

УДК 539.3

ОБЧИСЛЕННЯ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛІВ ТРИВИМІРНОЇ ТЕОРІЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

Ю.В. Ворона,

канд. техн. наук, старший науковий співробітник

І.Д. Кара,

*Київський національний університет будівництва і архітектури,
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.220-231

Метод граничних елементів використовується для дослідження зв'язаних термопружних тривимірних гармонічних коливань масивних тіл. Для обчислення сингулярних інтегралів запропоновані два підходи. Перший підхід базується на розвиненні ядер інтегральних рівнянь в степеневий ряд, тоді як другий підхід пов'язаний з аналітичним обчисленням інтегралів по плоскому колу з центром в полюсі.

Ключові слова: зв'язана термопружність, граничні інтегральні рівняння, фундаментальний розв'язок, сингулярність, степеневий ряд.

Вступ. Поєднання інтенсивних силових і температурних навантажень на пружні елементи досить часто зустрічається при експлуатації будівельних і машинобудівних конструкцій. У тих випадках, коли проміжок часу, впродовж якого відбувається нагрів чи охолодження, є сувимірним із періодом власних коливань за першою формою, виникає суттєва взаємодія температурних і силових полів, що зумовлює необхідність розв'язувати зв'язану задачу термопружності. Дослідження зв'язаних хвильових процесів у термопружних тілах наразі становить значний інтерес для інженерної практики. Задачі про термопружні коливання масивних тіл загального вигляду можуть бути розв'язані, за рідкими виключеннями, тільки чисельно. Серед чисельних методів, які застосовуються для таких задач, чильне місце займає потужний і універсальний метод скінченних елементів, різні аспекти використання якого для дослідження зв'язаних і незв'язаних термопружних коливань висвітлюється в роботах [1-5]. В багатьох випадках для розв'язання задач про коливання термопружних тіл успішно може бути застосований метод граничних елементів (МГЕ). Більшість робіт в цьому напрямку мають справу із розв'язанням незв'язаної задачі [6-8], але також існує значна кількість статей, в яких розглядаються зв'язані термопружні коливання. В деяких з таких робіт температурне навантаження розглядається як розподілене по об'єму, а обчислення об'ємних інтегралів здійснюється за відомими процедурами двоїстого взаємного методу граничних елементів, відомого як DRBEM [9-10], або близького до нього RIBEM [11]. Такі процедури, з одного боку, значно спрощують математичні вирази, а з іншого, вносять додаткові похибки апроксимації. Разом з тим існують роботи, в яких для розв'язання за МГЕ використовуються фундаментальні розв'язки зв'язаної задачі [12-15]. Варто підкреслити, що вирази таких фундаментальних розв'язків, отримані в [16] для тривимірної задачі і в [17]

для двовимірної, містять в знаменнику відстань між джерелом і точкою спостереження у високому ступені. Ця обставина значно ускладнює обчислення відповідних сингулярних інтегралів. Далі в представленій статті розробляються підходи для подолання вказаної перешкоди.

1. Основні співвідношення. Система граничних інтегральних рівнянь, які відповідають задачі тривимірних гармонічних зв'язаних термопружних коливань [18] має вигляд:

$$\frac{1}{2}u_k(P) + \int_{\Gamma} u_j(Q)T_{jk}(P,Q)d\Gamma - \int_{\Gamma} t_j(Q)U_{jk}(P,Q)d\Gamma = \\ = \frac{\gamma}{i\omega\eta} \left[\int_{\Gamma} \theta(Q) \frac{\partial U_{4k}(P,Q)}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial \theta(Q)}{\partial n} U_{4k}(P,Q) d\Gamma \right], \quad j,k=1,2,3, \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}\theta(P) + \int_{\Gamma} \theta(Q) \frac{\partial U_{44}(P,Q)}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial \theta(Q)}{\partial n} U_{44}(P,Q) d\Gamma = \\ = \frac{i\omega\eta}{\gamma} \left[\int_{\Gamma} u_j(Q)T_{j4}(P,Q)d\Gamma - \int_{\Gamma} t_j(Q)U_{j4}(P,Q)d\Gamma \right], \quad (2)$$

де u_k – амплітудне значення компоненти вектора переміщень; ω – колова частота; θ – амплітуда температури; $\gamma=3K\alpha_t$, α_t – коефіцієнт теплового розширення, K – модуль об'ємного стиснення $\left(K=\frac{3\lambda+2\mu}{3}\right)$, κ – коефіцієнт

температуропровідності, $\eta=\frac{\gamma T_0}{\lambda_0}$, T_0 – температура в ненапруженому стані,

λ_0 – коефіцієнт теплопровідності; Γ – границя тіла.

Матриця фундаментальних розв'язків системи рівнянь (1), (2) може бути подана у вигляді сукупності чотирьох частин, які записуються наступним чином.

– Переміщення точок пружного простору в напрямі осі x_k від дії одиничної зосередженої сили, прикладеної до каркасу і спрямованої вздовж осі x_j :

$$U_{kj}(r,\omega) = \frac{\delta_{kj}}{4\pi\mu} \frac{e^{i\lambda_3(\omega)r}}{r} - \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \left[\delta_{kj} U_0(r,\omega,m) + r_{,j} r_{,k} U_2(r,\omega,m) \right], \quad (3)$$

$$U_0(r,\omega,m) = \frac{e^{i\lambda_m(\omega)r}}{r^3} [i\lambda_m(\omega)r - 1], \quad (4)$$

$$U_2(r,\omega,m) = \frac{e^{i\lambda_m(\omega)r}}{r^3} [3 - 3i\lambda_m(\omega)r - \lambda_m^2(\omega)r^2], \quad (5)$$

де r – відстань між точкою Q , в якій визначається переміщення, та точкою P , до якої прикладена зосереджена сила,

$$\alpha_1(\omega) = \frac{\lambda_2^2 - k_1^2}{4\pi\rho\omega^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \quad \alpha_2(\omega) = \frac{k_1^2 - \lambda_1^2}{4\pi\rho\omega^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \quad \alpha_3(\omega) = -\frac{1}{4\pi\rho\omega^2},$$

$$k_1^2(\omega) = \frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu}, \quad \lambda_3^2(\omega) = \frac{\rho\omega^2}{\mu},$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu} + \frac{i\omega}{\kappa} + \frac{i\omega \eta \gamma}{\lambda + 2\mu}, \quad \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 = \frac{\omega^2}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{i\omega}{\kappa},$$

λ і μ – константи Ламе, ρ – густина матеріалу.

– Температура точок пружного простору від дії одиничної зосередженої сили, спрямованої вздовж осі x_j :

$$U_{4j}(r, \omega) = \frac{i\omega \eta}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} r_{,k} r [U_0(r, \omega, 2) - U_0(r, \omega, 1)]. \quad (6)$$

– Переміщення від дії зосередженого теплового джерела, інтенсивність якого W дорівнює за величиною коефіцієнту теплопровідності λ_0 , так що величина W/λ_0 дорівнює одиниці:

$$U_{k4}(r, \omega) = \frac{\gamma}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} r_{,j} r [U_0(r, \omega, 1) - U_0(r, \omega, 2)]. \quad (7)$$

– Розподіл в просторі температури, яка спричинена дією вищезгаданого зосередженого теплового джерела:

$$U_{44}(r, \omega) = \frac{1}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \cdot r} \left[(\lambda_2^2 - k_1^2) e^{i\lambda_2(\omega)r} - (\lambda_1^2 - k_1^2) e^{i\lambda_1(\omega)r} \right]. \quad (8)$$

Користуючись формулою для напружень на площинці з компонентами нормалі n_j :

$$\sigma_{kj} = \delta_{kj} (\lambda u_{m,m} - \gamma \theta) + \mu (u_{k,j} + u_{j,k}),$$

отримуємо:

– напруження на площинці з нормаллю n_j від дії одиничної зосередженої сили, спрямованої вздовж осі x_k

$$T_{jk}(r, \omega) = \frac{1}{4\pi} \left[\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + n_k r_{,j} + \frac{\lambda}{\mu} n_j r_{,k} \right] r U_0(r, \lambda_3) + \sum_{m=1}^3 (\lambda \lambda_m^2 \alpha_m - i\omega \eta \beta_m) n_j r_{,k} r U_0(r, \lambda_m) - 2\mu \left\{ \sum_{m=1}^3 \alpha_m \left(\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + n_k r_{,j} + n_j r_{,k} \right) \frac{1}{r} U_2(r, \lambda_m) + \sum_{m=1}^3 \alpha_m r_{,j} r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} T_3(r, \lambda_m) \right\}, \quad k, j=1, 2, 3, \quad (9)$$

$$T_3(r, \omega, m) = \frac{e^{i\lambda_m r}}{r^4} \left[-i\lambda_m^3 r^3 + 6\lambda_m^2 r^2 + 15i\lambda_m r - 15 \right]; \quad (10)$$

– напруження, що виникають внаслідок дії зосередженого теплового джерела

$$T_{j4}(r, \omega) = \frac{\gamma \mu}{2\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} \left\{ n_j [T_0(r, \omega, 2) - T_0(r, \omega, 1)] + r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} [U_2(r, \omega, 1) - U_2(r, \omega, 2)] \right\}, \quad (12)$$

$$T_0(r, \omega, m) = \frac{e^{i\lambda_m r}}{r^3} \left(\frac{\rho \omega^2}{2\mu} r^2 - \lambda_m^2 r^2 - i\lambda_m r + 1 \right); \quad (13)$$

– тепловий потік, спричинений дією зосередженого джерела:

$$\frac{\partial U_{44}}{\partial n} = \frac{1}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} r \frac{\partial r}{\partial n} \left[(\lambda_2^2 - k_1^2) U_0(r, \omega, 2) - (\lambda_2^2 - k_1^2) U_0(r, \omega, 1) \right]. \quad (14)$$

2. Подання компонент ядер відрізком степеневого ряду. Стандартний алгоритм методу граничних елементів базується на заміні поверхні розрахункової області Γ сукупністю N елементів Δ_n із заданою геометрією, достатньо малих для того, щоб в межах кожного з них вважати шукані функції такими, що змінюються за наперед заданим законом.

При $Q \notin \Delta_n$ інтеграли, які входять до системи рівнянь (1), (2) є регулярними і можуть бути обчислені за кубатурними формулами. Водночас, оскільки компоненти U_0 , U_2 , T_0 , T_3 містять у знаменниках величини r^3 та r^4 , то безпосереднє чисельне інтегрування виразів (4), (5), (10), (13) та виразу

$$\frac{U_2}{r}(r, \omega, m) = \frac{e^{i\lambda_m(\omega)r}}{r^4} \left[3 - 3i\lambda_m(\omega)r - \lambda_m^2(\omega)r^2 \right] \quad (15)$$

по граничним елементам, де розташований полюс, є неможливим. Щоб подолати цю перешкоду, використаємо розвинення даних величин в ряд Маклорена. В результаті отримуємо:

$$U_0(r, \omega, m) = -\frac{1}{r^3} + \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega))^{(n+1)} \frac{n \cdot r^{(n-2)}}{(n+1)!}, \quad (16)$$

$$U_2(r, \omega, m) = \frac{3}{r^3} + \frac{\lambda_m^2(\omega)}{2r} + \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega))^{(n+3)} \frac{n \cdot r^n}{(n+1)!(n+3)}, \quad (17)$$

$$T_3(r, \omega, m) = -\frac{15}{r^4} - 1,5 \frac{\lambda_m^2(\omega)}{r^2} + \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega)r)^{(n+1)} \cdot \frac{n \cdot (n-2)}{(n-1)!(n+3)}, \quad (18)$$

$$T_0(r, \omega, m) = \frac{1}{r^3} + \sum_{n=1}^N (i\lambda_m)^{n+1} r^{n-2} \cdot \frac{n^2}{(n+1)!} + 0,5\lambda_3^2 \left[\frac{1}{r} + \sum_{n=1}^N (i\lambda_m)^n \cdot \frac{r^{n-1}}{n!} \right]. \quad (19)$$

Розвинення (16)-(18) очікувано містять у знаменниках величини r^3 та r^4 , але оскільки кожне з них множиться на відповідне $\alpha_m(\omega)$, $m=1, 2, 3$, і всі три добутки складаються, причому $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, то в результаті будемо мати

$$\sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) U_0(r, \omega, m) = \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega))^{n+1} \frac{n \cdot r^{n-2}}{(n+1)!}, \quad (20)$$

$$\sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) U_2(r, \omega, m) = \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega))^{n+1} \frac{n \cdot (n-2) \cdot r^{n-2}}{(n+1)!}, \quad (21)$$

$$U_{kj}(r, \omega) = \frac{\delta_{kj}}{4\pi\mu} \frac{e^{i\lambda_3(\omega)r}}{r} - \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega))^{n+1} \frac{n \cdot r^{n-2}}{(n+1)!} \left[\delta_{kj} + (n-2)r_{,j} r_{,k} \right]. \quad (22)$$

$$\sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) T_3(r, \omega, m) = \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \sum_{n=1}^N (i\lambda_m(\omega))^{n+1} \frac{(n-4) \cdot (n-2) \cdot n \cdot r^{n-3}}{(n+1)!}. \quad (23)$$

Вирази (20)-(22) містять у знаменниках величини r у ступені, не вищому за перший, а вираз (23) – у ступені, не вищому за другий, тобто сингулярність цих виразів співпадає із особливостями відповідних ядер задачі статки, і отже, їх інтегрування не становить труднощів.

В свою чергу, хоча розвинення компоненти T_0 містить у знаменнику величину r^3 , але у вираз (12) входить не просто T_0 , а різниця $T_0(r, \omega, 2) - T_0(r, \omega, 1)$, розвинення якої має вигляд

$$T_0(r, \omega, 2) - T_0(r, \omega, 1) = \sum_{n=1}^N \left[(i\lambda_1(\omega))^{n+1} - (i\lambda_2(\omega))^{n+1} \right] r^{n-2} \cdot \frac{n^2}{(n+1)!} + 0.5(\lambda_3(\omega))^2 \sum_{n=1}^N \left[(i\lambda_1(\omega))^n - (i\lambda_2(\omega))^n \right] r^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}. \tag{24}$$

Результати обчислень безрозмірних величин $\mu r \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) U_0(r, \omega, m)$,

$$\mu r \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) U_2(r, \omega, m), \quad \mu r^2 \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) T_3(r, \omega, m), \quad r^3 [T_0(r, \omega, 2) - T_0(r, \omega, 1)]$$

за формулами (4), (5), (10), (13) та за допомогою наближених формул (20), (21), (23), (24) при різній кількості членів ряду і різних значеннях безрозмірного параметра частоти $\frac{\omega r}{C_2}$, де $C_2 = \sqrt{\mu/\rho}$, наведені в таблицях

1-4. В процесі обчислень використовувались такі значення фізико-механічних характеристик: $\alpha_r = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $\lambda = \mu = 8 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\kappa = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $r = 0.5 \text{ м}$, $\lambda_0 = 30 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $\rho = 7800 \text{ кг}/\text{м}^3$.

Таблиця 1

Результати обчислень величини $2\mu r \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) U_0(r, \omega, m)$ за формулами (4) та (20)

$\frac{\omega r}{C_2}$	Дійсна частина				Уявна частина			
	(4)	(20) M=4	(20) M=8	(20) M=12	(4)	(20) M=4	(20) M=8	(20) M=12
0.4	0.053	0.053	0.053	0.053	0.0086	0.0086	0.0086	0.0086
1.2	0.047	0.047	0.047	0.047	0.025	0.026	0.025	0.025
2	0.037	0.036	0.037	0.037	0.038	0.043	0.038	0.038
2.8	0.023	0.019	0.023	0.023	0.048	0.06	0.048	0.048
3.6	0.0063	-0.004	0.0063	0.0063	0.052	0.078	0.052	0.052
4	-0.002	-0.018	-0.002	-0.002	0.0519	0.0862	0.0523	0.0519
4.4	-0.01	-0.032	-0.011	-0.011	0.051	0.095	0.051	0.051
5.2	-0.025	-0.067	-0.026	-0.025	0.044	0.112	0.047	0.044
6	-0.037	-0.106	-0.04	-0.037	0.033	0.129	0.04	0.033
6.8	-0.045	-0.152	-0.051	-0.045	0.019	0.147	0.035	0.019
7.6	-0.048	-0.203	-0.063	-0.048	0.0037	0.164	0.038	0.0045
8	-0.047	-0.231	-0.07	-0.048	-0.004	0.172	0.044	-0.0028

Таблиця 2

Результати обчислень величини $2\mu r \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega)U_2(r, \omega, m)$ за формулами (5) та (21)

$\frac{\omega r}{C_2}$	Дійсна частина				Уявна частина			
	(5)	(21) M=4	(21) M=8	(21) M=12	(5)	(21) M=4	(21) M=8	(21) M=12
0.4	-0.054	-0.054	-0.054	-0.054	$-8 \cdot 10^{-5}$	$-8 \cdot 10^{-5}$	$-8 \cdot 10^{-5}$	$-8 \cdot 10^{-5}$
1.2	-0.06	-0.06	-0.06	-0.06	-0.0021	-0.0022	-0.0021	-0.0021
2	-0.068	-0.071	-0.068	-0.068	-0.0092	-0.0096	-0.0092	-0.0092
2.8	-0.077	-0.088	-0.077	-0.077	-0.024	-0.027	-0.024	-0.024
3.6	-0.082	-0.111	-0.082	-0.082	-0.045	-0.058	-0.045	-0.045
4	-0.081	-0.125	-0.082	-0.081	-0.058	-0.08	-0.059	-0.058
4.4	-0.079	-0.14	-0.08	-0.079	-0.073	-0.106	-0.073	-0.073
5.2	-0.064	-0.174	-0.07	-0.064	-0.102	-0.175	-0.104	-0.102
6	-0.038	-0.213	-0.05	-0.038	-0.128	-0.269	-0.134	-0.128
6.8	$6.6 \cdot 10^{-4}$	-0.259	-0.04	$7.3 \cdot 10^{-4}$	-0.147	-0.391	-0.164	-0.147
7.6	0.047	-0.31	-0.054	0.045	-0.151	-0.547	-0.197	-0.152
8	0.072	-0.338	-0.078	0.068	-0.148	-0.637	-0.22	-0.149

Таблиця 3

Результати обчислень величини $4\mu r^2 \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega)T_3(r, \omega, m)$ за формулами (10) та (23)

$\frac{\omega r}{C_2}$	Дійсна частина				Уявна частина			
	(10)	(23) M=4	(23) M=8	(23) M=12	(10)	(23) M=4	(23) M=8	(23) M=12
0.4	-0.32	-0.32	-0.32	-0.32	$-9.5 \cdot 10^{-7}$	$2.4 \cdot 10^{-12}$	$-9.5 \cdot 10^{-7}$	$-9.5 \cdot 10^{-7}$
1.2	-0.335	-0.334	-0.335	-0.335	$-2.3 \cdot 10^{-4}$	$7.1 \cdot 10^{-12}$	$-2.3 \cdot 10^{-4}$	$-2.3 \cdot 10^{-4}$
2	-0.362	-0.357	-0.362	-0.362	-0.003	$1.2 \cdot 10^{-11}$	-0.003	-0.003
2.8	-0.41	-0.39	-0.41	-0.41	-0.014	$1.7 \cdot 10^{-11}$	-0.014	-0.014
3.6	-0.479	-0.436	-0.476	-0.479	-0.047	$2.3 \cdot 10^{-11}$	-0.046	-0.047
4	-0.52	-0.463	-0.513	-0.52	-0.0755	$2.6 \cdot 10^{-11}$	-0.0736	-0.0755
4.4	-0.564	-0.493	-0.55	-0.564	-0.116	$2.9 \cdot 10^{-11}$	-0.111	-0.116
5.2	-0.652	-0.561	-0.601	-0.652	-0.238	$3.6 \cdot 10^{-11}$	-0.219	-0.238
6	-0.718	-0.641	-0.562	-0.715	-0.423	$1.22 \cdot 10^{-9}$	-0.356	-0.422
6.8	-0.728	-0.732	-0.321	-0.718	-0.672	$5.3 \cdot 10^{-11}$	-0.471	-0.668
7.6	-0.648	-0.834	0.299	-0.609	-0.967	$6.3 \cdot 10^{-11}$	-0.44	-0.954
8	-0.564	-0.89	0.829	-0.493	-1.121	$1.73 \cdot 10^{-9}$	-0.301	-1.096

Таблиця 4

Результати обчислень величини $r^3 [T_0(r, \omega, 1) - T_0(r, \omega, 2)]$ з використанням формул (13) та (24)

$\frac{\omega r}{C_2}$	Дійсна частина				Уявна частина			
	(13)	(24) M=4	(24) M=8	(24) M=12	(13)	(24) M=4	(24) M=8	(24) M=12
0.4	1.013	1.013	1.013	1.013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013
1.2	1.116	1.116	1.116	1.116	0.034	0.034	0.034	0.034

2	1.296	1.297	1.296	1.296	0.154	0.154	0.154	0.154
2.8	1.507	1.507	1.507	1.507	0.405	0.405	0.404	0.404
3.6	1.686	1.726	1.686	1.686	0.807	0.815	0.807	0.807
4	1.741	1.816	1.742	1.741	1.066	1.084	1.066	1.066
4.4	1.762	1.892	1.762	1.762	1.361	1.395	1.361	1.361
5.2	1.663	2.011	1.664	1.663	2.036	2.145	2.037	2.036
6	1.328	2.128	1.333	1.328	2.777	3.068	2.778	2.777
6.8	0.715	2.362	0.732	0.715	3.501	4.186	3.505	3.501
7.6	-0.191	2.915	-0.141	-0.191	4.112	5.57	4.124	4.112
8	-0.75	3.401	-0.668	-0.75	4.341	6.405	4.363	4.341

З таблиць видно, що при збільшенні кількості членів ряду до 8-и або 12-и значення вищенаведених величин, отримані за допомогою виразів з використанням розвинення в ряд Маклорена, мають хорошу збіжність зі значеннями, отриманими за допомогою виразів (4), (5), (10), (13). Це говорить про надійність отриманих даних та можливість подальшої побудови на цій основі ефективної методики чисельного розрахунку.

3. Формули для обчислення сингулярних частин інтегралів. У випадку, коли елемент Δ_n є плоским, для обчислення сингулярних інтегралів можна отримати досить компактні вирази. Для цього введемо на площині, в якій лежить елемент Δ_n , місцеву систему координат η_1, η_2, η_3

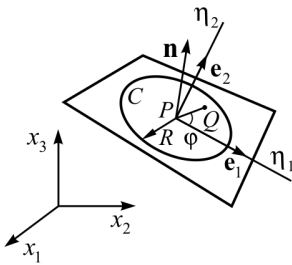


Рис. 1

з початком в точці P і позначимо через e_{1i}, e_{2i} напрямні косинуси осей η_1, η_2 відносно глобальної системи координат x_1, x_2, x_3 . При цьому напрямок осі η_3 співпадає з напрямком зовнішньої нормалі до елементу Δ_n . Положення точки Q в області Δ_n будемо характеризувати радіус-вектором r і полярним кутом φ , відлік якого здійснюється від осі η_1 (рис. 1).

Виділимо в області Δ_n круг C радіусом R і розглянемо інтеграл

$$\int_C U_{jk}(P, Q) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^R \int_0^{2\pi} U_{jk}(P, Q) r dr d\varphi,$$

де U_{jk} задається виразом (3).

Виконавши інтегрування, отримаємо

$$\int_C \frac{e^{i\lambda_3 r}}{r} d\Gamma = \frac{2\pi}{i\lambda_3} (e^{i\lambda_3 R} - 1), \quad (25)$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda_m r}}{r^3} (i\lambda_m r - 1) r dr d\varphi = 2\pi \left(\frac{e^{i\lambda_m R}}{R} - \frac{e^{i\lambda_m \varepsilon}}{\varepsilon} \right),$$

завдяки чому

$$\sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \int_C U_0(r, \omega, m) d\Gamma = 2\pi \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \left(\frac{e^{i\lambda_m R}}{R} - i\lambda_m \right). \quad (26)$$

Тут використано те, що

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{m=1}^3 \alpha_m \frac{e^{i\lambda_m \varepsilon}}{\varepsilon} = \sum_{m=1}^3 \alpha_m i\lambda_m,$$

оскільки

$$\sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) = 0.$$

Далі, візьмемо до уваги, що

$$r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x_i(Q) - x_i(P)}{r} = e_{1j} \cos \varphi + e_{2j} \sin \varphi,$$

внаслідок чого

$$\int_0^{2\pi} r_{,j} r_{,k} d\varphi = \pi(e_{1j}e_{1k} + e_{2j}e_{2k}) = \pi(\delta_{jk} - n_j n_k).$$

Тепер легко отримати

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \int_C r_{,j} r_{,k} U_2(r, \omega, m) d\Gamma = \\ & = \pi(\delta_{kj} - n_j n_k) \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \left[\frac{e^{i\lambda_m R}}{R} (i\lambda_m R - 3) + 2i\lambda_m \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Поєднуючи результати інтегрування (25)-(27), отримуємо остаточно

$$\begin{aligned} & \int_C U_{jk}(P, Q) d\Gamma = \frac{\delta_{jk}}{2i\lambda_3 \mu} (e^{i\lambda_3 R} - 1) - \\ & - \pi \sum_{m=1}^3 \alpha_m(\omega) \left\{ \delta_{kj} \frac{e^{i\lambda_m R}}{R} (i\lambda_m R - 1) + n_j n_k \left[\frac{e^{i\lambda_m R}}{R} (i\lambda_m R - 3) + 2i\lambda_m \right] \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Інтегрування по області $\Delta_n - C$, тобто по решті граничного елемента, що містить полюс P , легко може бути виконане на основі кубатурних формул.

Варто відзначити, що у випадку гіпотетичного середовища, в якому відсутнє теплове розширення (коефіцієнт теплового розширення α_i дорівнює нулю), вираз (28) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \int_C U_{jk}(P, Q) d\Gamma = & \frac{1}{4\rho\omega^2} \left\{ \delta_{kj} \left[2ik_2 - \frac{e^{ik_2 R}}{R} (ik_2 R + 1) - \frac{e^{ik_1 R}}{R} (ik_1 R - 1) \right] + \right. \\ & \left. + n_j n_k \left[\frac{e^{ik_1 R}}{R} (ik_1 R - 3) - \frac{e^{ik_2 R}}{R} (ik_2 R - 3) + 2i(k_1 - k_2) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

де

$$k_1 = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}}, \quad k_2 = \lambda_3 = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu}}.$$

Вираз (29) з точністю до позначень співпадає з аналогічним виразом, наведеним в роботі [19] і призначеним для обчислення сингулярної частини інтегралу від фундаментального розв'язку, який відповідає задачі тривимірної еластодинаміки.

Розглянемо тепер інтеграл по кругу C від узагальненої похідної фундаментального розв'язку

$$\int_C T_{jk}(P, Q) d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_{\epsilon}^R T_{jk}(P, Q) \rho d\rho d\varphi,$$

де T_{jk} задається виразом (9). Бачимо, що будь-який доданок, з тих, що входять до складу T_{jk} , містить або множник $\frac{\partial r}{\partial n}$, або $r_{,k}$ чи $r_{,j}$ в першому ступені. Оскільки на площині, яка містить обидві точки P і Q , $\frac{\partial r}{\partial n} = 0$ та

$$\int_0^{2\pi} r_{,j} d\varphi = \int_0^{2\pi} (e_{1j} \cos \varphi + e_{2j} \sin \varphi) d\varphi = 0,$$

$$\int_C T_{jk}(P, Q) d\Gamma = 0.$$

З такої ж причини дорівнюють нулю інтеграли по кругу від компонент фундаментального розв'язку U_{4j} (вираз (6)), U_{k4} (вираз (7)) та $\frac{\partial U_{44}}{\partial n}$, що задана виразом (14).

Для сингулярних інтегралів по кругу від компонент T_{j4} та $\frac{\partial U_{4k}}{\partial n}$ були отримані відповідно наступні вирази

$$\begin{aligned} \int_C T_{j4}(P, Q) d\Gamma &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_{\epsilon}^R T_{j4}(P, Q) r dr d\varphi = \frac{\gamma \mu n_j}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} \times \\ &\times \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R [T_0(r, \omega, 1) - T_0(r, \omega, 2)] r dr = \frac{\gamma \mu n_j}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} \left\{ \exp(i\lambda_2 R) \left[\frac{1}{R} + \frac{i(0.5\lambda_3^2 - \lambda_2^2)}{\lambda_2} \right] - \right. \\ &\left. - \exp(i\lambda_1 R) \left[\frac{1}{R} + \frac{i(0.5\lambda_3^2 - \lambda_1^2)}{\lambda_1} \right] + 0.5i\lambda_3^2 \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\partial U_{4k}(P, Q)}{\partial n} d\Gamma &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_{\epsilon}^R \frac{\partial U_{4k}(P, Q)}{\partial n} r dr d\varphi = \frac{i\omega \eta n_k}{2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R [U_0(r, \omega, 2) - \\ &- U_0(r, \omega, 1)] r dr = \frac{i\omega \eta n_k}{2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} \left[\frac{\exp(i\lambda_2 R) - \exp(i\lambda_1 R)}{R} + i\lambda_1 - i\lambda_2 \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

4. Висновки. Представлені в статті результати представляють собою систему співвідношень для визначення сингулярних частин інтегралів, за допомогою яких ефективно обчислюються діагональні компоненти

алгебраїчного аналога системи інтегральних рівнянь. По суті, наведені співвідношення складають головну частину чисельного алгоритму, спрямованого на розв'язання за методом граничних елементів задачі про зв'язані тривимірні гармонічні термопружні коливання масивних елементів конструкцій.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Keramidas G.A., Ting E.C.* A finite element formulation for thermal stress analysis. I. Variational formulation. II. Finite element formulation. Nucl Eng Des 1976;39:267–87.
2. *Ting E.C., Chen H.C.* A unified numerical approach for thermal stress waves. Comput Struct 1982;15:165–75.
3. *Prevost J.H., Tao D.* Finite element analysis of dynamic coupled thermoelasticity problem with relaxation times. J Appl Mech Trans ASME 1983;50:817–22.
4. *Tamma K.K., Railkar S.B.* On heat displacement based hybrid transfinite element formulations for uncoupled/coupled thermally induced stress wave propagation. Comput Struct 1988;30:1025–36.
5. *Cannarozzi A.A., Ubertini F.* A mixed variational method for linear coupled thermoelastic analysis. Int J Solids Struct 2001;38:717–39.
6. *Sladek V., Sladek J.* Boundary integral equation method in thermoelasticity. Part I: general analysis // Appl. Math. Modelling. – 1984. - No 7. – P. 241–253.
7. *Shiah Y.C., Tan C.L.* Exact boundary integral transformation of the thermoelastic domain integral in BEM for general 2D anisotropic elasticity. Comput Mech. 1999;23:87–96.
8. *Park K.H., Banerjee P.K.* Two- and three-dimensional transient thermoelastic analysis by BEM via particular integrals. Int J Solids Struct 2002;39:2871–92.
9. *Kögl M., Gaul L.* A dual reciprocity boundary element method for dynamic coupled anisotropic thermoelasticity. Southampton (UK): WIT Press; 2000.
10. *Kögl M., Gaul L.* A boundary element method for anisotropic coupled thermoelasticity. Arch Appl Mech 2003;73:377–98.
11. *Gao X.-W., Zheng B.-J., Yang K., Zhang Ch.* Radial integration BEM for dynamic coupled thermoelastic analysis under thermal shock loading. Computers and Structures 158 (2015) 140–147.
12. *Tehrani P.H., Eslami M.R.* Two-dimensional time-harmonic dynamic coupled thermoelasticity analysis by boundary element method formulation // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 1998. – V. 22. - No 3, - P. 245-250.
13. *Dargush G.F., Banerjee P.K.* Development of a boundary element method for time dependent planar thermoelasticity // Int. J. Solid Struct. – 1989. – No 25. - P. 999–1021.
14. *Tosaka N., Suh I.G.* Boundary element analysis of dynamic coupled thermoelasticity problems // Computational Mechanics. – 1991. V. 8. – P. 331-342.
15. *Ворона Ю.В., Кара І.Д.* Застосування методу граничних інтегральних рівнянь для розв'язання динамічних задач термопружності // Опір матеріалів і теорія споруд. – Вип. 96. – К.: КНУБА, 2015. – С. 74-87.
16. *Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчладзе Г.В. под общей редакцией В.Д.Купрадзе.; – М.: Наука, 1976. – 664 с.*
17. *Dominguez J.* Boundary Elements in Dynamics. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1993, 450 p.
18. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М: Мир, 1970. – 256 с.
19. *Ройтфарб И.З., Чу Вьет Кыонг.* Численный метод решения пространственных динамических задач теории упругости на основе метода потенциала // Сопrotивление материалов и теория сооружений. – Вип. 29. – К.: Будівельник, 1976. – С. 32-38.

REFERENCES

1. *Keramidas G.A., Ting E.C.* A finite element formulation for thermal stress analysis. I. Variational formulation. II. Finite element formulation. Nucl Eng Des 1976;39:267–87.
2. *Ting E.C., Chen H.C.* A unified numerical approach for thermal stress waves. Comput Struct 1982;15:165–75.
3. *Prevost J.H., Tao D.* Finite element analysis of dynamic coupled thermoelasticity problem with

- relaxation times. *J Appl Mech Trans ASME* 1983;50:817–22.
4. *Tamma K.K., Railkar S.B.* On heat displacement based hybrid transfinite element formulations for uncoupled/coupled thermally induced stress wave propagation. *Comput Struct* 1988;30:1025–36.
 5. *Cannarozzi A.A., Ubertini F.* A mixed variational method for linear coupled thermoelastic analysis. *Int J Solids Struct* 2001;38:717–39.
 6. *Sladek V., Sladek J.* Boundary integral equation method in thermoelasticity. Part I: general analysis // *Appl. Math. Modelling.* – 1984. - No 7. – P. 241–253.
 7. *Shiah Y.C., Tan C.L.* Exact boundary integral transformation of the thermoelastic domain integral in BEM for general 2D anisotropic elasticity. *Comput Mech.* 1999;23:87–96.
 8. *Park K.H., Banerjee P.K.* Two- and three-dimensional transient thermoelastic analysis by BEM via particular integrals. *Int J Solids Struct* 2002;39:2871–92.
 9. *Kögl M., Gaul L.* A dual reciprocity boundary element method for dynamic coupled anisotropic thermoelasticity. Southampton (UK): WIT Press; 2000.
 10. *Kögl M., Gaul L.* A boundary element method for anisotropic coupled thermoelasticity. *Arch Appl Mech* 2003;73:377–98.
 11. *Gao X.-W., Zheng B.-J., Yang K., Zhang Ch.* Radial integration BEM for dynamic coupled thermoelastic analysis under thermal shock loading. *Computers and Structures* 158 (2015) 140–147.
 12. *Tehrani P.H., Eslami M.R.* Two-dimensional time-harmonic dynamic coupled thermoelasticity analysis by boundary element method formulation // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* – 1998. – V. 22. - No 3, - P. 245-250.
 13. *Dargush G.F., Banerjee P.K.* Development of a boundary element method for time dependent planar thermoelasticity // *Int. J. Solid Struct.* – 1989. – No 25. - P. 999–1021.
 14. *Tosaka N., Suh I.G.* Boundary element analysis of dynamic coupled thermoelasticity problems // *Computational Mechanics.* – 1991. V. 8. – P. 331-342.
 15. *Vorona Yu.V., Kara I.D.* Zastosuvannya metodu granychnykh integralnykh rivnyan dlya rozv'yazannya dynamichnykh zadach termoprzhnosti (Application of boundary integral equations method for dynamic thermoelasticity problems) // *Opir materialiv i teoriya sporud.* – Vyp. 96. – K.: KNUBA, 2015. – S. 74-87. (ukr)
 16. *Trehmernye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti i termouprugosti (Three-dimensional problems of mathematical theory of elasticity and thermoelasticity) / V.D.Kupradze, T.G.Hehelia, M.O.Basheleyshvili, G.V.Burchuladze, ed. V.D.Kupradze.; M: Mir, 1976. – 664 s. (rus)*
 17. *Dominguez J.* *Boundary Elements in Dynamics.* Computational Mechanics Publications, Southampton, 1993, 450 p.
 18. *Nowacki W.* *Dinamicheskiye zadachi termouprugosti (Dynamic problems of thermoelasticity).* – M: Mir, 1970. – 256 s. (rus)
 19. *Roitfarb I.Z., Chu Viet Kyong.* Chislennyi metod resheniya prostranstvennykh dinamicheskikh zadach teorii uprugosti na osnove metoda potentsiala (Numerical technique for solving spatial elastodynamic problems with the help of the potential method) // *Soprotivlenie materialov i teoriya sooruzheniy.* – Vyp. 29. – K.: Budivelnik, 1976. – S. 32-38. (rus)

Стаття надійшла до редакції 18.05.2019 р.

Vorona Yu.V., Kara I.D.

EVALUATION OF THE SINGULAR INTEGRALS OF THE THREE-DIMENSIONAL THERMOELASTICITY

The article deals with the solving of the problem of coupled thermoelastic vibrations of massive bodies. Numerical solution is sought by the boundary integral equation method. The main attention is paid to the definition of singular parts of integrals i.e. to integration along those boundary elements on which the pole is located. Two approaches are proposed for evaluation of singular integrals. The first approach is based on the expansion of integral equations kernels in a power series. For the realization of this approach, compact expressions approximating all components of the kernels are obtained. The obtained expressions has weak or strong singularities when the distance between the source point and integration point goes to zero similar to the behaviour of the corresponding elastostatic expressions. Therefore, such expressions can be successfully used for singular integrals evaluation. A number of numerical experiments have been performed, which confirms the robustness of the approach in a wide frequency range and allows us to trace the dependence between the number of retained members and the accuracy of the calculations. The second approach is related to the analytical calculation of integrals over a flat circle with a centre at the pole. In this paper the exact formulas were obtained that allow us to compute effectively the corresponding integrals over the boundary elements on which the pole is located. Among other things, the obtained exact

expressions prove the existence of corresponding singular integrals in the sense of the Cauchy principal value. As a matter of fact the above relations form the main part of a numerical algorithm aimed at solving the problem of coupled three-dimensional harmonic thermoelastic vibrations of massive elements of constructions using the of boundary element method.

Keywords: coupled thermoelasticity, boundary integral equations, fundamental solution, singularity, power series.

Ворона Ю.В., Кара И.Д.

ВЫЧИСЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Метод граничных элементов используется для исследования связанных термоупругих трехмерных гармонических колебаний массивных тел. Для вычисления сингулярных интегралов предложены два подхода. Первый подход базируется на разложении ядер интегральных уравнений в степенной ряд, тогда как второй подход связан с аналитическим вычислением интегралов по плоскому кругу с центром в полюсе.

Ключевые слова: связанная термоупругость, граничные интегральные уравнения, фундаментальное решение, сингулярность, степенной ряд.

УДК 539.3

Ворона Ю.В., Кара И.Д. **Обчислення сингулярних інтегралів тривимірної теорії термопружності** // Опір матеріалів та теорія споруд. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 220-231.

Дослідження зв'язаних термопружних тривимірних гармонічних коливань масивних тіл здійснюється за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь. Для обчислення сингулярних інтегралів розроблені два підходи.

Табл. 4. Ил. 1. Библиогр. 19 назв.

UDC 539.3

Vorona Yu.V., Kara I.D. **Evaluation of the singular integrals of the three-dimensional thermoelasticity** // Strength of Materials and Theory of Structures. – K.: KNUBA, 2019. – Issue 102. – P. 220-231.

The analysis of coupled thermoelastic three-dimensional harmonic vibrations of massive bodies is performed using the boundary integral equations method. Two approaches have been developed for the calculation of singular integrals.

Tabl. 4. Fig. 1. Ref. 19.

УДК 539.3

Ворона Ю.В., Кара И.Д. **Вычисление сингулярных интегралов трехмерной теории термоупругости** // Сопrotивление материалов и теория сооружений. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 220-231.

Исследование связанных термоупругих трехмерных гармонических колебаний массивных тел выполняется с помощью метода граничных интегральных уравнений. Для вычисления сингулярных интегралов разработаны два подхода.

Табл. 4. Ил. 1. Библиогр. 19 назв.

Автор: кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, професор кафедри будівельної механіки КНУБА ВОРОНА Юрій Володимирович

Адреса робоча: 03680, Київ, Повітрофлотський пр. 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ВОРОНИ Юрію Володимировичу

Робочий тел.: +38(044)245-48-29

Мобільний тел.: +38(050)750-13-61

E-mail: yuvv@ukr.net

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-8130-7204>

Автор: асистент кафедри будівельної механіки КАРА Ірина Дмитрівна.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський пр., 31, Київський національний університет будівництва і архітектури.

Робочий тел.: + 38(044) 2454829

E-mail : ikruska007@ukr.net