11}p_n{}^2+D^\delta{}_{44}k^2{}_m+C_{55}-\omega^2\rho_3\right)v^1{}_{mn}=$$

$$=\left[D^\kappa{}_{11}p_n\left(k_m{}^2+\rho^2{}_n\right)-\omega^2\rho_4 p_n\right]w_{mn}+\varphi^k{}_{mn}\frac{H^k{}_4}{H^k{}_1}p_n,$$

$$\left(C_{11}\frac{1}{R^2}+D_{11}\left(k_m{}^2+p^2{}_n\right)^2-\omega^2\rho_1\right)w_{mn}-C_{12}\frac{k_m}{R}u^0{}_{mn}-C_{11}\frac{p_n}{R}v^0{}_{mn}-$$

$$-\left[D^\kappa{}_{11}k_m\left(k_m{}^2+p^2{}_n\right)-\omega^2\rho_4 k_m\right]u^1{}_{mn}-\left[D^\kappa{}_{11}p_n\left(k_m{}^2+p^2{}_n\right)-\omega^2\rho_4 p_n\right]v^1{}_{mn}=$$

$$=P_{mn}-\varphi^k{}_{mn}\frac{H^k{}_3}{H^k{}_1}\left(k_m{}^2+p^2{}_n\right)-\varphi^k{}_{mn}\frac{H^k{}_2}{H^k{}_1 R}. \qquad (31)$$

Нехтуючи інерційними силами для тангенціальних і зсувних складових, розв'язок системи запишеться у вигляді:

$$w_{mn}=\frac{P_{mn}-\varphi^k_{mn}Q^k_{mn}}{\rho_1\left(\omega^2_{mn}-\omega^2\right)},$$

$$u_{mn}{}^0=\frac{k_m\left(C_{12}k^2{}_m-C_{11}p_n{}^2\right)w_{mn}}{C_{11}\left(k^2{}_m+\rho_n{}^2\right)^2 R}+\varphi^k{}_{mn}\frac{H^k{}_2}{H^k{}_1}\frac{k_m}{C_{11}(k^2{}_m+\rho_n{}^2)},$$

$$v_{mn}{}^0=\frac{p_n\left[C_{11}\left(k^2{}_m+p_n{}^2\right)+\left(C_{11}+C_{12}\right)k^2{}_m\right]}{C_{11}\left(k^2{}_m+p_n{}^2\right)^2 R}w_{mn}+\varphi^k{}_{mn}\frac{H^k{}_2}{H^k{}_1}\frac{p_n}{C_{11}(k^2{}_m+p_n{}^2)},$$

$$u_{mn}^{1}=\frac{D^{\kappa}{}_{11}k_m\left(k^2{}_m+p_n{}^2\right)}{D^{\delta}{}_{11}\left(k^2{}_m+p_n{}^2\right)+C_{55}}w_{mn}+\varphi_{mn}^{k}\frac{H^k{}_4}{H^k{}_1}\frac{k_m}{D^{\delta}{}_{11}(k^2{}_m+p_n{}^2)+C_{55}},$$

$$v_{mn}^{1}=\frac{D^{\kappa}{}_{11}p_n\left(k^2{}_m+p_n{}^2\right)}{D^{\delta}{}_{11}\left(k^2{}_m+p_n{}^2\right)+C_{55}}w_{mn}+\varphi_{mn}^{k}\frac{H_4^k}{H^k{}_1}\frac{p_n}{D^{\delta}{}_{11}(k^2{}_m+p_n{}^2)+C_{55}}, \quad (32)$$

де

$$Q_{mn}=\frac{H^k{}_3}{H^k{}_1}\left(k^2{}_m+p_n{}^2\right)+\frac{H^k{}_2(C_{11}-C_{12})k^2{}_m}{RH^k{}_1C_{11}\left(k^2{}_m+p_n{}^2\right)}-\frac{H^k{}_4}{H^k{}_1}\frac{\left[D^{\kappa}{}_{11}\left(k^2{}_m+p_n{}^2\right)^2\right]}{D^{\delta}{}_{11}\left(k^2{}_m+p_n{}^2\right)+C_{55}},$$

$$\omega_{mn}{}^2=\frac{1}{\rho_{1.}}\left[D_{11}\left(k^2{}_m+p_n{}^2\right)^2+\frac{\left(C_{11}^2-C_{12}^2\right)k^4{}_m}{R^2C_{11}\left(k^2{}_m+p_n{}^2\right)^2}-\frac{D^{\kappa}{}_{11}D^{\kappa}{}_{11}\left(k^2{}_m+p_n{}^2\right)^3}{D^{\delta}{}_{11}\left(k^2{}_m+\rho_n{}^2\right)+C_{55}}\right], \quad (33)$$

ω_{mn} - власна частота згинних коливань оболонки.

При $R\to\infty$ одержимо розв'язок для прямокутної пластини. Якщо деформації зсуву не враховуються $\left(u_1=v_1=0\right)$, маємо розв'язок, який відповідає класичній теорії Кіргофа-Лява.

Аналогічний аналітичний розв'язок одержано і для випадку, коли використовується класична модель С.П. Тимошенка. В цьому випадку розв'язок варіаційної задачі (27) знаходиться у вигляді:

$$u_0=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{mn}^{0}\cos k_m x\sin p_n y,\quad v_0=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}v_{mn}^{0}\sin k_m x\cos p_n y,$$

$$u_1=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{mn}^{1}\cos k_m x\sin p_n y,\quad v_1=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}v_{mn}^{1}\sin k_m x\cos p_n y,$$

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}w_{mn}\sin k_m x\sin p_n y\,. \quad (34)$$

З розв'язку варіаційної задачі маємо:

$$u_{mn}{}^{0}=\frac{k_m\left(C_{12}k^2{}_m-C_{11}p_n{}^2\right)w_{mn}}{c_{11}\left(k^2{}_m+p_n{}^2\right)^2R}+\varphi^k{}_{mn}\frac{H^k{}_2}{H^k{}_1}\frac{k_m}{C_{11}(k^2{}_m+p_n{}^2)},$$

$$v_{mn}{}^{0} = \frac{p_n\left[C_{11}\left(k^2{}_m + p_n{}^2\right) + \left(C_{11} + C_{12}\right)k^2{}_m\right]}{C_{11}\left(k^2{}_m + p_n{}^2\right)^2 R} w_{mn} + \varphi^k{}_{mn}\frac{H^k{}_2}{H^k{}_1}\frac{p_n}{C_{11}(k^2{}_m + p_n{}^2)},$$

$$u_{mn}{}^{1} = -\frac{C_{55}k_m}{D_{11}\left(k^2{}_m + \rho_n{}^2\right) + C_{55}} w_{mn} + \varphi^k_{mn}\frac{H_3^k}{H^k{}_1}\frac{k_m}{D_{11}(k^2{}_m + p_n^2) + C_{55}},$$

$$v_{mn}^{1} = -\frac{C_{55}p_n}{D_{11}\left(k^2{}_m + p_n{}^2\right) + C_{55}} w_{mn} + \varphi^k_{mn}\frac{H_3^k}{H_1^k}\frac{p_n}{D^{\delta}{}_{11}(k^2{}_m + p_n{}^2) + C_{55}},$$

$$\left[\frac{1}{R^2}C_{11} + C_{55}(k_m^2 + p_n^2) - \rho_1\omega^2\right]w_{mn} = C_{12}\frac{k_m}{R}u_{mn}^0 + C_{11}\frac{p_n}{R}v_{mn}^0 - \qquad (35)$$

$$-C_{55}(k_m u_{mn}^1 + p_n v_{mn}^1) - \varphi_{mn}^k\frac{H_2^k}{RH_1^k} + P_{mn}.$$

Підставляючи перші чотири виразу (35) в останнє співвідношення, після громіздких викладок і заміни ω^2 на другу похідну за часом приходимо до диференціального рівняння другого порядку відносно w_{mn} :

$$\rho_1\ddot{w} + \omega^2 w - P + \varphi\psi = 0. \qquad (36)$$

Тут опущено нижні індекси mn в w, φ, ψ, P і введено позначення:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D_{11}(k_m^2 + p_n^2)^2}{1+\tilde{a}} + \frac{C_{11}(1+\nu^2)k_m^4}{(k_m^2 + p_n^2)^2 R^2}, \psi_{mn} = \frac{(k_m^2 + p_n^2)}{1+\tilde{a}(k_m^2 + p_n^2)}, \tilde{a} = \frac{D_{11}}{C_{55}}.$$

При сумісному використанні сенсорів та актуаторів для активного демпфування коливань до актуатора підводиться різниця потенціалів, пропорційна струму $I = \dot{Q}$:

$$V_a = -g\dot{Q}, \qquad (37)$$

де заряд визначається виразом:

$$Q = (h_0 + h_1)\iint\limits_{(S)}(\kappa_1 + \kappa_2)dS\ . \qquad (38)$$

Тут S - площа сенсора.

Як показано в [12, 15, 18], при шарнірному обпиранні торців панелі робота сенсора буде найбільш ефективною при повному покритті сенсором поверхні панелі. Використовуючи наведений вище розв'язок задачі, з (38) знайдемо такий вираз для струму:

$$I = \dot{Q} = 4\gamma_{31}(h_0 + h_1)\frac{k_m^2 + p_n^2}{k_m p_n[1+\tilde{a}(k_m^2 + p_n^2)\}}\dot{w}\ . \qquad (39)$$

Використовуючи (37), (39), рівняння (36) при гармонічному навантаженні запишемо у вигляді:

$$\tilde{\rho}\ddot{w} + 2\varepsilon\dot{w} + c(1 + itg\delta) = P_0 \cos\omega t. \tag{40}$$

Тут $tg\delta = E'' / E'$ - тангенс кута втрат середнього пасивного шару, а

$$2\varepsilon = \frac{64g(h_0 + h_1)^2 \gamma_{31}^2 (k_m^2 + p_n^2)^2}{abk_m^2 p_n^2 [1 + \tilde{a}k_m^2 + p_n^2)]^2}, c = \left[\frac{D'(k_m^2 + p_n^2)^2}{[1 + \tilde{a}k_m^2 + p_n^2)]} + \frac{B'k_m^4}{(k_m^2 + p_n^2)^2 R^2} \right],$$

$$D' = \operatorname{Re} D, B' = \operatorname{Re} B. \tag{41}$$

Ведемо відносну характеристику розсіювання енергії

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W}, \tag{42}$$

де ΔW - розсіювання енергії за період коливань, W - середня за період повна механічна енергія в системі, яка описується рівнянням (40). Після нескладних викладок знайдемо

$$\eta = \frac{2\varepsilon\omega}{c} + tg\delta. \tag{43}$$

3. Аналіз розв'язку. Із одержаних вище розв'язків можна знайти вираз для різниці потенціалів, яку необхідно підвести до актуатора для компенсації механічного навантаження. Так, з формули (32) маємо

$$\varphi_{mn}^k = \frac{P_{mn}}{Q_{mn}^k}. \tag{44}$$

В зв'язку з тим, що товщина п'єзоелектричних шарів значно менша за товщину пасивної оболонки (середнього шару), можна знехтувати відношенням товщини п'єзошару до товщини пасивного елемента в порівнянні з одиницею. В результаті з (38) після громіздких викладок одержимо таку просту формулу для вказаної різниці потенціалів при використанні теорії з пошаровою апроксимацією зміщень:

$$V_a^{ут} = V_a^{кл} \left[1 + \frac{2}{(1-\nu)} h_0^2 (k_m^2 + p_n^2) \frac{G}{G'} \right] \tag{45}$$

При використанні класичних гіпотез С.П. Тимошенка ця різниця потенціалів визначається відношенням $\varphi = \dfrac{P}{\psi}$, звідки

$$V_a = \frac{P_0}{(h_0 + h_1)} \frac{1 + \widetilde{a}(k_m^2 + p_n^2)}{(k_m^2 + p_n^2)}. \tag{46}$$

З використанням одержаних вище формул розраховано власну частоту ω_{11}, модуль поперечного прогину $|w|$ та електричний потенціал V_a, який необхідно підвести до актуатора для компенсації механічного тиску

$P_0 = 10^3 Pa$, який діє на циліндричну панель з параметрами: R=0,1*м*; *a*=*b* =0,1*м*; b=Rθ=0,*1м*; H=0,001*м*; H=0,002*м*; H=0,01*м*; H=0,02*м*. Внутрішній шар панелі виготовлено з алюмінієвого сплаву з наступними механічними характеристиками:

$$E = E' + iE''; \quad E' = 7,3 \cdot 10^{10} H / м^2; \quad E'' = 0,01E'; \quad \nu = 0,34.$$

П'єзоелектричні шари мають такі комплексні електромеханічні властивості [36]:

$S'_{11} = 0,171 \cdot 10^{-10} м^2 / H; S'_{12} = -0,58 \cdot 10^{-11} м^2 / H; S'_{13} = -0,91 \cdot 10^{-11} м^2 / H;$

$S'_{33} = 0,184 \cdot 10^{-10} м^2 / H; S'_{55} = 0,460 \cdot 10^{-10} м^2 / H; d'_{31} = -189,7 \cdot 10^{-12} Кл / м^2;$

$d'_{33} = 357 \cdot 10^{-12} Кл / м^2; d'_{15} = 609 \cdot 10^{-12} Кл / м^2; e'_{11} = 0,20541 \cdot 10^{-7} Ф / м;$

$e'_{33} = 0,14803 \cdot 10^{-7} Ф / м;$

$S''_{11} = -0,2 \cdot 10^{-12} м^2 / H; S''_{12} = 0,1 \cdot 10^{-12} м^2 / H; S''_{13} = 0,2 \cdot 10^{-12} м^2 / H;$

$S''_{33} = -0,4 \cdot 10^{-12} м^2 / H; S''_{55} = -5,6 \cdot 10^{-12} м^2 / H; d''_{31} = -4,8 \cdot 10^{-12} Кл / м^2;$

$d''_{33} = -14,7 \cdot 10^{-12} Кл / м^2; d''_{15;} = -253,6 \cdot 10^{-12} Кл / м^2; e''_{11} = -11270 \cdot 10^{-12} Ф / м;$

$e''_{33} = -342 \cdot 10^{-12} Ф / м;$

В Таблиці 1 для різних значень відношення *H/R* показано результати розрахунку вказаних характеристик при використанні теорій Кірхгофа-Лява (другий, третій, четвертий стовбці), С.П. Тимошенка (п'ятий, шостий, сьомий стовбці) та представленої вище теорії з врахуванням зсувних деформацій, які змінюються по товщині за квадратичним законом (восьмий, дев'ятий, десятий стовбці). При розрахунку вважалось, що $h_2 = h_1 + h_3 = 2h_1$ (товщина середнього шару дорівнює сумі товщин зовнішніх шарів). Як видно з цієї таблиці, при малих відношеннях *H/R* всі теорії дають одинакові результати. Зі збільшенням *H/R* має місце помітне відхилення результатів розрахунків за класичною теорією та теоріями з врахуванням зсувних деформацій. Розбіжність результатів за різними уточненими теоріями незначна.

Таблиця 1

H/R	$10^{-4}\omega$, *Гц*	$10^4 w$, *м*	$10^{-2} V_a$	$10^{-4}\omega$, *гц*	$10^4 w$, *м*	$10^{-2} V_a$	$10^{-4}\omega$, *гц*	$10^4 w$, *м*	$10^{-2} V_a$
1/100	0,1890	0,4203	1,172	0,1890	0,4203	1,172	0,1890	0,4203	1,172
1/50	0,3085	0,1857	0,5859	0,3085	0,1858	0,5869	0,3085	0,1857	0,5868
1/10	0,4952	0,007944	0,1172	0,4874	0,008538	0,1218	0,4900	0,0081	0,1214
1/5	0,8451	0,001149	0,05859	0,7797	0,001564	0,06754	0,8019	0,001179	0,06681

В Таблиці 2 представлено результати розрахунків тих самих характеристик для панелі постійної товщини $H = 0,01 м$ в залежності від товщини середнього шару при використанні теорії С.П.Тимошенка. З цієї таблиці видно, що при досить малій товщині активного шару результати розрахунків змінюються незначно. Таким чином, за малої товщини п’єзошару можна не враховувати його впливу на жорсткістні характеристики панелі. Цей факт часто використовується в інженерних розрахунках ефективності системи керування коливаннями тонкостінних конструкцій за допомогою п’єзоелектричних включень.

Таблиця 2

$10^2 h_2$	$10^{-4}\omega, гц$	$10^6 w, м$	$10^{-2} V_a$
0,1	0,4157	0,7224	0,1656
0,3	0,4483	0,7774	0,14037
0,5	0,4874	0,8538	0,12181
0,7	0,5357	1,065	0,1075
0,9	0,5994	1,837	0,09618
0,94	0,6149	2,152	0,09417
0,98	0,6318	3,035	0,09223
0,998	0,6399	3,622	0,09138
0,9998	0,6407	3,694	0,091299

Висновки. Для моделювання вимушених резонансних коливань непружних оболонок обертання з сенсорами та актуаторами використано дві моделі, які враховують деформації зсуву: перша модель базується на гіпотезі про пошарову апроксимацію деформацій зсуву квадратичними функціями та додаткових гіпотезах про розподіл індукції та напруженості електричного поля по товщині оболонки; друга – на класичних гіпотезах С.П.Тимошенка, доповнених аналогічними вказаним вище припущенням про електричні польові величини. З урахуванням цих припущень представлено варіаційну постановку задачі про вимушені коливання непружної шаруватої оболонки обертання з п’єзоелектричними сенсорами та актуаторами. Непружна поведінка матеріалів описується концепцією комплексних характеристик. З використанням указаної постановки знайдено розв’язок задачі про резонансні коливання шарнірно обпертої непружної циліндричної панелі з сенсорами та актуаторами. З цього розв’язку одержано формули для різниці потенціалів, яку необхідно підвести до актуатора для компенсації гармонічного за часом механічного навантаження для демпфування резонансних коливань. Одержано також формули для потенціалу та заряду, які знімаються з сенсора у випадку резонансних коливань панелі. Виведено вираз для коефіцієнта демпфування при сумісному використанні сенсорів та актуаторів для зменшення амплітуди резонансних коливань циліндричної панелі. Як окремий випадок, з отриманого розв'язку випливають результати для прямокутної пластини. Наведено приклади розрахунків, які ілюструють вплив дефомацій зсуву на параметри керування коливаннями циліндричної панелі за допомогою п'єзоактуаторів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
2. *Булат А.Ф., Дырда В.И., Карнаухов В.Г., Звягильский Е.Л., Кобец А.С.* Термомеханическая теория вязкоупругих тел. – Киев: Наук.думка, 2013. – 428 с. – (Прикладная механика упруго–наследственных сред. В 3–х томах. Т.3).
3. *Булат А.Ф., Дырда В.И., Карнаухов В.Г., Звягильский Е.Л., Кобец А.С.* Вынужденные колебания и диссипативный разогрев неупругих тел. – Киев: Наук.думка, 2014. – 520 с. – (Прикладная механика упруго–наследственных сред. В 3–х томах. Т.4.)
4. *Гринченко В. Т., Улитко А.Ф.,Шульга Н.А.* Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 290 с.– (Механика связанных полей в элементах конструкций, В 5-ти томах. Т.5).
5. *Дубенец В.Г., Хильчевский В.В.* Колебания демпфируемых композитных конструкций. Т.1. – К.: Вища школа, 1995.- 226с.
6. *Карнаухов В.Г.* Связанные задачи термовязкоупругости. – Киев: Наук.думка, 1982. – 260с.
7. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. - Киев: Наук.думка, 1986. – 222с.
8. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Электротермовязкоупругость. – Киев: Наук. думка, 1988. – 328с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т.; Т.4).
9. *Карнаухов В.Г., Михайленко В.В.* Нелинейные одночастотные колебания и диссипативный разогрев неупругих пьезоэлектрических тел. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428с.
10. *Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Карнаухова Т.В.* Уточнена термомеханічна модель композитних оболонок типу Тимошенка з розподіленими трансверсально–ізотропними актуаторами при моногармонічному навантаженні/ Прикладні проблеми механіки і математики. – 2006. – Вип.4. –С.84–95.
11. *Карнаухова Т.В., Пятецкая Е.В.* Основные соотношения теории термовязкоупругих пластин с распределенными актуаторами при моногармоническом нагружении/ Прикладная механика. – 2009. – Т.45, №2. – С.107–123.
12. *Карнаухова Т.В., Пятецкая Е.В.* Демпфирование изгибных резонансных колебаний шарнирно опертой пластины с использованием актуаторов/ Прикладная механика. – 2009. – Т.45, №4. – С.122–132.
13. *Карнаухова Т.В., Пятецкая Е.В.* Демпфирование изгибных резонансных колебаний жестко защемленной вязкоупругой прямоугольной пластины пьезоэлектрическими актуаторами / Прикладная механика. – 2009. – Т.45, №5. – С.96–109.
14. *Карнаухова Т.В., Пятецкая Е.В.* Основные соотноше-ния теории термовязкоупругих пластин с распределенными сенсорами/Прикладная механика. – 2009. – Т.45, №6. – С.100–112.
15. *Карнаухова Т.В., Пятецкая Е.В.* О резонансных колебаниях шарнирно опертой вязкоупругой пря–моугольной пластины/ Прикладная механика. – 2009. – Т.45, №7. – С. 88–99.
16. *Карнаухова Т.В., Пятецкая Е.В.* О резонансных колебаниях жестко закрепленной вязкоупругой прямоугольной пластины/ Прикладная механика. – 2009. – Т.45, №8. – С.123–136.
17. *Карнаухова Т.В., Пятецкая Е.В.* Основные соотноше–ния теории термовязкоупругих пластин с распределенными сенсорами и актуаторами/ Прикладная механика. – 2010. – Т.46, №1. – С.94–104.

18. *Карнаухова Т.В., Пятецкая Е.В.* Резонансные колеба–ния шарнирно опертой прямоугольной термовязкоупругой пластины с сенсорами и актуаторами/ Прикладная механика. – 2010. – Т.46, №2. – С.106–114.
19. *Карнаухова Т.В., Пятецкая Е.В.* Резонансные колебания жестко защемленной прямоугольной термовязкоупругой пластины с сенсорами и актуаторами/ Прикладная механика. – 2010. – Т.46, №3. – С. 61–69.
20. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф., Козлов В.И.* Электромеханические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов с пьезоэффектом //Прикл. механика. – 2001. – 37, № 2. – с.45-77.
21. *Карнаухов В.Г.* Термомеханіка зв'язаних полів в непружних матеріалах та елементах конструкцій при гармонічному навантаженні //Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. – 2013. – №3. – С.142–145.
22. *Козлов В.І., Карнаухова Т.В., Пересунько М.В.* Чисельне моделювання активного демпфування вимушених термомеханічних резонансних коливань в'язкопружних оболонок обертання за допомогою п'єзоелектричних включень/ Математичні методи та фізико–механічні поля. – 2009. – 52, №3 – С.116–126.
23. *Матвеев В.В.* Демпфирование колебаний деформируемых тел.- К .:Наук. думка,1985. – 264с.
24. *Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Д.* Демпфирование колебаний. – М: Мир, 1988. – 448с.
25. *Писаренко Г.С.* Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. – К.: Наук. думка, 1970. – 377с.
26. *Писаренко Г.С.* Обощенная нелинейная модель учета рассеяния энергии при колебаниях.- – К.: Наук. думка, 1987. – 236с.
27. *Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А.* Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – К.: Вища школа. –
28. *Савченко Е.В.* Пассивное демпфирование колебаний композитных конструкций. – Нежин: ООО "Аспект–Поліграф", 2006. – 232с.
29. *Шульга Н.А., Карлаш В.Л.* Резонансні електромеханічні коливання п'єзоэлектричних пластин. – К.: Наук. думка, 2008. – 272 с.
30. Encyclopedia of Smart Materials, 1–2 (ed. Schwartz, Mal). – New York: Wiley & Sons, 2002. – 1176p.
31. *Gabbert U. and Tzou H.S.* Smart Structures and Structronic Systems.- Kluver Academic Pub.: Dordrecht/Boston/ London. – 2001. – 384p. –
32. *Jones D. I.* Handbook of Viscoelastic Vibration Damping. – New York: Wiley & Sons, 2001.– 412p.
33. *Karnaukhov V.G.* Thermomechanics of coupled fields in passive and piezoactive inelastic bodies under harmonic deformations// Journal of thermal stresses. – 28, N6-7. - P. 783-815.
34. *Karnaukhov V.G.* The Forced Harmonic Vibrations and Dissipative Heating of Nonelastic Bodies//Encyclopedia of Thermal Stresses (Ed: Richard B. Hetnarski), pp. 1711-1722. – New York, Dordrecht: Springer, vol. 4, 2014.
35. *Karnaukhov V.G.* Piezothermo-Inelastic Behaviour of Structural Elements: Vibrations and Dissipative Heating//Encyclopedia of Thermal Stresses (Ed: Richard B. Hetnarski), pp. 3910-3919. – New York, Dordrecht: Springer, vol. 7, 2014.
36. *Sabat R.G., Mukherjee B., Ren W., Yung G.* Temperature dependence of the complete material coefficients matrix of soft and hard doped piezoelectric lead zirconate titanate ceramics // J. Appl. Phys. – 2007. – 101. –P. 06411–1–7.
37. *Tani J., Takagi T., Qui J.* Intelligent material systems: Application of functional materials // Appl. Mech. Rev. – 1998. – **51**, N 8. – P. 505 – 521.
38. *Tzou H.S.* Piezoelectric shells (Distributed sensing and control of continua). – Boston/Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. – 382 p.
39. *Tzou H.S., Bergman L.A.* Dynamics and control of distributed systems. – Cambridge: Cambridge University Press. – 1998. – 374p.

REFERENCES

1. *S.A. Ambartsumiyn*. General theory of anisotropic shells [in Russian]. Nauka, Moscow (1974).
2. *A.F. Bulat, V.I. Dyrda, V.G.Karnaukhov, E.L.Zvyagilsky, A.S. Kobets*. Thermomechanical theory of Viscoelastic Solids. Naukova Dumka, Kyiv (2013).Vol. 3 of the three-volume series Applied Mechanics of Viscoelastic Solids [in Russian].
3. *A.F. Bulat, V.I. Dyrda, V.G.Karnaukhov, E.L.Zvyagilsky, A.S. Kobets*. Forced vibrations and dissipative heating of nonelastic bodies. Naukova Dumka, Kyiv (2014). Vol. 4 of the three-volume series Applied Mechanics of Viscoelastic Solids [in Russian].
4. *V.T.Grinchenko, A.F.Ulitko, N.A.Shul'ga*. Electroelasticity. Naukova Dumka, Kyiv (1998).Vol. 5 of the five-volume series Mechanics of Coupled Fields [in Russian].
5. *V.G. Dubenets, V.V.Hilchevskij*. Vibrations of damping composite structures [in Russian]. Vyshcha shkola, Kyiv (1995).
6. *V.G.Karnaukhov*.Coupled problems of thermoviscoelesticity [in Russian]. Naukova Dumka, Kyiv (1982).
7. *V.G.Karnaukhov, I.F.Kirichok*. Coupled problems of theory of viscoelastic plates and shells [in Russian]. Naukova Dumka, Kyiv (1986).
8. *V.G.Karnaukhov,I.F.Kirichok*.Electrothermoviscoelastisity. Naukova Dumka, Kyiv (1988).Vol. 4 of the five-volume series Mechanics of Coupled Fields [in Russian].
9. *V.G.Karnaukhov, V.V.Myhilenko*. Nonlinear one-frequency vibrations and dissipative heating of nonelastic piezoelectric bodies [in Russian].ZTSU, Zhytomir (2005).
10. *V.G.Karnaukhov, V.I.Kozlov, T.V. Karnaukhova*. "Refined thermomechanical Timoshenko' model of composite shells with distributed transversal-isotropic artuators under monoharmonic ljading". Applied Problems of Mathematics and Mechanics, N4. – P. 84-95 (2006).
11. *T.V. Karnaukhova, E.V.Pyatetskaya*. "Main equations of theory of thermoviscoelastic plates with distributed actuators under monoharmonic loading". J.Appl.Mech., 45,No.2. – P. 107–123 (2009).
12. *T.V. Karnaukhova, E.V.Pyatetskay*. "Damping of bending resonant avibrations of hinged plate with using of actuators ". J.Appl.Mech., 45,No.4. – P. 122–1323 (2009).
13. *T.V. Karnaukhova, E.V.Pyatetskaya*. "Damping of bending resonant vibrations of rigidly fixed rectangular viscoelastic plate by piezoelectric actuators ". J.Appl.Mech., 45,No.5. – P. 96–109 (2009).
14. *T.V. Karnaukhova, E.V.Pyatetskaya*. "Main equations of theory of thermoviscoelastic plates with distributed sensors". J.Appl.Mech., 45,No.6. – P. 100–112 (2009).
15. *T.V. Karnaukhova, E.V.Pyatetskaya*. "*About* resonant vibrations of rectangular hinged viscoelastic plate ". J.Appl.Mech., 45,No.7. – P. 88–99 (2009).
16. *T.V. Karnaukhova, E.V.Pyatetskaya*. "*About* resonant vibrations of rigidly fixed rectangular viscoelastic plate ". J.Appl.Mech., 45,No.8. – P. 123-136 (2009).
17. *T.V. Karnaukhova, E.V.Pyatetskaya*. "Main equations of theory of thermoviscoelastic plates with distributed sensors and actuators". J.Appl.Mech., 46,No.1. – P. 94–104 (2010).
18. *T.V. Karnaukhova, E.V.Pyatetskaya*. "Resonant vibrations of rectangular hinged thermoviscoelastic plate with sensors and actuators". J.Appl.Mech., 46,No.2. – P. 106–114 (2010).
19. *T.V. Karnaukhova, E.V.Pyatetskaya*. "Resonant vibrations of rigidly fixed rectangular thermoviscoelastic plate with sensoras and actuators". J.Appl.Mech., 46,No.3. – P. 61–69 (2010).
20. *V.G.Karnaukhov, I.F.Kirichok, V.I.Kozlov*. "Electromechanical vibrations and dissipative heating of viscoelastic thinwalled elements with piezoeffect". J.Appl.Mech., 37,No.2. – P. 45–69 (2001).
21. *V.G.Karnaukhov*. "Thermomechanics of coupled fields in nonelastic materials and structures under harmonic loading". Papers of Kiev University. Series of physical and mathematical sciences, №3. – P.142–145 (2013).
22. *V.I.Kozlov, T.V. Karnaukhova, N.V.Peresun'ko*. "Numerical modeling of active damping of forced thermomechanical resonant vibrations of viscoelastic revolution' shells by piezoelectric inclusions". Mathematical methods and physical and mechanical fields, 52,No.3. – P. 116–126 (2009).

23. *V.V.Matveev*. Damping vibrations of deformed bodies [in Russian]. Naukova Dumka, Kyiv (1985).
24. *A.Nashiff, D. Jones., D.Henderson. Damping vibrations*[in Russian]. Mir, Moskov (1988).
25. *G.S.Pisarenko*. Vibrations of mechanical systems with nonideal material elasticity [in Russian]. Naukova Dumka, Kyiv (1970).
26. *G.S.Pisarenko*. Generalized nonlinear model of energy' dissipation under vibrations [in Russian]. Naukova Dumka, Kyiv (1987).
27. *A.O.Rasskazov,I.I.Sokolovskaya, N.A.Shul'ga*. Theory and calculation of ortotropic plates and shells [in Russian]. Vyshcha shkola, Kyiv (1987).
28. *E.V.Savchenko*. Passive damping of vibrations of composite structures [in Russian]. Aspect-Poligraf, Nezhyn (2006).
29. *N.A.Shul'ga and V.I.Karlash*. Resonant electromechanical vibrations of piezoelectric plates [in Russian]. Naukova Dumka, Kyiv (2008).
30. Encyclopedia of Smart Materials, 1–2 (ed. Schwartz, Mal). – New York: Wiley & Sons, 2002. – 1176p.
31. *Gabbert U. and Tzou H.S.* Smart Structures and Structronic Systems.- Kluver Academic Pub.: Dordrecht/Boston/ London. – 2001. – 384p. –
32. *Jones D. I.* Handbook of Viscoelastic Vibration Damping. – New York: Wiley & Sons, 2001.– 412p.
33. *Karnaukhov V.G.* Thermomechanics of coupled fields in passive and piezoactive inelastic bodies under harmonic deformations// Journal of thermal stresses. – 28, N6-7. - P. 783-815.
34. *Karnaukhov V.G.* The Forced Harmonic Vibrations and Dissipative Heating of Nonelastic Bodies//Encyclopedia of Thermal Stresses (Ed: Richard B. Hetnarski), pp. 1711-1722. – New York, Dordrecht: Springer, vol. 4, 2014.
35. *Karnaukhov V.G.* Piezothermo-Inelastic Behaviour of Structural Elements: Vibrations and Dissipative Heating//Encyclopedia of Thermal Stresses (Ed: Richard B. Hetnarski), pp. 3910-3919. – New York, Dordrecht: Springer, vol. 7, 2014.
36. *Sabat R.G., Mukherjee B., Ren W., Yung G.* Temperature dependence of the complete material coefficients matrix of soft and hard doped piezoelectric lead zirconate titanate ceramics // J. Appl. Phys. – 2007. – 101. –P. 06411–1–7.
37. *Tani J., Takagi T., Qui J.* Intelligent material systems: Application of functional materials // Appl. Mech. Rev. – 1998. – **51**, N 8. – P. 505 – 521.
38. *Tzou H.S.* Piezoelectric shells (Distributed sensing and control of continua). – Boston/Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. – 382 p.
39. *Tzou H.S., Bergman L.A.* Dynamics and control of distributed systems. – Cambridge: Cambridge University Press. – 1998. – 374p.

УДК 539.3
Карнаухов В.Г., Козлов В.І., Карнаухова Т.В.
Вплив деформацій зсуву на ефективність роботи п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів при активному демпфуванні резонансних коливань непружних пластин й оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2015. –Вип. 94. – С. 75-95.

Досліджується вплив деформацій зсуву на ефективність работи п'єзэлектричних сенсорів та актуаторів при активному демпфуванні резонансних коливань трансверсально-ізотропних шарнірно обпертих циліндричної панелі і прямокугної пластини. Для моделювання коливань тонкостінних елементів з сенсорами та актуаторами використовуються дві уточнені теорії типу С.П.Тимошенка. Методом Фур'є одержано аналітичний розв'язок задачі про резонансні коливання згаданих елементів. Наведено формули для різниці потенціалів, які необхідно підвести до актуатора для компенсації механічного навантаження. Аналогічні формули одержано і для показників сенсора. Представлено також вирази для коефіцієнтів демпфування резонансних коливань при сумісному використанні сенсорів та актуаторів. Ці прості формули дозволяють дати оцінку впливу деформацій зсуву на ефективність роботи сенсорів та актуаторів при активному демпфуванні резонансних коливань згаданих елементів конструкцій.
Табл. 2. Іл. Назв.39.

УДК 539.3
Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Карнаухова Т.В.
Влияние деформаций сдвига на эффективность работы пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов при активном демпфировании резонансных колебаний неупругих пластин и оболочек // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 2015. –Вып. 94. – С. 75-95.

Исследуется влияние деформаций сдвига на эффективность работы пьезоэлектрических сенсоров и актуаторв при активном демпфировании резонансных колебаний трансверсально-изотропных шарнирно опертых цилиндрической панели и прямоугольной пластины. Для моделирования колебаний тонкостенных элементов с сенсорами и актуаторами спользуются две уточненные теории типа С.П. Тимошенко. Методом Фурье получено аналитическое решение задач о резонансных колебаниях указанных элементов. Представлены формулы для разностей потенциалов, которые необходимо подвести к актуатору для компенсации заданной механической нагрузки. Аналогичные формулы получены и для показаний сенсора. Получено также выражение для коэффициента демпфирования при совместном использовании сенсоров и актуаторов. Эти простые формулы позволяют дать оценку влияния деформаций сдвига на эффективность работы сенсоров и актуаторов при активном демпфировании резонансных колебаний указанных элементов конструкций.
Табл. 2. Ил. Назв.39.

Karnaukhov V.G., Kozlov V.I., Karnaukhova T.V.
Influence of shear strain on efficiency of piezoelectric sensors and actuators under active damping of resonance vibrations of nonelastic plates and shells // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2015. – Issue. 94. – P. 75–95. – Rus.

The active methods of damping vibrations of thin-walled elements are used widely in technics. Efficiency of the damping depend on working of active elements – piezoelectric sensors and actuators. On the efficiency of sensors and actuators the geometric parameters and material anisotropy influence. To investigate this influence the refine models have to be used. In this paper the influence of shear strain on efficience of piezoelectric sensors and actuators under active damping of resonance vibrations of transversally-isotropic cylindrical panel and rectangular hinged plate is investigated. To sumilate the vibrations of thinwalled elements with the sensors and actuators refined Timoshenko' theories are used. By Furrie method the analutical solution of the problems about resonant vibrations of thous elements are obtained. The formulas are given for the potential difference, wich suppled to actuators to balanced mechanical loads. Analogical formulas are given for sensor' indications. The formular for damping coefficient under the using of sensors and actuators for active damping of resonant vibrations of the plate and panel are given. These simple formulas allow to evaluate the influence of shear strains on efficiency of piezoelectric sensors and actuators and efficiency of active damping of resonance vibrations of the elements.

Авторы

Доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач відділу термопружності КАРНАУХОВ Василь Гаврилович.
Адреса робоча: 03457 Україна, м. Київ, вул. Несторова 3, Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Карнаухову Василю Гавриловичу.
Адреса домашня: 03164 Україна, м. Київ, вул. Підлісна,2, кв. 99, Карнаухову Василю Гавриловичу.
Роб. тел. + 38(044) 4568599
Мобільний тел.: 0983726337
Дом. тел.: + 38(044) 4524020
E-mail- karn@inmech.kiev. ua

Доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник відділу термопружності КОЗЛОВ Володимир Ілліч.

Адреса робоча: 03457 Україна, м. Київ, вул. Несторова 3, Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Козлову Володимиру Іллічу.
Адреса домашня: 01133 Україна, м. Київ, б.Лесі Українки, 5а, кв.6, Козлову Володимиру Іллічу.
Роб. тел. + 38(044) 4568599
Мобільний тел.: + 38 0973760941
E-mail- karn@inmech.kiev. ua

Кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри диференціальних і інтегральних рівнянь КАРНАУХОВА Тетяна Василівна.
Адреса робоча: 03056 Україна, м. Київ, проспект Перемоги 37, Національний технічний університет України "КПІ", Карнауховій Тетяні Василівні.
Адреса домашня: 03142 Україна, м. Київ, пр. Вернадського, 69-а, кв. 51, Карнауховій Тетяні Василівні.
Роб. тел. + 38(044) 4503526
Мобільний тел.: + 38 0960155432
E-mail- karn@inmech.kiev. ua