УДК 539.3

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ЗАМКНЕНИХ КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК ПРИ СКЛАДНОМУ ОБЕРТАННІ

П.П. Лізунов,
д-р техн. наук

Е.З. Криксунов,
канд. техн. наук

О.М. Фесан,
канд. техн. наук

Київський *національний університет будівництва і архітектури,
Київ, Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03037*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.191-198

В даній роботі наведені співвідношення, що визначають напружено-деформований стан системи двох замкнених конічних оболонок, з'єднаних центральною жорсткою вставкою, які обертаються з постійною кутовою швидкістю навколо осі симетрії системи, центр мас якої здійснює рух в центральному силовому полі.

Ключові слова: напружено-деформований стан, замкнені конічні оболонки, обертальний рух, центральне силове поле.

Вступ. В будівельній техніці, машинобудуванні, авіабудуванні, космічній техніці та інших галузях народного господарства виникають задачі дослідження напружено-деформованого стану пластин, мембран та оболонок, що обертаються. Основним навантаженням, яке діє на елементи таких систем, є значні відцентрові сили інерції, які істотно впливають на міцнісні характеристики конструкцій.

В багатьох випадках вісь обертання механічних систем може здійснювати поворот, що призводить до виникнення не тільки переносних і відносних, а і коріолісових сил інерції, що змінюються періодично за часом. Гіроскопічна взаємодія між обертальним переносним рухом системи і відносними пружними коливаннями елементів є джерелом збудження прецесійних коливань, які можуть носити резонансний або нестійкий характер. Виникаючий при зміні осі орієнтації системи гіроскопічний момент викликає появу знакозмінних напружень, які істотно впливають на міцність та надійність елементів конструкцій.

В роботах [1, 3-10] досліджено напружено-деформований стан і коливання мембран, пластин та оболонок, що здійснюють складний рух в центральному силовому полі. В даній роботі виконано математичне моделювання напружено-деформованого стану системи двох складених конічних оболонок з центральною жорсткою вставкою при складному обертанні.

1. Розглянемо систему двох замкнених конічних оболонок, з'єднаних центральною жорсткою вставкою, що обертаються в протилежних напрямах в центральному силовому полі з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі симетрії OZ системи. На елемент оболонки діє навантаження, що складається з гравітаційних та інерційних сил, але при великих значеннях кутової швидкості власного обертання системи

гравітаційними навантаженнями можна знехтувати. Тоді інтенсивність інерційного навантаження на елемент оболонки визначається за формулою:

$$\vec{q}^{\,I} = -\rho h(\vec{a}^e + \vec{a}^r + \vec{a}^c), \tag{1.1}$$

де $\vec{a}^e, \vec{a}^r, \vec{a}^c$ - вектори переносного, відносного та коріолісового прискорень елемента оболонки. Вектор переносного прискорення елемента конічної оболонки, яка обертається з кутовою швидкістю ω навколо осі симетрії, визначається формулою:

$$\vec{a}^e = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}), \tag{1.2}$$

де $\vec{a}_0$ - вектор прискорення центру мас системи. Векторний добуток $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ в базисі $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ системи координат $OXYZ$ з початком в центрі мас системи має вигляд

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega\omega_0 & 0 & 0 \\ (R - x_1\cos\alpha)\cos\tau & (R - x_1\cos\alpha)\sin\tau & x_1\sin\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \cdot 0 - \vec{j}(\omega\omega_0 x_1 \sin\alpha) + \vec{k}\,\omega\omega_0 (R - x_1\cos\alpha)\sin\tau, \tag{1.3}$$

де $\tau = \omega t + x_2$ - фазова координата.

Для визначення $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$ розкриємо добуток

$$\vec{\Omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \omega_0 & \omega \\ (R - x_1\cos\alpha)\cos\tau & (R - x_1\cos\alpha)\sin\tau & x_1\sin\alpha \end{vmatrix} = \vec{i}[\omega_0 x_1 \sin\alpha -$$

$$-\omega(R - x_1\cos\alpha)\sin\tau] + \vec{j}\,\omega(R - x_1\cos\alpha)\cos\tau + \vec{k}[-\omega_0(R - x_1\cos\alpha)\cos\tau. \tag{1.4}$$

Тоді

$$\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \omega_0 & \omega \\ \omega_0 x_1 \sin\alpha - \omega(R - x_1\cos\alpha)\sin\tau & \omega(R - x_1\cos\alpha)\cos\tau & \omega_0(x_1\cos\alpha - R)\cos\tau \end{vmatrix} =$$

$$-\vec{i}\,(R - x_1\cos\alpha)\cos\tau(\omega_0^2 + \omega^2) + \vec{j}[\omega\omega_0 x_1 \sin\alpha - \omega^2 (R - x_1\cos\alpha)\sin\tau] -$$

$$-\vec{k}[\omega_0^2 x_1 \sin\alpha - \omega\omega_0 (R - x_1\cos\alpha)\sin\tau]. \tag{1.5}$$

Додаючи вирази (1.3) та (1.5), отримуємо складові переносного прискорення в системі координат $OXYZ$:

$$\begin{aligned} a_X^e &= -(\omega_0^2 + \omega^2)(R - x_1\cos\alpha)\cos\tau, \\ a_Y^e &= -\omega^2 (R - x_1\cos\alpha)\sin\tau, \\ a_Z^e &= -\omega_0^2 x_1 \sin\alpha + 2\omega\omega_0 (R - x_1\cos\alpha)\sin\tau. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Складові вектора переносного прискорення елемента оболонки в напрямі координатних ліній x_1, x_2, x_3 мають вигляд:

$$a_{x_1}^e = -a_X^e \cos\alpha\cos\tau - a_Y^e \cos\alpha\sin\tau + a_Z^e \sin\alpha =$$

$$=(\omega_0^2+\omega^2)(R-x_1\cos\alpha)\cos\alpha\cos^2\tau+\omega^2(R-x_1\cos\alpha)\cos\alpha\sin^2\tau-$$
$$-\omega_0^2 x_1\sin^2\alpha+2\omega\omega_0(R-x_1\cos\alpha)\sin\alpha\sin\tau=\omega^2(R-x_1\cos\alpha)\cos\alpha+$$
$$+2\omega\omega_0(R-x_1\cos\alpha)\sin\alpha\sin\tau+\omega_0^2[(R-x_1\cos\alpha)\cos\alpha\cos^2\tau-x_1\sin^2\alpha],$$
$$a_{x_2}^e=-a_X^e\sin\tau+a_Y^e\cos\tau=(\omega_0^2+\omega^2)(R-x_1\cos\alpha)\sin\tau\cos\tau-$$
$$-\omega^2(R-x_1\cos\alpha)\sin\tau\cos\tau=\omega_0^2(R-x_1\cos\alpha)\sin\tau\cos\tau,$$
$$a_{x_3}^e=-a_X^e\sin\alpha\cos\tau-a_Y^e\sin\alpha\sin\tau-a_Z^e\cos\alpha=(\omega_0^2+\omega^2)(R-x_1\cos\alpha)\sin\alpha\cos^2\tau+$$
$$+\omega^2(R-x_1\cos\alpha)\sin\alpha\sin^2\tau+\omega_0^2 x_1\sin\alpha\cos\alpha-2\omega\omega_0(R-x_1\cos\alpha)\cos\alpha\sin\tau=$$
$$=\omega^2(R-x_1\cos\alpha)\sin\alpha-2\omega\omega_0(R-x_1\cos\alpha)\sin\alpha\sin\tau+$$
$$+\omega_0^2\sin\alpha[(R-x_1\cos\alpha)\cos^2\tau+x_1\cos\alpha]. \qquad (1.7)$$

Складові вектора відносного прискорення $\vec{a}^r$ в напрямі координатних ліній x_1,x_2,x_3 криволінійної системи координат, пов'язаної з елементом оболонки, дорівнюють відповідно

$$a_{x_1}^r=\ddot{u};\ a_{x_2}^r=\ddot{\upsilon};\ a_{x_3}^r=\ddot{\omega}, \qquad (1.8)$$

де u,υ,ω - переміщення елемента оболонки в напрямі координатних ліній x_1,x_2,x_3.

Коріолісове прискорення визначимо в базисі $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ системи координат x_1,x_2,x_3:

$$\vec{a}^c=2(\vec{\Omega}\times\vec{V}^r)=2\begin{vmatrix}\vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1\\ \omega\sin\alpha-\omega_0\cos\alpha\sin\tau & \omega_0\cos\tau & -\omega\cos\alpha-\omega_0\sin\alpha\sin\tau\\ \dot{u} & \dot{\upsilon} & \dot{\omega}\end{vmatrix}=$$
$$=2\{\vec{i}_1[\dot{w}\omega_0\cos\tau+\dot{\upsilon}(\omega\cos\alpha+\omega_0\sin\alpha\sin\tau)]-\vec{j}_1[\dot{w}(\omega\sin\alpha-\omega_0\cos\alpha\sin\tau)+$$
$$+\dot{u}(\omega\cos\alpha+\omega_0\sin\alpha\sin\tau)]+\vec{k}_1[\dot{\upsilon}(\omega\sin\alpha-\omega_0\cos\alpha\sin\tau)-u\omega_0\cos\tau]\}. \qquad (1.9)$$

Додаючи вирази (1.7), (1.8) та (1.9), отримаємо складові вектору абсолютного прискорення в системі координат $x_1x_2x_3$:

$$a_{x_1}=\omega^2(R-x_1\cos\alpha)\cos\alpha+2\omega\omega_0(R-x_1\cos\alpha)\sin\alpha\sin\tau+\omega_0^2[(R-x_1\cos\alpha)\times$$
$$\times\cos\alpha\cos^2\tau-x_1\sin^2\alpha]+\ddot{u}+2[\omega\omega_0\cos\tau+\upsilon(\omega\cos\alpha+\omega_0\sin\alpha\sin\tau)],$$
$$a_{x_2}=\omega_0^2(R-x_1\cos\alpha)\sin\tau\cos\tau+\ddot{\upsilon}-2[\omega(\omega\sin\alpha-\omega_0\cos\alpha\sin\tau)+$$
$$+u(\omega\cos\alpha+\omega_0 siv\alpha\sin\tau)],$$
$$a_{x_3}=\omega^2(R-x_1\cos\alpha)\sin\alpha-2\omega\omega_0(R-x_1\cos\alpha)\cos\alpha\sin\tau+\omega_0^2[(R-x_1\cos\alpha)(\cos^2\alpha)\times$$
$$\times\cos^2\tau+x_1\cos\alpha]+\ddot{w}+2[\upsilon(\omega\sin\alpha-\omega_0\cos\alpha\sin\tau)-u\omega_0\cos\tau]. \qquad (1.10)$$

У випадку, коли кутова швидкість власного обертання оболонки набагато більше кутової швидкості обертання центру мас системи

$(\omega >> \omega_0)$, вираз для проекції інерційного навантаження, що діє на конічну оболонку, буде мати вигляд:

$$q_{x_1} = -\mu h a_{x_1} = -\mu h\left\{\omega^2 (R - x_1\cos\alpha)\cos\alpha + 2\omega\omega_0 (R - x_1\cos\alpha)\sin\alpha\sin\tau + \ddot{u} + \right.$$
$$\left. + 2\left[\dot{w}\omega_0\cos\tau + \dot{\upsilon}(\omega\sin\alpha\sin\tau)\right]\right\},$$
$$q_{x_2} = -\mu h a_{x_2} = -\mu h\left\{\ddot{\upsilon} - 2\left[\dot{w}(\omega\sin\alpha - \omega_0\cos\alpha\sin\tau + \dot{u}(\omega\cos\alpha + \omega_0\sin\alpha\sin\tau)\right]\right\},$$
$$q_{x_2} = -\mu h a_{x_3} = -\mu h\left\{\omega^2 (R - x_1\cos\alpha)\sin\tau - 2\omega\omega_0 (R - x_1\cos\alpha)\cos\alpha\sin\tau + \ddot{w} + \right.$$
$$\left. + 2\left[\dot{\upsilon}(\omega\sin\alpha - \omega_0\cos\alpha\sin\tau) - u\omega_0\cos\tau\right]\right\}. \qquad (1.11)$$

2. Диференційні рівняння руху безмоментної конічної оболонки в криволінійній системі координат x_1, x_2, x_3 мають вигляд [2]:

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{1}{x_1\cos\alpha}\frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} + \frac{1}{x_1}(N_{11} - N_{22}) + q_{x_1} = 0,$$
$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + \frac{1}{x_1\cos\alpha}\frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} + \frac{2}{x_1}N_{12} + q_{x_2} = 0, \qquad (2.1)$$
$$N_{11}k_1^* + N_{22}k_2^* + q_{x_2} = 0,$$

де $k_1^* = k_1 - æ_1$; $k_2^* = k_2 - æ_2$; k_1, k_2 - кривини серединної поверхні оболонки до деформації; $æ_1$, $æ_2$ - зміни кривин.

Радіальні, оружні і дотичні зусилля визначаються формулами:

$$N_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}),\; N_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}),\; N_{12} = \frac{Eh}{2(1-\nu)}\varepsilon_{12}. \quad (2.2)$$

Обчислимо деформації серединної поверхні та параметри зміни кривизни, враховуючи, що $k_1 = 0,\; k_2 = \text{tg}\alpha / x_1$:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x_1},\; \varepsilon_{22} = \frac{1}{x_1\cos\alpha}\frac{\partial\upsilon}{\partial x_2} + \frac{u}{x_1} - \frac{w\,\text{tg}\alpha}{x_1},\; \varepsilon_{12} = \frac{1}{x_1\cos\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial\upsilon}{\partial x_1} - \frac{\upsilon}{x_1}. \quad (2.3)$$

Тут u, υ, w - переміщення точок серединної поверхні в напрямі координатних ліній x_1, x_2, x_3.

Зміни кривин визначимо за формулами:

$$æ_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}; \qquad (2.4)$$

$$æ_2 = -\frac{1}{x_1^2\cos^2\alpha}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{1}{x_1}\frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{\text{tg}\alpha}{x_1^2\cos\alpha}\frac{\partial\upsilon}{\partial x_2}. \qquad (2.5)$$

Вирази для зусиль з урахуванням співвідношень (2.3) набудуть вигляду:

$$N_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\nu}{x_1}\left(\frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial\upsilon}{\partial x_1} + u - \omega\,\text{tg}\alpha\right)\right],$$

$$N_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{1}{x_1}\left(\frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial\upsilon}{\partial x_2} + u - \omega\,\text{tg}\alpha\right) + \nu\frac{\partial u}{\partial x_1}\right],$$

$$N_{12}=\frac{Eh}{2(1+\nu)}\left(\frac{1}{x_1\cos\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}-\frac{\upsilon}{x_1}\right). \tag{2.6}$$

Тоді

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x_1}=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\nu}{x_1^2}\left(\frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial \upsilon}{\partial x_2}+u-w\mathrm{tg}\alpha\right)+\frac{\nu}{x_1}\left(\frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial u}{\partial x_1}-\frac{\partial w}{\partial x_1}\mathrm{tg}\alpha\right)\right],$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_2}=\frac{h}{2(1+\nu)}\left(\frac{1}{x_1\cos\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{1}{x_1}-\frac{\partial \upsilon}{\partial x_2}\right),$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1}=\frac{Eh}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_1^2}-\frac{1}{x_1^2}\left(\frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_2}-\upsilon\right)+\frac{1}{x_1}\frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}\right], \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial N_{22}}{\partial x_2}=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{1}{x_1}\left(\frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_2^2}+\frac{\partial u}{\partial x_2}-\frac{\partial w}{\partial x_2}\mathrm{tg}\alpha\right)+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right].$$

З урахуванням співвідношень (2.6), (2.7) система (2.1) набуде вигляду:

$$\frac{Eh}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{1}{x_1}\left[\frac{\partial u_1}{x_1}-\frac{1}{x_1}\left(u+\frac{3-\nu}{2\cos\alpha}\frac{\partial \upsilon}{\partial x_2}-w\mathrm{tg}\alpha\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{x_1}\left(\frac{1+\nu}{2\cos\alpha}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_1\partial x_2}-\nu\mathrm{tg}\alpha\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)+\frac{1-\nu}{2x_1^2\cos^2\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right\}+q_{x_1}=0,$$

$$\frac{Eh}{1-\nu^2}\left\{\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_1^2}+\frac{1}{x_1}\left[\frac{1+\nu}{2\cos\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}-\frac{1-\nu}{2x_1}\upsilon+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{x_1\cos\alpha}\left(\frac{3-\nu}{2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial^2 \upsilon}{x_2^2}-\mathrm{tg}\alpha\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)\right]\right\}+q_{x_2}=0, \tag{2.8}$$

$$\frac{Eh}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial u}{\partial x_1}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 2x_1}+\frac{\nu}{x_1}\left(\mathrm{tg}\alpha+\frac{1}{x_1\cos^2\alpha}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{\partial w}{\partial x_1}+\frac{\mathrm{tg}\alpha}{x_1\cos\alpha}\frac{\partial \upsilon}{\partial x_2}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{x_1}\left(\frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial \upsilon}{\partial x_2}+u-w\mathrm{tg}\alpha\right)\left[\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{1}{x_1}\left(\mathrm{tg}\alpha+\frac{1}{x_1\cos^2\alpha}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{\partial w}{\partial x_1}+\frac{\mathrm{tg}\alpha}{x_1\cos\alpha}\frac{\partial \upsilon}{\partial x_2}\right)\right]\right\}+q_{x_3}=0.$$

Висновки. Диференційні рівняння (2.8) визначають напружено-деформований стан системи двох замкнених конічних оболонок, з’єднаних центральною жорсткою вставкою, які обертаються з постійною кутовою швидкістю навколо осі симетрії системи, центр мас якої здійснює рух в центральному силовому полі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А.* Колебания вращающегося мембранного диска с центральной жесткой вставкой /В.А.Баженов, В.И.Гуляев, С.Г.Кравченко, П.П.Лизунов //Проблемы прочности. – 1986. - № 6. – С. 108-113.
2. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.

3. *Гром А.А.* Прецессионные колебания пластин и оболочек при сложном движении /А.А.Гром, П.П.Лизунов, Н.А.Снежко // Прикладная механика. – 1997. – 33, № 7. – С. 652-56.
4. *Гуляев В.И.* Колебания вращающейся круговой мембраны в поле инерционных и гравитационных сил /В.И.Гуляев, С.Г.Кравченко, П.П.Лизунов //Прикладная механика. – 1986. – 22, № 11. – С. 112-117.
5. *Гуляев В.И.* Колебания систем твердых и деформируемых тел при сложном движении /В.И.Гуляев, П.П.Лизунов. – К.: Вища школа, 1989. – 160 с.
6. *Кравченко С.Г.* Нелинейные колебания системы двух мембран с центральной жесткой вставкой /С.Г.Кравченко, П.П.Лизунов //Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1986. – Вып. 49. – С. 11-14.
7. *Лизунов П.П.* Колебания составной конической оболочки при сложном вращении /П.П.Лизунов // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1988. – Вып. 52. – С.22-27.
8. *Лізунов П.П.* Коливання мембранної поверхні космічного відбивача /П.П.Лізунов, А.А.Гром // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2002. – Вип. 71. – С. 146-152.
9. *Лізунов П.П.* Пружна рівновага сферичної оболонки в центральному силовому полі /П.П.Лізунов // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2013. – Вип. 91. – С. 84-87.
10. *Лізунов П.П.* Коливання сферичної оболонки в центральному силовому полі / П.П.Лізунов // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2014. – Вип. 93. – С. 37-42.

REFERENCES

1. *Bazhenov V.A.* Kolebaniya vrashchayushchegosya membrannogo diska s tsentral'noy zhestkoy vstavkoy (Oscillations of a rotating membrane disk with a central rigid insert) /V.A.Bazhenov, V.I.Gulyayev, S.G.Kravchenko, P.P.Lizunov //Problemy prochnosti. – 1986. - № 6. – S. 108-113.
2. *Vol'mir A.S.* Ustoychivost' deformiruyemykh system (Stability of deformable systems). (– M.: Nauka, 1967. – 984 s.
3. *Grom A.A.* Protsessionnyye kolebaniya plastin i obolochek pri slozhnom dvizhenii (Procession oscillations of plates and shells with complex movement) /A.A.Grom, P.P.Lizunov, N.A.Snezhko //Prikladnaya mekhanika. – 1997. – 33, № 7. – S. 652-56.
4. *Gulyayev V.I.* Kolebaniya vrashchayushcheysya krugovoy membrany v pole inertsionnykh i gravitatsionnykh sil (Oscillations of a rotating circular membrane in the field of inertial and gravitational forces) /V.I.Gulyayev, S.G.Kravchenko, P.P.Lizunov //Prikladnaya mekhanika. – 1986. – 22, № 11. – S. 112-117.
5. *Gulyayev V.I.* Kolebaniya sistem tverdykh i deformiruyemykh tel pri slozhnom dvizhenii (Fluctuations of solid and deformable bodies with complex motion) /V.I.Gulyayev, P.P.Lizunov. – K.: Vishcha shkola, 1989. – 160 s.
6. *Kravchenko S.G.* Nelineynyye kolebaniya sistemy dvukh membran s tsentral'noy zhestkoy vstavkoy (Nonlinear oscillations of a system of two membranes with a central rigid insert) /S.G.Kravchenko, P.P.Lizunov //Soprotivleniye materialov i teoriya sooruzheniy. – 1986. – Vyp. 49. – S. 11-14.
7. *Lizunov P.P.* Kolebaniya sostavnoy konicheskoy obolochki pri slozhnom vrashchenii (Oscillations of a composite conical shell under complex rotation) /P.P.Lizunov // Soprotivleniye materialov i teoriya sooruzheniy. – 1988. – Vyp. 52. – S. 22-27.
8. *Lizunov P.P.* Kolyvannya membrannoyi poverkhni kosmichnoho vidbyvacha (Fluctuations of the membrane surface of the space reflector) /P.P.Lizunov, A.A.Hrom //Opir materialiv i teoriya sporud. – 2002. – Vyp. 71. – S. 146-152.
9. *Lizunov P.P.* Pruzhna rivnovaha sferychnoyi obolonky v tsentral□nomu sylovomu poli (Elastic equilibrium of a spherical shell in a central force field) /P.P.Lizunov // Opir materialiv i teoriya sporud. – 2013. – Vyp. 91. – S. 84-87.
10. *Lizunov P.P.* Kolyvannya sferychnoyi obolonky v tsentral□nomu sylovomu poli (Oscillations of a spherical shell in a central force field) / P.P.Lizunov // Opir materialiv i teoriya sporud. – 2014. – Vyp. 93. – S. 37-42.

Стаття надійшла до редакції 29.03.2019 р.

Lizunov P.P., Kriksunov E.Z., Fesan O.M.

STRESS-STRAIN STATE OF CLOSED CONICAL SHELLS UNDER COMPLEX ROTATION

In construction machinery, engineering, aircraft engineering, space technology and other branches of the national economy there are problems of studying the stress-strain state of plates, membranes and rotating membranes. The main load on the elements of such systems is the significant centrifugal forces of inertia, which significantly affect the strength characteristics of structures.

In many cases, the axis of rotation of mechanical systems can make a turn, which leads to the emergence of not only portable and relative, but also coriolis forces of inertia, which change periodically over time. The gyroscopic interaction between the rotational motion of the system and the relative elastic oscillations of the elements is a source of excitation of precessional oscillations that can be resonant or unstable. As a result of changing the orientation axis of the system, the gyroscopic moment causes the appearance of alternating stresses, which significantly affect the strength and reliability of the structural elements.

In the works [1, 3-10] the stress-strain state and oscillations of membranes, plates and shells carrying complex motion in the central force field are investigated. In this paper, the relations that determine the stress-deformed state of the system of two closed conical shells connected by a central rigid insert, which rotates with a constant angular velocity around the axis of symmetry of the system, whose center of mass moves in the central force field are given.

Key words: stress-strain state, closed conical shells, rotational motion, central force field.

Лизунов П.П., Криксунов Э.З. Фесан А.Н.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЗАМКНУТЫХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ СЛОЖНОМ ВРАЩЕНИЯ

В данной работе приведены соотношения, определяющие напряженно-деформированное состояние системы двух замкнутых конических оболочек, соединенных центральной жесткой вставкой, вращающихся с постоянной угловой скоростью вокруг оси симметрии системы, центр масс которой осуществляет движение в центральном силовом поле.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, замкнутые конические оболочки, вращательное движение, центральное силовое поле.

УДК 539.3
Лізунов П.П., Криксунов Е.З., Фесан О.М. **Напружено-деформований стан замкнених конічних оболонок при складному обертанні** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 191-198.

Наведені співвідношення, що визначають напружено-деформований стан системи двох замкнених конічних оболонок, з'єднаних центральною жорсткою вставкою, які обертаються з постійною кутовою швидкістю навколо осі симетрії системи, центр мас якої здійснює рух в центральному силовому полі.

Бібліогр. 10 назв.

UDC 539.3
Lizunov P.P., Kryksunov E.Z., Fesan O.M. **Stress-strain state of closed conical shells under complex rotation** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles. - Kyiv: KNUBA, 2019. - Issue 102. - P. 191-198.

The relations that determine the stress-strain state of the system of two closed conical shells connected by a central rigid insert, which are rotated with a constant angular velocity around the axis of symmetry of the system, whose center of mass moves in the central force field, are given.

Ref. **10.**

УДК 539.3
Лизунов П.П., Криксунов Э.З., Фесан А.Н. **Напряженно-деформированное состояние замкнутых конических оболочек при сложном вращении** // Сопротивление материалов и теория сооружений: научно-тех. сборник. - К .: КНУБА, 2019. - Вып. 102. - С. 191-198.

Приведены соотношения, определяющие напряженно-деформированное состояние системы двух замкнутых конических оболочек, соединенных центральной жесткой вставкой, которые вращаются с постоянной угловой скоростью вокруг оси симметрии системы, центр масс которой осуществляет движение в центральном силовом поле.
Библиогр. 10 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри основ інформатики КНУБА ЛІЗУНОВ Петро Петрович.*
Адреса робоча: *03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, кафедра основ інформатики, ЛІЗУНОВ Петро Петрович.*
Адреса домашня: *Україна, м. Київ, вул. Кавказька, 12, кв. 48.*
Мобільний тел.: *+38(067) 921-70-05;*
E-mail: *lizunov@knuba.edu.ua*
ORCID ID: http://orcid.org/0000-0003-2924-3025

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *кандидат технічних наук, провідний науковий співробітник КНУБА КРИКСУНОВ Едуард Зиновійович.*
Адреса робоча: *03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, НДІ будівельної механіки, КРИКСУНОВ Едуард Зиновійович.*
ORCID ID: http://orcid.org/0000-0002-3357-7020

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *кандидат технічних наук, провідний науковий співробітник КНУБА ФЕСАН Олександр Миколайович.*
Адреса робоча: *03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, НДІ будівельної механіки, ФЕСАН Олександр Миколайович.*