

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ДРУГОЇ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУ З ЦИЛІНДРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ

В.Ю. Мірошніков,
канд. техн. наук, доцент

Харківський національний університет будівництва та архітектури, м. Харків, Україна

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.77-90

Досліджено напружено – деформований стан шару з циліндричною порожниною, коли на межах шару та на межі порожнини задані переміщення. Розв’язок просторової задачі теорії пружності отримано узагальненим методом Фур’є стосовно системи рівнянь Ламе в циліндричних координатах, пов’язаних із циліндром, та декартових координатах, пов’язаних із межами шару. Нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які отримані в результаті задоволення граничних умов, вирішено методом усічення. В результаті були отримані переміщення та напруження в різних точках пружного тіла. Проведено аналіз напружено – деформованого стану тіла при різних відстанях від циліндричної порожнини до меж шару.

Ключові слова: циліндрична порожнина в шарі, рівняння Ламе, узагальнений метод Фур’є, нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Вступ. При проектуванні різного роду просторових конструкцій та комунікацій, де розрахунковою схемою є шар з циліндричними порожнинами, необхідно мати уявлення про розподіл напружень навколо циліндричної порожнини та меж шару. Для досягнення цієї мети потрібно мати алгоритм розрахунку, який би давав можливість отримувати результат з необхідною точністю.

В даній роботі розглядається просторова задача теорії пружності, коли порожнина розташована в шарі паралельно його поверхням, на межах шару та на межі порожнини задано переміщення.

В публікаціях зустрічаються задачі для простору, півпростору та шару з циліндричними порожнинами, з різними типами граничних умов на них та різними методами розв’язку.

Так в роботах [1, 2] розглядаються стаціонарні задачі дифракції хвиль в просторі, в півпросторі або шарі з циліндричною порожниною.

В роботах [3, 4] досліджуються задачі про дифракцію хвиль в півпросторі з однією циліндричною порожниною на основі рівняння Гельмгольца. Задачі розв’язуються з використанням перетворення площини з круговим отвором в концентричне кільце, або застосовується комформне перетворення та коллокаційна схема методу найменших квадратів. Описані алгоритми дозволяють розрахувати задачі тільки з однією порожниною у півпросторі і непридатні для шару.

В роботі [5] з використанням методу зображень побудовані чисельно-аналітичні розрахунки двовимірної крайової задачі про дифракційне розсіяння симетричних нормальних хвиль поздовжнього зсуву для шару з циліндричною порожниною.

Шар зі сферичною порожниною, який розтягується радіальними зусиллями на нескінченності, розглянуто в роботі [6].

Порожнистий циліндр та шар з круговим отвором, які розв'язуються за допомогою методу суперпозиції, розглянуто в [7].

Порожнини перпендикулярні до поверхонь шару розглянуті в [8, 9, 10].

Роботи [11, 12, 13] присвячені визначенню напруженого стану кінцевого циліндра. Метод заснований на суперпозиції розв'язків і розкладанні у ряди Фур'є і Діні. Але задачі для пружних тіл з декількома граничними поверхнями не можуть бути розв'язані в рамках класичного підходу. Для таких задач необхідно було створювати узагальнений метод Фур'є [14], який і був покладений в основу підходу до розв'язку задачі, вказаної у заголовку.

За допомогою узагальненого методу Фур'є було розв'язано задачу для півпростору з циліндричними порожнинами в переміщеннях [15], в напруженнях [16, 17, 18] та змішану задачу [19].

Для шару з циліндричними порожнинами готових алгоритмів в просторовому варіанті немає, тож проблема розрахунку таких задач є актуальною.

Метою цієї роботи є:

– розробка аналітико-чисельного алгоритму розрахунку другої основної задачі теорії пружності (на усіх граничних поверхнях задані переміщення) для шару з циліндричною порожниною, яка розташована паралельно поверхням шару;

– проведення аналізу напружено-деформованого стану тіла, визначення впливу відстані між циліндричною порожниною та межами шару на напруження в зоні перехідників між межами шару і циліндром.

Постановка задачі. В пружному однорідному шарі розташована

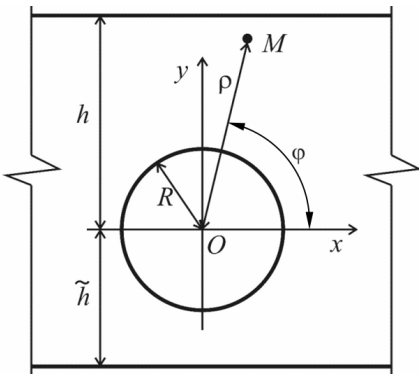


Рис. 1. Шар з циліндричною порожниною

кругова циліндрична порожнина радіусом R (рис. 1). Порожнину будемо розглядати у циліндричній системі координат (ρ, φ, z) , межі шару у декартовій системі координат (x, y, z) , яка однаково орієнтована та поєднана з системою координат циліндра. Верхня межа шару розташована на відстані $y=h$, нижня межа на відстані $y=-\tilde{h}$. Потрібно знайти розв'язок рівняння Ламе за умов, що на межах шару та на межі циліндричної порожнини задані переміщення:

$$\vec{U}(x, z)|_{y=h} = \vec{U}_h^0(x, z), \quad \vec{U}(x, z)|_{y=-\tilde{h}} = \vec{U}_{\tilde{h}}^0(x, z), \quad \vec{U}(\varphi, z)|_{\rho=R} = \vec{U}_\rho^0(\varphi, z),$$

де

$$\begin{aligned} \vec{U}_h^0(x, z) &= U_x^{(h)} \vec{e}_1^{(1)} + U_y^{(h)} \vec{e}_2^{(1)} + U_z^{(h)} \vec{e}_3^{(1)}, \\ \vec{U}_{\tilde{h}}^0(x, z) &= U_x^{(\tilde{h})} \vec{e}_1^{(1)} + U_y^{(\tilde{h})} \vec{e}_2^{(1)} + U_z^{(\tilde{h})} \vec{e}_3^{(1)}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\bar{U}_p^0(\varphi, z) = U_\rho^{(p)} \bar{e}_1^{(2)} + U_\phi^{(p)} \bar{e}_2^{(2)} + U_z^{(p)} \bar{e}_3^{(2)}$$

відомі функції; $\bar{e}_j^{(k)}$ ($j=1,2,3$) – орти декартової ($k=1$) і циліндричної ($k=2$) систем координат.

Усі задані вектори і функції будемо вважати швидко спадаючими до нуля на далеких відстанях від початку координат по координаті z для циліндра та по координатах x і z для меж шару.

Розв'язок задачі. Виберемо базисні розв'язки рівняння Ламе для зазначених систем координат у вигляді [14]:

$$\bar{u}_k^\pm(M_d; \lambda, \mu) = N_k^{(d)} u^\pm(M_d; \lambda, \mu), \quad k=1, 2, 3, \quad (2)$$

$$\bar{R}_{k,m}(M_p; \lambda) = N_k^{(p)} I_m(\lambda \rho) e^{i(\lambda z + m\varphi)}, \quad (3)$$

$$\bar{S}_{k,m}(M_p; \lambda) = N_k^{(p)} [s_m(\rho; \lambda) \cdot e^{i(\lambda z + m\varphi)}], \quad k=1, 2, 3,$$

$$N_1^{(d)} = \frac{1}{\lambda} \nabla, \quad N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda} (\sigma - 1) \bar{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla(y \cdot), \quad N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\bar{e}_3^{(1)} \cdot),$$

$$u^\pm(M_d; \lambda, \mu) = e^{i(\lambda z + \mu x) \pm \gamma y},$$

$$N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \nabla, \quad N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \left[\nabla \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\sigma - 1) \left(\nabla - \bar{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right], \quad N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\bar{e}_3^{(2)} \cdot),$$

$$s_m(\rho; \lambda) = (\text{sign } \lambda)^m K_m(|\lambda| \rho), \quad \gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad -\infty < \lambda, \mu < \infty,$$

де $M_d = (x, y, z)$, $M_p = (\rho, \varphi, z)$ – точки простору, відповідно в декартовій

системі координат та в циліндричній системі координат; $\bar{e}_j^{(k)}$ ($j=1,2,3$) –

орти декартової ($k=1$) і циліндричної ($k=2$) систем координат; σ –

коефіцієнт Пуассона; $I_m(x)$, $K_m(x)$ – модифіковані функції Бесселя;

$\bar{R}_{k,m}$, $\bar{S}_{k,m}$ ($k=1,2,3$) – відповідно внутрішні та зовнішні розв'язки рівняння

Ламе для циліндра; $\bar{u}_k^{(-)}$, $\bar{u}_k^{(+)}$ – розв'язки рівняння Ламе для меж шару.

Розв'язок задачі представимо у вигляді

$$\bar{U} = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}(\lambda) \cdot \bar{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) d\lambda + \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(H_k(\lambda, \mu) \cdot \bar{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu) + \right. \\ \left. + \tilde{H}_k(\lambda, \mu) \cdot \bar{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu) \right) d\mu d\lambda, \quad (4)$$

де $\bar{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$, $\bar{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ і $\bar{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ базисні розв'язки, які задані формулами (2) і (3), а невідомі функції $H_k(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ і $B_{k,m}(\lambda)$ необхідно знайти із крайових умов.

Для переходу між системами координат (рис. 1) скористаємось формулами:

- для переходу від координат циліндра до координат верхньої межі шару [16, ф-ла (4)]

$$\bar{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1 \cdot \bar{u}_k^{(-)} \cdot \frac{d\mu}{\gamma}, \quad k=1, 3,$$

$$\bar{S}_{2,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1 \cdot \left(\left(m \cdot \mu - \frac{\lambda^2}{\gamma} \right) \bar{u}_1^{(-)} - \lambda^2 \bar{u}_2^{(-)} + 4\mu(1-\sigma) \bar{u}_3^{(-)} \right) \frac{d\mu}{\gamma^2}, \quad (5)$$

де $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $\omega_1(\lambda, \mu) = \frac{\mu - \gamma}{\lambda}$, $y > 0$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

- для переходу від координат циліндра до координат нижньої межі шару

$$\bar{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_2 \cdot \bar{u}_k^{(+)} \cdot \frac{d\mu}{\gamma}, \quad k=1, 3,$$

$$\bar{S}_{2,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = -\frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_2 \cdot \left(\left(m \cdot \mu + \frac{\lambda^2}{\gamma} \right) \bar{u}_1^{(+)} - \lambda^2 \bar{u}_2^{(+)} + 4\mu(1-\sigma) \bar{u}_3^{(+)} \right) \frac{d\mu}{\gamma^2}, \quad (6)$$

де $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $\omega_2(\lambda, \mu) = \frac{\mu + \gamma}{\lambda}$, $y < 0$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

- для переходу від координат верхньої межі шару до координат циліндра [16, Ф-ла (5)]

$$\bar{u}_k^{(+)}(x, y, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i \cdot \omega_1)^m \bar{R}_{k,m}, \quad k=1, 3,$$

$$\bar{u}_2^{(+)}(x, y, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[(i \cdot \omega_1)^m \cdot \lambda^{-2} \left((m \cdot \mu) \cdot \bar{R}_{1,m} + \gamma \cdot \bar{R}_{2,m} + 4\mu(1-\sigma) \bar{R}_{3,m} \right) \right], \quad (7)$$

де

$$\bar{R}_{k,m} = \bar{b}_{k,m}(\rho, \lambda) \cdot e^{i(m\varphi + \lambda z)},$$

$$\bar{b}_{1,n}(\rho, \lambda) = \bar{e}_\rho \cdot I'_n(\lambda\rho) + i \cdot I_n(\lambda\rho) \cdot \left(\bar{e}_\varphi \frac{n}{\lambda\rho} + \bar{e}_z \right),$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_{2,n}(\rho, \lambda) = & \bar{e}_\rho \cdot \left[(4\sigma - 3) \cdot I'_n(\lambda\rho) + \lambda\rho \cdot I''_n(\lambda\rho) \right] + \\ & + \bar{e}_\varphi \cdot i \cdot m \left(I'_n(\lambda\rho) + \frac{4(\sigma - 1)}{\lambda\rho} I_n(\lambda\rho) \right) + \bar{e}_z \cdot i\lambda\rho I'_n(\lambda\rho), \end{aligned}$$

$$\bar{b}_{3,n}(\rho, \lambda) = - \left[\bar{e}_\rho \cdot I_n(\lambda\rho) \frac{n}{\lambda\rho} + \bar{e}_\varphi \cdot i \cdot I'_n(\lambda\rho) \right],$$

де \bar{e}_ρ , \bar{e}_φ , \bar{e}_z – орти в циліндричній системі координат;

- для переходу від координат нижньої межі шару до координат циліндра

$$\bar{u}_k^{(-)}(x, y, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i \cdot \omega_2)^m \bar{R}_{k,m}, \quad k=1, 3,$$

$$\bar{u}_2^{(-)}(x, y, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[(i \cdot \omega_2)^m \cdot \lambda^{-2} \left((m \cdot \mu) \cdot \bar{R}_{1,m} - \gamma \cdot \bar{R}_{2,m} + 4\mu(1-\sigma) \bar{R}_{3,m} \right) \right], \quad (8)$$

Для виконання граничних умов на верхній межі шару $y=h$, вектори $\bar{S}_{k,m}$ в (4) за допомогою формул переходу (5) перепишемо у декартовій системі

координат через базисні розв'язки $\bar{u}_k^{(-)}$. Отриманий вектор прирівнюємо (при $y=h$) заданому $\bar{U}_h^0(x, z)$, представленому через подвійний інтеграл Фур'є.

Для виконання граничних умов на нижній межі шару $y=-\tilde{h}$, вектори $\bar{S}_{k,m}$ в (4) за допомогою формул переходу (6) перепишемо у декартовій системі координат через базисні розв'язки $\bar{u}_k^{(+)}$. Отриманий вектор прирівнюємо (при $y=-\tilde{h}$) заданому $\bar{U}_{\tilde{h}}^0(x, z)$, представленому через подвійний інтеграл Фур'є.

Система з 6 рівнянь має визначник

$$\frac{4 \cdot e^{-x} \cdot \gamma^2 \cdot (e^{2x} - 1)(x^2 - \bar{\sigma}^2 \cdot \text{sh}^2 x)}{\lambda^4}, \quad (9)$$

де $x = \gamma(h + \tilde{h})$, $\bar{\sigma} = 3 - 4\sigma$.

З отриманих рівнянь знайдемо функції $H_k(\lambda, \mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ через $B_{k,m}(\lambda)$.

Для виконання граничних умов на циліндрі $\rho=R$, праву частину (4) за допомогою формул переходу (7, 8) перепишемо у циліндричній системі координат через базисні розв'язки $\bar{R}_{k,m}$, $\bar{S}_{k,m}$. Отриманий вектор прирівнюємо заданому $\bar{U}_p^0(x, z)$, представленому інтегралом та рядом Фур'є. В результаті отримуємо сукупність трьох систем лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих $B_{k,m}(\lambda)$.

Визначник цієї системи [16]:

$$\text{для } m = 0 \quad |\Delta_0| = 8(1 - \sigma) \cdot x^2 \cdot K_1^2(x) \cdot K_2(x),$$

$$\text{для } m \geq 1 \quad |\Delta_m| > 4m \cdot K_{m-1}(x) K_m(x) K_{m+1}(x), \quad x = |\lambda| \rho, \quad \lambda \neq 0.$$

Розв'язавши цю систему відносно $B_{k,m}(\lambda)$, знайдемо

$$B_{k,m}(\lambda) = F_k(H_1, H_2, H_3, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \tilde{H}_3),$$

де F_k – лінійні функції 6 аргументів.

Знайдені раніше через $B_{k,m}(\lambda)$ функції $H_k(\lambda, \mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ виключимо з системи рівнянь. В результаті отримуємо сукупність із трьох нескінчених систем лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду для визначення невідомих $B_{k,m}(\lambda)$.

Для отриманих систем, використовуючи (9), доведено їх однозначну розв'язність. Більш того, ці системи можна вирішувати методом усічення і має місто збіжність наближених рішень до точного. Знайдені з нескінченної системи рівнянь функції $B_{s,m}(\lambda)$ підставимо у вирази для $H_k(\lambda, \mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$. Цим будуть визначені всі невідомі задачі.

Чисельне дослідження напруженого стану. Маємо шар з циліндричною порожниною (рис. 1). Шар – ізотропний матеріал, коефіцієнт Пуассона $\sigma = 0,35$, модуль пружності $E = 2 \text{ кН/см}^2$. Радіус циліндричної порожнини $R = 10 \text{ см}$. Верхня межа шару розташована відносно центру циліндра на відстані $h = 40 \text{ см}$, нижня межа розташована в двох варіантах $\tilde{h} = 60 \text{ см}$ та $\tilde{h} = 20 \text{ см}$.

На межі циліндра задані переміщення $U_\rho^{(p)}(\varphi, z) = 10^{-4} \cdot (z^2 + 10^2)^2$, $U_\varphi^{(p)} = U_z^{(p)} = 0$. На верхній межі шару $U_x^{(h)} = U_y^{(h)} = U_z^{(h)} = 0$, на нижній межі $U_x^{(\tilde{h})} = U_y^{(\tilde{h})} = U_z^{(\tilde{h})} = 0$.

Нескінченна система рівнянь була зведена до кінцевої по параметру m – порядок системи. При $\tilde{h} = 60 \text{ см}$ параметр $m = 6$, при $\tilde{h} = 20 \text{ см}$ параметр $m = 10$. Межі інтегрування для заданих граничних функцій були $[-1, 1]$. Обчислення інтегралів виконано за допомогою квадратурних формул Філона та Сімпсона. Точність виконання граничних умов при вказаних значеннях геометричних параметрів 10^{-4} .

Напружений стан на поверхні циліндричної порожнини в площині $z = 0$ для варіантів, коли $\tilde{h} = 60 \text{ см}$ та $\tilde{h} = 20 \text{ см}$ представлений на рис. 2.

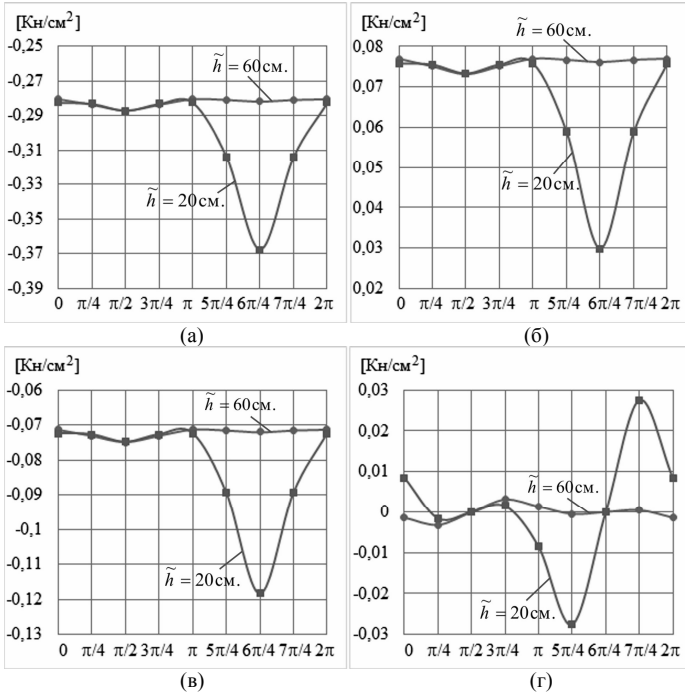


Рис.2. Напружений стан на поверхні циліндричної порожнини:

(а) – σ_ρ ; (б) – σ_φ ; (в) – σ_z ; (г) – $\tau_{\rho\varphi}$

Нормальні напруження на поверхні циліндричної порожнини (рис. 2 (а), (б), (в)) мають екстремальні значення навпроти меж шару ($\pi/2$, $6\pi/4$), та при наближенні цих меж до циліндричної порожнини напруження зростають.

Дотичні напруження $\tau_{\rho\varphi}$ на поверхні циліндричної порожнини (рис. 2 (г)) дорівнюють нулю навпроти меж шару ($\pi/2$, $6\pi/4$), екстремальні значення виникають при $\varphi=5\pi/16$, $\varphi=11\pi/16$, $\varphi=21\pi/16$ та $\varphi=27\pi/16$ (табл. 1, табл. 2). При наближенні меж шару до циліндричної порожнини дотичні напруження зростають.

Таблиця 1

Дотичні напруження $\tau_{\rho\varphi}$ (кН/см²) на поверхні циліндра при $\tilde{h}=60$ см

φ	0	$\pi/16$	$2\pi/16$	$3\pi/16$	$4\pi/16$	$5\pi/16$	$6\pi/16$	$7\pi/16$
$\tau_{\rho\varphi}$	-0,0014	-0,0021	-0,0027	-0,0031	-0,0033	-0,0030	-0,0023	-0,0013
φ	$8\pi/16$	$9\pi/16$	$10\pi/16$	$11\pi/16$	$12\pi/16$	$13\pi/16$	$14\pi/16$	$15\pi/16$
$\tau_{\rho\varphi}$	0,0000	0,0013	0,0023	0,0030	0,0033	0,0031	0,0027	0,0021
φ	$16\pi/16$	$17\pi/16$	$18\pi/16$	$19\pi/16$	$20\pi/16$	$21\pi/16$	$22\pi/16$	$23\pi/16$
$\tau_{\rho\varphi}$	0,0014	0,0008	0,0002	-0,0002	-0,0005	-0,0006	-0,0005	-0,0003
φ	$24\pi/16$	$25\pi/16$	$26\pi/16$	$27\pi/16$	$28\pi/16$	$29\pi/16$	$30\pi/16$	$31\pi/16$
$\tau_{\rho\varphi}$	0,0000	0,0003	0,0005	0,0006	0,0005	0,0002	-0,0002	-0,0008

Таблиця 2

Дотичні напруження $\tau_{\rho\varphi}$ (кН/см²) на поверхні циліндра при $\tilde{h}=20$ см

φ	0	$\pi/16$	$2\pi/16$	$3\pi/16$	$4\pi/16$	$5\pi/16$	$6\pi/16$	$7\pi/16$
$\tau_{\rho\varphi}$	0,0085	0,0047	0,0018	-0,0002	-0,0015	-0,0020	-0,0018	-0,0010
φ	$8\pi/16$	$9\pi/16$	$10\pi/16$	$11\pi/16$	$12\pi/16$	$13\pi/16$	$14\pi/16$	$15\pi/16$
$\tau_{\rho\varphi}$	0	0,0010	0,0018	0,0020	0,0015	0,0002	-0,0018	-0,0047
φ	$16\pi/16$	$17\pi/16$	$18\pi/16$	$19\pi/16$	$20\pi/16$	$21\pi/16$	$22\pi/16$	$23\pi/16$
$\tau_{\rho\varphi}$	-0,0085	-0,0131	-0,0183	-0,0235	-0,0275	-0,0284	-0,0242	-0,0141
φ	$24\pi/16$	$25\pi/16$	$26\pi/16$	$27\pi/16$	$28\pi/16$	$29\pi/16$	$30\pi/16$	$31\pi/16$
$\tau_{\rho\varphi}$	0	0,0141	0,0242	0,0284	0,0275	0,0235	0,0183	0,0131

Найбільші дотичні напруження $\tau_{\rho z}$ на поверхні циліндричної порожнини вздовж осі z виникають при $\varphi=0$ та при $\varphi=\pi$ та є максимальними при віддалених межах шару. При наближенні меж шару до циліндричної порожнини $\tau_{\rho z}$ зменшується. Дотичні напруження $\tau_{\rho z}$ при $\varphi=0$, $\tilde{h}=60$ см представлені на рис. 3.

На перехідках між циліндром та межами шару (вздовж осі y) в

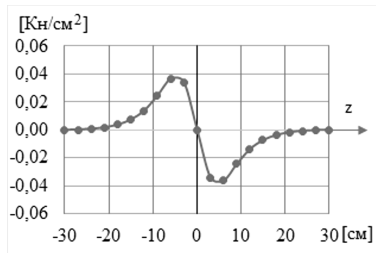
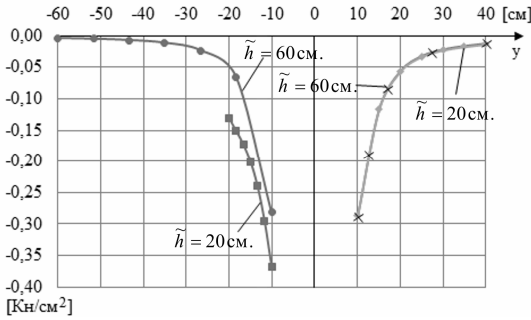


Рис. 3. Напруження $\tau_{\rho z}$ на поверхні циліндричної порожнини вздовж осі z при $\varphi=0$

Рис. 4. Напруження σ_ρ вздовж осі y в площині $z = 0$

площині $z=0$ напруження σ_ρ представлені на рис. 4.

Відстань \tilde{h} має вплив до 6% на напруження σ_ρ на перешийку між циліндром та верхньою межею шару (табл. 3). Найбільший вплив відстані \tilde{h} спостерігається на межі шару ($y=40$ см).

Таблиця 3

	$y=10$	$y=15$	$y=20$	$y=25$	$y=30$	$y=35$	$y=40$
$\tilde{h}=60$ см	-0,2873	-0,1173	-0,0568	-0,0331	-0,0225	-0,0171	-0,0133
$\tilde{h}=20$ см	-0,2871	-0,1172	-0,0570	-0,0336	-0,0232	-0,0179	-0,0141
різниця	0,05%	0,09%	0,35%	1,51%	3,11%	4,68%	6,0%

Суттєвий вплив відстань \tilde{h} має на перешийок між циліндром та нижньою межею шару (рис. 3, $-60 \leq y \leq -10$), де напруження на поверхні циліндричної порожнини ($y=-10$ см) при $\tilde{h}=60$ см становить $\sigma_\rho = -0,2818$ кН/см², при $\tilde{h}=20$ см становить $\sigma_\rho = -0,3677$ кН/см². На нижній межі шару при $\tilde{h}=60$ см $\sigma_\rho = -0,0040$ кН/см², при $\tilde{h}=20$ см $\sigma_\rho = -0,1312$ кН/см².

Напруження σ_ϕ на перешийках між циліндром та межами шару (вздовж осі y) в площині $z = 0$ представлені на рис. 5.

Різниця в напруженнях σ_ϕ на лінії перешийка між циліндром та верхньою межею шару в залежності від відстані \tilde{h} становить подекуди до 175% (табл. 4).

Таблиця 4

	$y=10$	$y=15$	$y=20$	$y=25$	$y=30$	$y=35$	$y=40$
$\tilde{h}=60$ см	0,0738	0,0315	0,0141	0,0064	0,0019	-0,0019	-0,0068
$\tilde{h}=20$ см	0,0733	0,0303	0,0128	0,0051	0,0007	-0,0030	-0,0076
різниця	0,7%	3,96%	10,15%	25,49%	174,4%	57,89%	11,76%

На перешийку між циліндром та нижньою межею шару (рис. 5) зі зменшенням відстані \tilde{h} напруження σ_ϕ на поверхні циліндричної порожнини зменшується: при $\tilde{h}=60$ см $\sigma_\phi = -0,0761$ кН/см²; при $\tilde{h}=20$ см

$\sigma_\phi = -0,0299 \text{ кН/см}^2$. На нижній межі шару зі зменшенням відстані \tilde{h} напруження σ_ϕ значно збільшуються: при $\tilde{h} = 60 \text{ см}$ $\sigma_\phi = -0,0021 \text{ кН/см}^2$; при $\tilde{h} = 20 \text{ см}$ $\sigma_\phi = -0,0706 \text{ кН/см}^2$.

Напруження σ_z на перешийках між циліндром та межами шару (вздовж осі y) в площині $z=0$ представлені на рис. 6.

На напруження σ_z на перешийку між циліндром та верхньою межею шару відстань \tilde{h} має вплив подекуди у 4 рази (табл. 5).

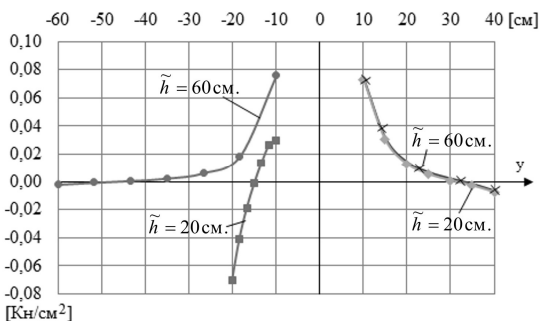


Рис. 5. Напруження σ_ϕ вздовж осі y в площині $z=0$

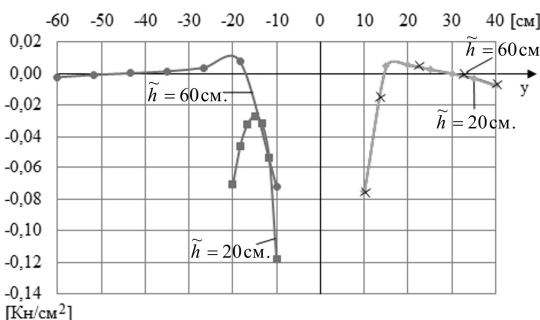


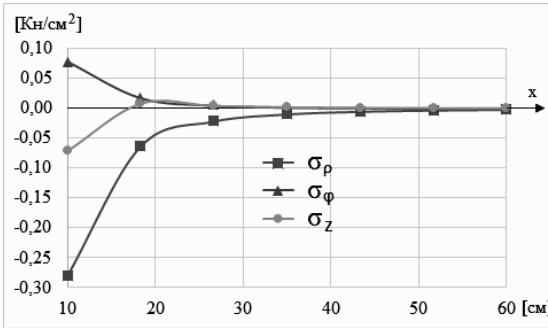
Рис. 6. Напруження σ_z вздовж осі y в площині $z = 0$

Таблиця 5

	$y=10$	$y=15$	$y=20$	$y=25$	$y=30$	$y=35$	$y=40$
$\tilde{h} = 60 \text{ см}$	-0,0749	0,0048	0,0056	0,0029	0,0004	-0,0025	-0,0072
$\tilde{h} = 20 \text{ см}$	-0,0748	0,0047	0,0054	0,0026	0,0001	-0,0029	-0,0076
різниця	0,13%	2,1%	3,3%	11,5%	300%	16%	5,55%

На перешийку між циліндром та нижньою межею шару (рис.6) при $\tilde{h} = 20 \text{ см}$ напруження σ_z не тільки значно більші за значеннями в порівнянні з $\tilde{h} = 60 \text{ см}$, але й мають постійні стискаючі значення напружень. На поверхні циліндра при $\tilde{h} = 60 \text{ см}$ $\sigma_z = -0,07198 \text{ кН/см}^2$, при $\tilde{h} = 20 \text{ см}$ $\sigma_z = -0,11826 \text{ кН/см}^2$. На нижній межі шару при $\tilde{h} = 60 \text{ см}$ $\sigma_z = -0,00215 \text{ кН/см}^2$, при $\tilde{h} = 20 \text{ см}$ $\sigma_z = -0,07063 \text{ кН/см}^2$.

Нормальні напруження вздовж осі x від циліндричної порожнини при $\tilde{h} = 60 \text{ см}$ і при $\tilde{h} = 20 \text{ см}$ мають однакові значення, які зображені на рис. 7.

Рис. 7. Напруження σ_ρ , σ_ϕ , σ_z вздовж осі x в площині $z = 0$

Нормальні напруження вздовж осі x мало відрізняються від напружень вздовж осі u при $\tilde{h}=60$ см по напрямку до нижньої межі шару. З цього можна зробити висновок про те, що при розташуванні межі шару на відстані понад 60 см ($R/h < 0,16$) цією межею можна знехтувати та розраховувати шар як півпростір.

Висновки. За допомогою узагальненого методу Фур'є розроблений аналітико-чисельний алгоритм розрахунку другої основної задачі теорії пружності (на усіх граничних поверхнях задані переміщення) для шару з циліндричною порожниною, яка розташована паралельно поверхням шару. Задача зведена до сукупності нескінчених систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Числові дослідження алгебраїчної системи дають можливість стверджувати, що її розв'язок може бути з будь якою ступінню точності знайдено методом редукції. Це підтверджується високою точністю виконання граничних умов.

Наведені графіки та таблиці дають картину розподілу напружень у найбільш цікавих зонах – на поверхні циліндричної порожнини та на перехідних між порожниною і межами шару. Проаналізовано вплив відстані між межами шару та циліндричною порожниною на напружений стан тіла.

Подальший розвиток цього напрямку можливий в збільшенні кількості циліндричних порожнин або розрахунку задачі з іншими крайовими умовами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – Київ: Наук. Думка. – 1978. – С. 307.
2. Гринченко В.Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Київ: Наук. Думка. – 1981. – 284 с.
3. Zhao M., van Dalen K.N., Barbosa J.M., Metrikine A.V. Semi-analytical Solution for the Dynamic Response of a Cylindrical Structure Embedded in a Homogeneous Half-Space // International Symposium on Environmental Vibration and Transportation Geodynamics Environmental Vibrations and Transportation Geodynamics. – 2017. – P. 369 – 388.
4. Coskun I., Enginb H., Ozmutlu A. Dynamic stress and displacement in an elastic half-space with a cylindrical cavity // Shock and Vibration. – 2011. – P. 827–838.
5. Волчков В.В., Вуколов Д.С., Сторожев В.И. Дифракция волн сдвига на внутренних туннельных цилиндрических неоднородностях в виде полости и включения в упругом слое со свободными границами // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 119 – 133.

6. *Проценко В.С., Николаев А.Г.* Пространственная задача Кирша // Математические методы анализа динамических систем. – 1982. – Вып. 6. – С. 3 – 11.
7. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Равновесие упругих тел канонической формы. Київ: Наук.думка. – 1985. – 280 с.
8. *Гузь А.Н., Космодамианский А.С., Шевченко В.П. и др.* Механика композитов. Том 7. Концентрация напряжений. Київ: Наук. думка. – 1998. – С. 114 – 137.
9. *Ковалев Ю.Д., Стрельникова Е.А., Кушир Д.В., Шрамко Ю.В.* Установившиеся колебания слоя, ослабленного двумя отверстиями, с торцами, покрытыми диафрагмой (симметричный случай) // Проблемы машинобудовання. – 2017. – Т. 20, № 4. – С. 37 – 44.
10. *Bobyleva T.* Approximate Method of Calculating Stresses in Layered Array // Procedia Engineering. – 2016. – Vol.153. – P.103 – 106. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.087>
11. *Meleshko V.V., Tokovyyu Yu.V.* Equilibrium of an elastic finite cylinder under axisymmetric discontinuous normal loadings // J.Eng. Math. – 2013. V. 78. – P.143 – 166. doi: <https://doi.org/10.1007/s10665-011-9524-y>
12. *Khoroshun L.P.* Mathematical models and method of the mechanics of stochastic composites // International Applied Mechanics. – 2000. V.36, №10. – P. 1284 – 1316. doi: <https://doi.org/10.1023/a:1009482032355>
13. *Дашко О.Г.* Трансверсально-изотропный слой с круговой цилиндрической полостью при заданной расщепляющей силе // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету. Технічні науки. – 2015. – Вип. 1. – С. 231 – 235.
14. *Николаев А.Г., Проценко В.С.* Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. – Харьков: Нац. аэрокосм. университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2011. – 344 с.
15. *Мирошников В.Ю.* Друга основна задача теорії пружності у півпросторі з декількома паралельними круговими циліндричними порожнинами // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – 2018. – №79. – С. 88 – 99.
16. *Проценко В. С., Украинец Н. А.* Применение обобщенного метода Фурье к решению первой основной задачи теории упругости в полупространстве с цилиндрической полостью // Вісник Запорізького національного університету. 2015. Вип. 2. С. 193–202.
17. *Николаев А.Г., Орлов Е.М.* Решение первой осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного полупространства со сферoidalной полостью // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип.20. – С. 253-259.
18. *Miroshnikov V.Yu.* First basic elasticity theory problem in a half-space with several parallel round cylindrical cavities // Journal of Mechanical Engineering. – 2018. – Vol. 21, № 2. – P. 12 – 18.
19. *Protsenko V., Miroshnikov V.* Investigating a problem from the theory of elasticity for a half-space with cylindrical cavities for which boundary conditions of contact type are assigned // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2018. – Vol 4, № 7 (94). – P. 43 – 50.

REFERENCES

1. *Guz' A.N., Kubenko V.D., Cherevko M.A.* Difraktsiya uprugikh voln (Diffraction of elastic waves). – Kiev: Nauk. Dumka. – 1978. – P.307. (In Russian).
2. *Grinchenko V.T., Meleshko V. V.* Garmonicheskiye kolebaniya i volny v uprugikh telakh (Harmonic vibrations and waves in elastic bodies). – Kiev: Nauk. Dumka. – 1981. – 284 s. (In Russian).
3. *Zhao M., van Dalen K. N., Barbosa J. M., Metrikine A. V.* Semi-analytical Solution for the Dynamic Response of a Cylindrical Structure Embedded in a Homogeneous Half-Space // International Symposium on Environmental Vibration and Transportation Geodynamics Environmental Vibrations and Transportation Geodynamics. – 2017. – P. 369 – 388.
4. *Coskun I., Enginb H., Ozmutlu A.* Dynamic stress and displacement in an elastic half-space with a cylindrical cavity // Shock and Vibration. – 2011. – P. 827–838.
5. *Volchkov V.V., Vukolov D.S., Storogev V.I.* Difraktsiya voln sdviga na vnutrennikh tunnel'nykh tsilindricheskikh neodnorodnostyakh v vide polosti i vklucheniya v uprugom sloye so svobodnymi granyami (Diffraction of shear waves by internal tunneling cylindrical non-homogeneities in the form of a cavity and inclusion in an elastic layer with free faces) // Solid mechanics. – 2016. – Vol. 46. – P. 119 – 133. (In Russian).
6. *Protsenko V.S., Nikolaev A.G.* Prostranstvennaya zadacha Kirsha (Kirsch spatial problem) // Mathematical methods for analyzing dynamic systems. – 1982. – Vol. 6. – P. 3 – 11. (In Russian).

7. *Grinchenko V.T., Ulitko A.F.* Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti i plastichnosti. Ravnovesiye uprugikh tel kanonicheskoy formy (Spatial problems of the theory of elasticity and plasticity. Equilibrium of elastic bodies of canonical form). - Kiev: Nauk. Dumka. – 1985. – 280 p. (In Russian).
8. *Guz' A.N., Kosmodamianskiy A.S., Shevchenko V.P. and others.* Mekhanika kompozitov (Mechanics of composites). Vol 7. Concentration of stresses. - Kiev: Nauk. Dumka. – 1998. – P. 114 – 137. (In Russian).
9. *Kovalev Yu. D., Strelnikova E. A., Kushnir D. V., Shramko Yu. V.* Ustanovivshiyesya kolebaniya sloya, oslablenogo dvumya otverstiyami, s tortsami, pokrytymi diafragmoy (simmetrichnyy sluchay) (Steady oscillations of the layer weakened by two holes, with the ends covered with a diaphragm (symmetric case)) // Journal of Mechanical Engineering. – 2017. – T. 20, № 4. – P. 37 – 44. (In Russian).
10. *Bobyleva T.* Approximate Method of Calculating Stresses in Layered Array // Procedia Engineering. – 2016. – Vol.153. – P.103 – 106. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.087>
11. *Meleshko V. V., Tokovyy Yu. V.* Equilibrium of an elastic finite cylinder under axisymmetric discontinuous normal loadings // J.Eng. Math. – 2013. V. 78. – P.143 – 166. doi: <https://doi.org/10.1007/s10665-011-9524-y>
12. *Khoroshun L. P.* Mathematical models and method of the mechanics of stochastic composites // International Applied Mechanics. – 2000. V.36, №10. – P. 1284 – 1316. doi: <https://doi.org/10.1023/a:1009482032355>
13. *Dashko O.G.* Transversal'no-izotropnyy sloy s krugovoy tsilindricheskoy polost'yu pri zadannoy rassheplyayushchey sile (Transversely isotropic layer with a circular cylindrical cavity for a given splitting force) // Zbirnyk naukovykh prats Dniprodzerzhynskoho derzhavnogo tekhnichnoho universytetu. Tekhnichni nauky. – 2015. – Vol. 1. – P. 231 – 235. (In Russian).
14. *Nikolaev A.G., Protsenko V.S.* Obobshchenny metod Fur'ye v prostranstvennykh zadachakh teorii uprugosti (Generalized Fourier method in spatial problems of the theory of elasticity). – Kharkov: National Aerospace University "KhAI", 2011. – 344 c. (In Russian).
15. *Miroshnikov V.Yu.* Druha osnovna zadacha teoriiy pruzhnosti u pivprostori z dekil'nykh komo paralelnykh kruhovymy tsylindrichnykh porozhnynamy (The second main problem of the theory of elasticity in a half-space with several parallel circular cylindrical cavities) // Otkrytyye informatsionnyye i komp'yuternyye integrirovannyye tekhnologii. – 2018. – №79. – P. 88 – 99. (In Ukrainian).
16. *Protsenko V.S., Ukraine N.A.* Primeneniye obobshchennogo metoda Fur'ye k resheniyu pervoy osnovnoy zadachi teorii uprugosti v poluprostranstve s tsilindricheskoy polost'yu (Application of the generalized Fourier method to the solution of the first main problem of the theory of elasticity in a half-space with a cylindrical cavity) // Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. 2015. Vol. 2. P. 193–202. (In Russian).
17. *Nikolaev A.G., Orlov E.M.* Resheniye pervoy osesimmetrichnoy termouprugoy krayevoy zadachi dlya transversal'no-izotropnogo poluprostranstva so sferoidal'noy polost'yu (Solution of the first axisymmetric thermoelastic boundary value problem for a transversely isotropic half-space with a spheroidal cavity) // Problemy obchysluvalnoy mekhaniky i mitsnosti konstruksiy. – 2012. – Vol.20. – P. 253-259. (In Russian).
18. *Miroshnikov V.Yu.* First basic elasticity theory problem in a half-space with several parallel round cylindrical cavities // Journal of Mechanical Engineering. – 2018. – Vol. 21, № 2. – P. 12 – 18.
19. *Protsenko V., Miroshnikov V.* Investigating a problem from the theory of elasticity for a half-space with cylindrical cavities for which boundary conditions of contact type are assigned // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2018. – Vol 4, № 7 (94). – P. 43 – 50.

Стаття надійшла 26.11.2018 р.

Miroshnikov V. Yu.

THE STUDY OF THE SECOND MAIN PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR A LAYER WITH A CYLINDRICAL CAVITY

The stress - strain state of a layer with a cylindrical cavity was investigated, when displacements are set at the boundaries of the layer and at the boundary of the cavity. On the cavity and on the boundaries of the layer, displacements are given.

The solution of the spatial problem of the theory of elasticity is obtained by generalized Fourier method in relation to the system of Lamé equations in cylindrical coordinates connected with the cylinder, and Cartesian coordinates associated with the boundaries of the layer. Infinite systems of linear algebraic equations obtained as a result of satisfaction of boundary conditions, solved by the truncation method. As a result, movements and strains were obtained at different points of the elastic body.

Numerical studies of the algebraic system of equations give grounds to assert that its solution can be found with any degree of accuracy by the method of reduction, which is proved by the high accuracy of the implementation of boundary conditions.

A numerical analysis of the stress - strain state of the body at various distances from the cylindrical cavity to the boundaries of the layer is carried out.

The greatest normal stresses occur on the surface of the cylindrical cavity and on the isthmus between the surface of the cylindrical cavity and the boundaries of the layer. As the boundary surfaces approach each other, the stresses increase.

The greatest tangential stresses $\tau_{\rho\varphi}$ arise on the surface of the cylindrical cavity at $\varphi = 5\pi / 16$, $\varphi = 11\pi / 16$, $\varphi = 21\pi / 16$ and $\varphi = 27\pi / 16$, and with the approximation of the boundary surfaces to each other the stress $\tau_{\rho\varphi}$ increases.

The greatest tangential stresses $\tau_{\rho z}$ arise on the surface of the cylindrical cavity along the z axis at $\varphi = 0$ and at $\varphi = \pi$. When the boundaries of the layer approximation the cylindrical cavity $\tau_{\rho z}$ decreases.

The given analysis and algorithm of calculation can be used in the design of constructions, in the calculation schemes of which there is a layer with a cylindrical cavity and specified on the boundary surfaces by displacements.

Keywords: cylindrical cavity in a layer, Lamé's equation, generalized Fourier method, infinite systems of linear algebraic equations.

Мирошников В. Ю.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СЛОЯ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Исследовано напряженно - деформированное состояние слоя с цилиндрической полостью, когда на границах слоя и на границе полости заданы перемещения. Решение пространственной задачи теории упругости получено обобщенным методом Фурье относительно системы уравнений Ламе в цилиндрических координатах, связанных с цилиндром, и декартовых координатах, связанных с границами слоя. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, полученные в результате удовлетворения граничных условий, решено методом усечения. В результате были получены перемещения и напряжения в различных точках упругого тела. Проведен анализ напряженно - деформированного состояния тела при различных расстояниях от цилиндрической полости до границ слоя.

Ключевые слова: цилиндрическая полость в слое, уравнения Ламе, обобщенный метод Фурье, бесконечные системы линейных алгебраических уравнений.

УДК 539.3

Мирошников В.Ю. Дослідження другої основної задачі теорії пружності для шару з циліндричною порожниною // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 77-90.

Досліджено напружено – деформований стан шару з циліндричною порожниною, коли на межах шару та на межі порожнини задані переміщення.

Табл. 5. Іл. 7. Бібліогр. 19 назв.

UDC 539.3

Miroshnikov V.Yu. The study of the second main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles. - Kyiv: KNUBA, 2019. - Issue 102. - P. 77-90. – Ukr.

The stress - strain state of a layer with a cylindrical cavity was investigated, when displacements are set at the boundaries of the layer and at the boundary of the cavity.

Tabl. 5. Fig. 7. Ref. 19.

УДК 539.3

Мирошников В.Ю. Исследование второй основной задачи теории упругости для слоя с цилиндрической полостью // Сопrotивление материалов и теория сооружений: науч.-техн. сборн. - К.: КНУСА, 2019. - Вып. 102. - С. 77-90.

Исследовано напряженно - деформированное состояние слоя с цилиндрической полостью, когда на границах слоя и на границе полости заданы перемещения.

Табл. 5. Ил. 7. Библиогр. 19 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): *Кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельної механіки Харківського національного університету будівництва та архітектури Мірошніков Віталій Юрійович*

Адреса робоча: *61002, Україна, м. Харків, вул.Сумська 40, Харківський національний університет будівництва та архітектури, Мірошнікову Віталію Юрійовичу*

Робочий тел.: *+38 057 7062063*

Мобільний. тел.: *+38 067 7893333*

E-mail: *m0672628781@gmail.com*

ORCID ID *http://orcid.org/0000-0002-9491-0181*