ISSN 2410-2547
Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures. 2018. № 100

УДК 539.3

ЗМІШАНИЙ ВАРІАЦІЙНИЙ ФУНКЦІОНАЛ В ЗАДАЧАХ ПОВЗУЧОСТІ ТА ПОШКОДЖУВАНОСТІ СТЕРЖНІВ ПРИ ЗГИНІ

О.Б. Савін,
канд. техн. наук, доцент

В.М. Соболь,
канд. техн. наук

Харківський національний університет будівництва та архітектури, Харків

В статті розглядається варіаційна постановка задач повзучості та пошкоджуваності стержнів за умови їх згину. Метод розв’язання задачі засновано на сполученні покрокового інтегрування рівнянь стану повзучості і розв’язанням на кожному кроці часу варіаційної рівності. Надані числові результати досліджень на базі запропонованого методу розв’язку задачі повзучості та пошкоджуваності стержнів з різними видами закріплення їх країв. Зроблені висновки за отриманими результатами.

Ключові слова: повзучість, пошкоджуваність, змішаний функціонал, варіаційно-структурний метод, стержень.

Вступ. У розрахунках на міцність елементів конструкцій машинобудівної, авіаційної та ракетно-космічної техніки, експлуатаційні умови яких характеризуються високим рівнем температур, необхідно враховувати таке явище, як повзучість. Повзучість елементів конструкцій супроводжується накопиченням незворотних деформацій повзучості та пошкоджуваності, що призводить до руйнування таких елементів конструкцій. Для багатьох відповідальних елементів машинобудівних, авіаційних та ракетно-космічних конструкцій використовують розрахункові схеми у вигляді тонкостінних стержнів, на які зроблено акцент у даній статті. Увага багатьох дослідників прикута до пошуку ефективних підходів вирішення таких проблем тривалої міцності техніки при їх експлуатації під дією високих температур та з врахуванням повзучості [1-10].

Постановка задачі. В роботі розглядається постановка таких задач, а саме ізотропної повзучості й пошкоджуваності тонкостінних стержнів за умови їх згину. Можливості методів, що базуються на розв'язанні диференціальних рівнянь крайових задач теорії пружності, пластичності й повзучості досить обмежені. Відомо, що варіаційні постановки таких задач є зручною основою для побудови й теоретичного обґрунтування багатьох розрахунків складних конструкцій [1-3,7]. У роботі запропоновано ефективний метод розрахунку повзучості стержнів на базі змішаного варіаційного функціонала й варіаційно-структурного методу [3,5,7,9,10]. Такі підходи до розв'язання задач міцності конструктивних елементів машин привертають увагу багатьох дослідників, що пояснює актуальність теми досліджень і проведених результатів у даній статті.

Мета і завдання. Мета роботи та завдання наступні: сформулювати постановку задачі повзучості та пошкоджуваності стержнів при згині під дією розподіленого навантаження по довжині стержнів для різних типів закріплення їх країв; запропонувати варіаційний метод розв’язання даної задачі; створити програмне забезпечення для розв’язання задачі; виконати числові розрахунки задачі при варіювання умов закріплення стержнів; проаналізувати отримані результати досліджень – виявити вплив методів інтегрування коефіцієнтів структур рішень на час до руйнування стержнів при повзучості та пошкоджуваності, виявити вплив типів закріплення країв стержнів на час до руйнування при їх повзучості.

Вихідні положення та постановка задачі. Загальна постановка задач ізотропної повзучості та пошкоджуваності тіл детально розглянута в роботах [3,5,9,10]. В даній статті розглянемо постановку задачі повзучості та пошкоджуваності тонкостінного прямолінійного стержня за умови збереження гіпотез Бернуллі-Ейлера [2]. Система координат для даної задачі вводиться наступним чином: вісь z є направленою вздовж осі стержня, осі x та y направлені у поперечному перерізі стержня відповідно рис. 1. Поперечний переріз стержня вважаємо прямокутним.

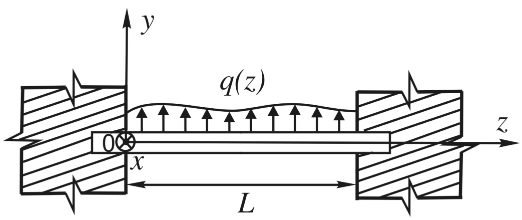

Рис. 1. Схема жорстко закріпленого стержня

Розглянемо плоский згин стержня у площині y, z під дією розподіленого навантаження вздовж його довжини. В даному випадку змішаний варіаційний функціонал [2-5,7,9,10] для задачі повзучості та пошкоджуваності стержня при плоскому згині буде мати вигляд:

$$R_{u\sigma}=\iint\limits_F\int\limits_z\left[-y\sigma_{zz}\frac{d^2W}{dz^2}-C_{zz}\sigma_{zz}-\frac{\sigma_{zz}^2}{2E}\right]dFdz-\int\limits_0^L qWdz+Q_yW\Big|_0^L-M_x\frac{dW}{dz}\Big|_0^L. \quad (1)$$

В даному функціоналі позначено вертикальне переміщення стержня (прогин) u_y через W. Ввівши умовне позначення так званого моменту повзучості

$$M_x^c=E\iint\limits_F yC_{zz}dF$$

змішаний функціонал (1) можна записати наступним чином:

$$R_{u\sigma}=\int\limits_0^L\left[M_x\frac{d^2W}{dz^2}+\frac{M_x^cM_x}{EJ_x}-\frac{M_x{}^2}{2EJ_x}-qW\right]dz+Q_y\,W\Big|_0^L-M_x\frac{dW}{dz}\Big|_0^L. \quad (2)$$

Умова стаціонарності $\delta R_{u\sigma}=0$ для функціонала (2) матиме наступний вигляд:

$$\delta R_{u\sigma}=\int\limits_0^L\left[\left(\frac{d^2W}{dz^2}+\frac{M_x^c}{EJ_x}-\frac{M_x}{EJ_x}\right)\delta M_x+\left(\frac{d^2M_x}{dz^2}-q\right)\right]\delta Wdz-\delta M_x\frac{dW}{dz}\Bigg\|_0^L+$$

$$+\delta Q_y\frac{dW}{dz}\Big|_0^L+(Q_y-\frac{dM_x}{dz})\delta W\Big|_0^L. \quad (3)$$

З варіаційної рівності функціонала отримуємо рівняння Ейлера, які запишуться наступним чином:

$$\frac{d^2W}{dz^2}+\frac{M_x^c-M_x}{EJ_x}=0\,,\;\;\frac{d^2M_x}{dz^2}-q=0\,, \tag{4}$$

та граничні умови

$$W\Big|_{z=0}=W\Big|_{z=L}=0;\qquad \frac{dW}{dz}\bigg|_{z=0}=\frac{dW}{dz}\bigg|_{z=L}=0;\;\left(Q_y-\frac{dM_x}{dz}\right)\bigg|_{z=0,L}=0\,. \tag{5}$$

Отримані рівняння Ейлера (4) для визначення невідомих деформацій повзучості на кожному кроці часу доповнюються рівняннями стану повзучості [1,3-6,8-10]. У подальшому при розв'язанні одновимірних задач теорії повзучості стержнів за умови їх плоского згину рівняння стану повзучості приймаються у такому вигляді:

$$\frac{dC_{zz}}{dt}=\frac{B\left|\sigma_{zz}\right|^{n-1}}{\left(1-\omega^r\right)^m}\sigma_{zz}\,,\;\frac{d\omega}{dt}=\frac{D\left|\sigma_{zz}\right|^k}{\left(1-\omega^r\right)^s} \tag{6}$$

з наступними початковими умовами:

$$\begin{gathered}C_{zz}(0)=\omega(0)=0,\\ \omega(t_*)=0{,}9,\end{gathered} \tag{7}$$

де C_{zz} – осьова складова деформації повзучості; $\omega(t)$ – параметр пошкоджуваності; σ_{zz} – нормальні напруження, що діють у поперечному перерізі стержня; B,D,n,m,r,k,s – константи, які визначаються при обробці експериментальних даних.

Метод розв'язку задачі. Для розв'язання початково-крайової задачі повзучості тіл запропонований чисельно-аналітичний метод, що являє собою сполучення варіаційно-структурного методу теорії R-функцій для відшукання точок стаціонарності змішаного варіаційного функціонала на кроці часу й чисельного методу Рунге-Кутта-Мерсона для продовження рішень у часі [8].

Структури рішень при розгляді повзучості стержнів для невідомих функцій W,M_x – прогинів і згинальних моментів, визначених у точках координатної осі жорстко закріпленого стержня (рис. 1), прийняті у наступному вигляді:

$$W=\omega\sum_{i=1}^{N}B_iP_i^w\,,\;M_x=\sum_{i=1}^{N}A_iP_i^м\;,\;\omega=\left(\frac{z^2}{L^2}-\frac{z}{L}\right)^2, \tag{8}$$

де P_i – поліноми i-ої степені, A_i, B_i – коефіцієнти апроксимації, ω – функція за допомогою якої задовольняються граничні умови.

Рішення варіаційної рівності для змішаного функціонала (2) на кроці часу здійснювалося варіаційно-структурним методом. Для визначення невідомих параметрів, що входять у структури рішень (8), у даній роботі застосовано варіаційно-структурний метод. Ідея методу полягає в тому, що структури рішень у вигляді (8) підставляються у варіаційне рівняння (3), у якому варіації беруться по невизначених параметрах, що входять у структури рішень. Дорівнюючи нулю коефіцієнти при варіаціях, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) відносно невизначених параметрів, що входять у структури рішень. Таким чином, варіаційно-структурний метод зводить варіаційну задачу до задачі розв'язання СЛАР. Запишемо далі СЛАР для структури рішень задачі (8) для варіаційного рівняння, з урахуванням того, що структури задовольняють всім крайовим умовам, при цьому позначивши

$$\omega P_i^W = \psi_i, P_i^M = \varphi_i ,$$

отримаємо для стержня систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів структур у наступному вигляді:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{p} B_j \int_0^L \psi''_j \varphi_k dz - \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{1}{EJ_x} \int_0^L \varphi_i \varphi_k dz + \frac{1}{EJ_x} \int_0^L M_x^c(z) \varphi_k dz = 0, \quad k = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^{n} A_i \int_0^L \psi_m \varphi''_i dz - \int_0^L q_z(z) \psi_m dz = 0, \quad m = 1, \dots, p. \end{cases} \quad (9)$$

В даних рівняннях, на відміну від задачі пружного деформування стержня за плоского згину, враховані додаткові складові, що відповідають повзучості. Систему рівнянь (9) можна записати з урахуванням $m = k = n$ в матричному вигляді наступним чином:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_M \\ q_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_z^c \\ q_z \end{bmatrix}, \quad (10)$$

де $q_M[\ i\ ] = A_i$, $q_u[\ i\ ] = B_i$,

$$K_{11}[\ i, j\ ] = -\frac{1}{EJ_x} \int_0^L \varphi_i \varphi_j dz; \quad K_{12}[\ i, j\ ] = \int_0^L \psi''_j \varphi_i dz;$$

$$K_{21}[\ i, j\ ] = \int_0^L \psi_i \varphi''_j dz; \quad K_{22}[\ i, j\ ] = 0; \quad (11)$$

$$q_z[i] = \int_0^l q_z \psi_i dz\ , \quad q_z^c[i] = -\frac{1}{EJ_x} \int_0^L M_x^c \varphi_i dz\ .$$

В даному випадку отримаємо матричні рівняння:

$$\begin{aligned} &[K_{11}]\{q_M\} + [K_{12}]\{q_u\} = \{q_z^c\}; \\ &[K_{21}]\{q_M\} = \{q_z\}; \end{aligned} \quad (12)$$

Потрібно відмітити, що для обчислення виразу $q_z^c[i] = -\frac{1}{EJ_x} \int_0^L M_x^c \varphi_i dz$ на кожному кроці за часом необхідно мати значення компонент незворотних деформацій повзучості. Для чого рівняння стану повзучості (6) необхідно інтегрувати, наприклад, за допомогою методу Рунге-Кутта.

Задача, таким чином, зводиться до пошуку невизначених компонентів структур рішень з умови стаціонарності змішаного варіаційного функціонала. Для знаходження невідомих компонентів структур рішень (8) з системи алгебраїчних рівнянь (12) в роботі використовувався метод Гауса. Для визначення коефіцієнтів матриць (11) системи рівнянь (12) використовувався числовий метод Гауса при інтегрування по довжині і товщині стержня.

Таким чином метод розв’язання задачі повзучості й пошкоджуваності стержня полягає в наступному: використовуючи значення напружень, що визначаються через згинальний момент із системи рівнянь (5) у початковий момент часу, виконується інтегрування рівнянь стану повзучості виду (6) з використанням методу Рунге-Кутта в модифікації Мерсона й триває рішення за часом на основі змішаного варіаційного функціонала (4). Дана методика у загальному випадку для задач повзучості тіл викладена докладно в роботах [3, 5, 9, 10].

Результати дослідження. По запропонованому алгоритму розв’язання задачі повзучості в статті виконані числові дослідження.

Для конкретизації матеріальних постійних, які входять у рівняння стану ізотропних матеріалів при повзучості використовуються дослідні дані про одноосьову повзучість зразків [1,3-6,8].

Спочатку в роботі розглянуто стержень прямокутного поперечного переріза з жорстко закріпленими краями (рис. 1), який виготовлений з матеріалу Д16АТ. Стержень при температурі $300^0 C$ деформується в умовах повзучості під дією рівномірно розподіленого поперечного навантаження q=2.5 *кН/м*. Параметри стержня в розрахунках прийняті наступними: довжина L=2 *м*, ширина b=0.01 *м*, висота h=0.1 *м*. Для вивчення збіжності числових рішень в початковий момент часу результати розрахунків порівнювались з аналітичним розв’язком задачі (пружного деформування стержня), як і в роботах [2, 3]. Зіставлення отриманих результатів свідчить про їх співпадіння.

Фізико-механічні постійні ізотропного сплаву Д16АТ у рівняннях стану повзучості, як й у роботі [3, 9, 10], при температурі T=$300^0 C$, прийнято рівними:

$$E = 65 \ \textit{ГПа}, \ B = 0.34 \cdot 10^{-7} \ \textit{МПа}^{-n}/\textit{ч},$$

$$D = 1.9 \cdot 10^{-7} \ \textit{МПа}^{-m}/\textit{ч}, \ n = m = k = l = 2.93 \, , \ \alpha = 0 \, , \ \nu = 0.3 \, .$$

Дані результати вперше наведені в роботі [3], в даній роботі інтегрування коефіцієнтів матриць систем Рітца виконувалось з використанням числового методу Сімпсона при інтегруванні по довжині і товщині стержня. Але в даному випадку для інтегрування коефіцієнтів матриць систем Рітца (12) використовувався метод Гауса. На рис. 2 представлені епюри нормальних напружень у перерізі стержня в місці жорсткого закріплення та надані зміни прогинів стержня для різних моментів часу: 1 – у початковий, 2 – у момент часу 29 годин й 3 – у момент близький до завершення прихованого руйнування (51 година). Розрахунки проводилися з утриманням 4 базисних функцій в апроксимаціях прогину і згинального моменту вздовж довжини стержня. Сітка для знаходження компонентів незворотної деформації повзучості і параметра пошкоджуваності обиралася наступною: 48 точка вздовж довжини стержня й 32 точки вздовж висоти

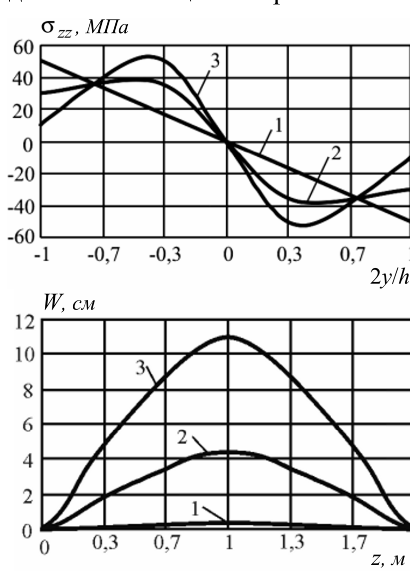

Рис. 2. Зміна у часі нормальних напружень і прогину стержня

перерізу стержня. Слід зазначити досить суттєвий перерозподіл напружень та зростання прогину у часі. Встановлено, що за використання методу Сімпсона для інтегрування коефіцієнтів матриць систем Рітца, час до руйнування такого стержня зменшувався майже на 10% у порівнянні з використанням високоточного метода Гауса при інтегрування коефіцієнтів системи (12) по довжині та товщині.

Далі розглянута повзучість та пошкоджуваність стержня на шарнірних нерухомих опорах (рис. 3). Геометричні розміри стержня, значення навантаження, фізико-механічні властивості матеріалу прийняті такими ж, як і в попередньому прикладі стержня з жорстким закріпленням.

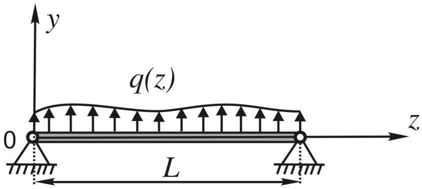

Рис. 3. Схема шарнірно закріпленого стержня

На рис. 4 представлені епюри нормальних напружень у середньому перерізі стержня та надані зміни прогинів стержня для різних моментів часу: 1 – у початковий, 2 – у момент часу 8.7 години й 3 – у момент близький до завершення прихованого руйнування - 15 годин.

Можна зробити висновок про суттєве зростання прогину стержня в часі, зменшення часу до руйнування стержня в даному прикладі майже в 3.5 рази в порівнянні з попереднім прикладом (жорсткого закріплення стержня по краям).

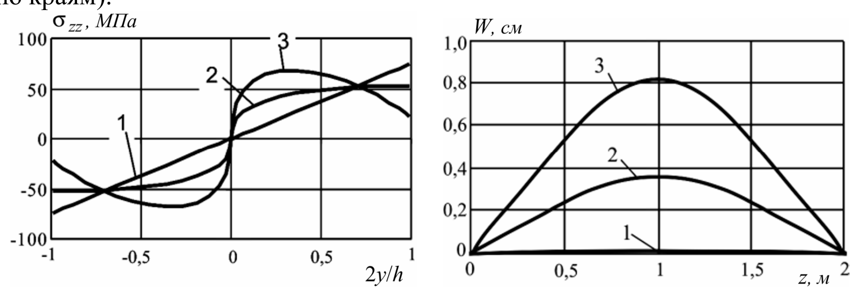

Рис. 4. Зміна у часі нормальних напружень і прогину стержня

Далі розглянута повзучість та пошкоджуваність жорстко закріпленого стержня з лівого краю (рис. 5). Геометричні розміри стержня, значення навантаження, фізико-механічні властивості матеріалу зберігаються такими ж самими, як і в попередніх прикладах.

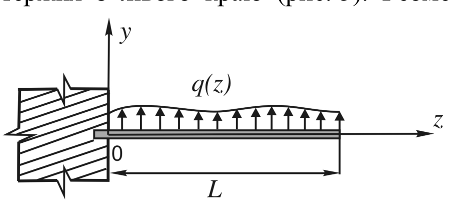

Рис. 5. Схема жорстко закріпленого стержня

На рис. 6 представлені епюри нормальних напружень у перерізі жорсткого закріплення стержня та надані зміни прогинів стержня для різних моментів часу: 1 – у початковий, 2 – у момент часу 0.15 годин й 3 – у момент близький до завершення прихованого руйнування – 0.26 годин.

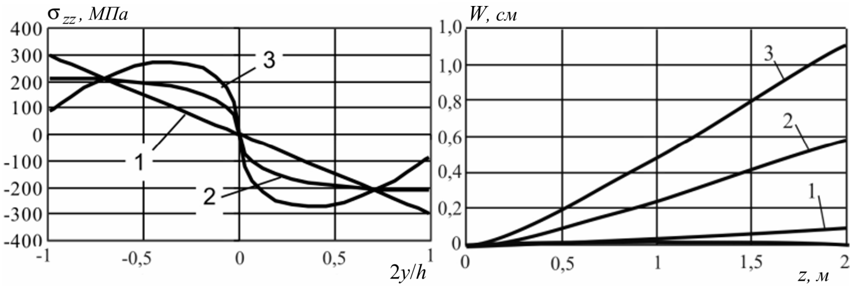

Рис. 6. Зміна у часі нормальних напружень і прогину стержня

Можна зробити висновок про суттєве зростання прогину стержня в часі, зменшення часу до руйнування стержня в даному прикладі майже в 57 разів в порівнянні з попереднім прикладом (стержень з шарнірно нерухомими опорами).

Висновки. У статті розглянуті повзучість і пошкоджуваність стержнів на базі змішаного варіаційного функціонала. Проведені числові дослідження збіжності рішень при варіюванні кількістю утримуваних компонентів структур і числом точок дискретизації області інтегрування стержня. Розрахунками встановлено, що зі збільшенням числа базисних функцій і кількості точок області дискретизації результати розрахунків практично не змінюються. За результатами проведених розрахунків можна зробити висновок про істотний вплив росту деформацій повзучості на перерозподіл напружень і зростання прогинів стержнів із часом для усіх видів закріплення. Найбільш небезпечним виявляється жорстке закріплення з лівого краю стержня, час до руйнування для такого типу закріплення суттєво зменшується у порівнянні з іншими типами наведеними в даній статті.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Sychov A.* Geometrically nonlinear bending of thin - walled shells and plates under creep - damage conditions. Arch. Appl. Mech., 67, (1997), p. 339 - 352.
2. *Демидов В.И.* Теория упругости. М.: Высшая школа, 1978 г., 387 с.
3. *Морачковский О.К., Соболь В.Н.* Решения задач ползучести тонкостенных стержней и оболочек на базе смешанного вариационного принципа // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків: НТУ «ХПІ», 2002.– № 10, Т.2 – С. 82-86.
4. *Малинин Н.Н.* Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций. - М.: Машиностроение, 1981. - 221с.
5. *Морачковский О.К., Соболь В.Н.* Метод решения задач ползучести тел на основе смешанного вариационного принципа // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків: НТУ «ХПІ», 2003. – № 12, Т.1 – С. 84-89.
6. *Naumenko K.* On the use of the first order shear deformation models of beams, plates and shells in creep lifetime estimations. Tech. Mech., 20, (2000), 215-226.
7. *Reissner E.* On a certain mixed variational theorem and on laminated elastic shell theory. Reprinted from Refined Dynamical Theories of Beams, Plates and Shells, Springer Verlag, 1987, pp. 17 – 27.
8. *Romashov Yu.V., Sobol V.N.* Mathematical formulations and numerical solutions of initial-boundary-value problem of creep theory // Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences / N.N. Kizilova, G.N. Zholtkevych (eds.). – Kharkov: Publishing house PPB Virovec' A.P. Publishing house is a group "Apostrophe", 2011. – 396 p. – P. 120-129.

9. *Соболь В.Н.* Численные решения задач ползучести стержней на базе смешанного вариационного функционала // Сборник научных трудов Sworld. – Выпуск 4(41). Том 3. – Иваново: Научный мир, 2015.– С. 4-7.
10. *Савін О.Б., Соболь В.Н.* Повзучість та пошкоджуваність стержнів і циліндрів на базі змішаного варіаційного функціонала // Науковий вісник будівництва. – Харків: ХНУБА – 2016.– № 4 (86).– С. 130-134.

REFERENCES

1. *Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Sychov A.* Geometrically nonlinear bending of thin - walled shells and plates under creep - damage conditions. Arch. Appl. Mech., 67, (1997), p. 339 - 352.
2. *Demidov V.I.* Teoriya uprugosti (Elasticity theory). M.: Vysshaya shkola. 1978 g.. 387 p.-rus.
3. *Morachkovskiy O.K., Sobol V.N.* Resheniya zadach polzuchesti tonkostennykh sterzhney i obolochek na baze smeshannogo variatsionnogo printsipa (Creep problems solutions of thin-walled beams and shells on the base of a mixed variational principle) // Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «Kharkivs'kyy politekhnichnyy instytut». – Kharkiv: NTU «KhPI», 2002.– № 10, V.2 – p. 82-86.-rus.
4. *Malinin N.N.* Raschety na polzuchest elementov mashinostroitelnykh konstruktsiy (Creep solutions of machine building elements). - M.: Mashinostroyeniye. 1981. – 221p.-rus.
5. *Morachkovskiy O.K., Sobol V.N.* Metod resheniya zadach polzuchesti tel na osnove smeshannogo variatsionnogo printsipa (Solution method of creep problems on the base of a mixed variational principle) // Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «Kharkivs'kyy politekhnichnyy instytut». – Kharkiv: NTU «KhPI», 2003. – № 12, V.1 – P. 84-89.-rus.
6. *Naumenko K.* On the use of the first order shear deformation models of beams, plates and shells in creep lifetime estimations. Tech. Mech., 20, (2000), 215-226.
7. *Reissner E.* On a certain mixed variational theorem and on laminated elastic shell theory. Reprinted from Refined Dynamical Theories of Beams, Plates and Shells, Springer Verlag, 1987, pp. 17 – 27.
8. *Romashov Yu.V., Sobol V.N.* Mathematical formulations and numerical solutions of initial-boundary-value problem of creep theory // Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences / N.N. Kizilova, G.N. Zholtkevych (eds.). – Kharkov: Publishing house PPB Virovec' A.P. Publishing house is a group "Apostrophe", 2011. – 396 p. – P. 120-129.
9. *Sobol V.N.* Chislennyye resheniya zadach polzuchesti sterzhney na baze smeshannogo variatsionnogo funktsionala (Numerical solutions of creep problems for beams by using mixed variational functional) // Sbornik nauchnykh trudov Sworld. – Vypusk 4(41). Tom 3. – Ivanovo: Nauchnyy mir. 2015. – P. 4-7.-rus.
10. *Savin O.B., Sobol' V.N.* Povzuchist' ta poshkodzhuvanist' sterzhniv i tsylindriv na bazi zmishanoho variatsiynoho funktsionala (Creep and damage of beams and tubes by using mixed variational functional) // Naukovyy visnyk budivnytstva. – Kharkiv: KhNUBA – 2016.– №4 (86).– P. 130-134.-ukr.

Стаття надійшла 02.05.2018

Savin O.B., Sobol' V.N.

MIXED VARIATIONAL FUNCTIONAL FOR CREEP-DAMAGE PROBLEMS OF BENDING BEAMS

It is necessary to take into account the creep phenomena in long-term strength analysis of structural elements with exploitation at elevated temperatures. This process leads to evaluation of creep irreversible strains and damage parameter and finally to predict the fracture. The most of structural members in aviation and space-rocket techniques have such exploitation conditions. For isotropic materials in the creep process can be used the Rabotnov-Kachanov theory with a scalar damage or continuity parameters. Defects in material accumulate at elevated temperature due to the creep process. This fact is proved by experimental data in metallurgical science.

In the paper the mathematical statement of creep-damage problems for thin-walled beams in bending is presented. The mathematical statement include the mixed variation principle, which is formulated on independently varied functions of displacements and stresses for known creep strains at arbitrary moment of time, and the two numerical methods. The complete system of initial-boundary-value problem of creep for thin-walled beams can be solved by using numerical methods. The first one is based on the variational statement by using variational-structural method of the R – functions theory (RFM - Rvachov's Functions method). The second one is based on the Runge–Kutta–Merson method. The Runge–Kutta–Merson numerical method is used for solving of creep state equations for isotropic material.

Practically important numerical estimations of strength and durability of constructive machine elements, such as beams, are given. Firstly, the test examples are presented. At initial time the numerical results were compared with known analytical results. Numerical data demonstrate the full convergence and coincidence of approximate solutions.

Also numerical results of creep-damage problems for bending beams with different types of edges fixations are given. First numerical results are presented for fixed support beams under constant loading along the beam length. The second one – for hinged supported beam and the last one – for beam with left fixed support.

It can be concluded that there are significant stresses redistribution and growth of displacements in time for all types of edges fixation of mentioned above beams.

Key words: creep, damage, mixed functional, variational-structural method, beam.

Савин А.Б., Соболь В.Н.

СМЕШАННЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ ФУНКЦИОНАЛ В ЗАДАЧАХ ПОЛЗУЧЕСТИ И ПОВРЕЖДАЕМОСТИ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ИЗГИБЕ

В статье рассматривается вариационная постановка задачи ползучести и повреждаемости стержней при их изгибе. Метод решения задачи основан на сочетании пошагового интегрирования уравнений состояния ползучести и решением на каждом шаге вариационного равенства. Представлены численные результаты исследований на базе предложенного метода решения задач ползучести и повреждаемости стержней с разными видами закрепления их краев. Сделаны выводы по полученным результатам расчетов.

Ключевые слова: ползучесть, повреждаемость, смешанный функционал, вариационно-структурный метод, стержень.

УДК 539.3

Савін О.Б., Соболь В.М. **Змішаний варіаційний функціонал в задачах повзучості та пошкоджуваності стержнів при згині** / Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 115-123.

Розглядається метод розв'язання задач повзучості та пошкоджуваності стержнів при згині з використанням змішаного варіаційного функціонала.

Табл. 0. Іл. 6. Бібліогр. 10 назв.

Savin O.B., Sobol' V.N. **Mixed variational functional for creep-damage problems of bending beams** / Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles. - Kyiv: KNUBA, 2017. – Issue 100. – P. 115-123. – Ukr.

The solution method of creep-damage problems of bending beams by using of the mixed variational functional is considered.

Tabl. 0. Fig. 6. Bibliograph. 10 ref.

Савин А.Б., Соболь В.Н. **Смешанный вариационный функционал в задачах ползучести и повреждаемости стержней при изгибе** / Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-техн. сборн. – К.: КНУСА, 2018. – Вып. 100. – С. 115-123.

Рассматривается метод решения задач ползучести и повреждаемости с использованием смешанного вариационного функционала.

Табл. 0. Ил. 6. Библиогр. 10 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): *кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельної механіки Харківського національного університету будівництва та архітектури*
Адреса робоча: *61002 Україна, м. Харків, вул. Сумська 40, Харківський національний університет будівництва та архітектури, САВІНУ Олександру Борисовичу.*
Мобільний тел.: *+38(097) 800-53-30;*
E-mail: *asavin344@gmail.com*

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): *кандидат технічних наук, доцент кафедри теоретичної механіки Харківського національного університету будівництва та архітектури*
Адреса робоча: *61002 Україна, м. Харків, вул. Сумська 40, Харківський національний університет будівництва та архітектури, СОБОЛЮ Володимиру Миколайовичу.*
Мобільний тел.: *+38(068) 885-94-26;*
E-mail: *sobol_vn@ukr.net*