УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОСТІ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ ПРЯМИХ ПРИ РОЗРАХУНКУ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ТІЛ

Д.В. Левківський,
канд. техн. наук

К.О. Каверин,
канд. техн. наук

Ю.В. Сович

Київський національний університет будівництва і архітектури,
Київ, Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.103.243-252

У даній роботі показано застосування модифікованого методу прямих для визначення напружено-деформованого стану тіл обертання в циліндричній системі координат. Зниження вимірності виконується проекційним методом по координаті z, за допомогою локальних базисних функцій. Редукована система рівнянь та граничні умови розв'язуються чисельним методом дискретної ортогоналізації С.К. Годунова. Дослідження точності проведено на прикладі вісесиметричної кільцевої пластини різних товщин. Результати порівнюються із значеннями теорії тонких пластин та отриманими методом скінченних елементів.

Ключові слова: товсті пластини, вісесиметричне тіло, теорія пружності, проекційний метод, модифікований метод прямих, базисні функції, метод дискретної ортогоналізації С.К. Годунова.

Розглянемо вісесиметричне тіло (рис. 1). По координаті θ враховується осьова симетрія, тому задача зводиться до плоскої та розглядається в системі координат $r0z$ (рис. 2).

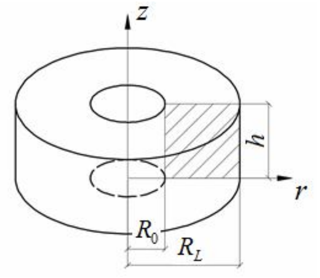

Рис. 1. Циліндричне тіло

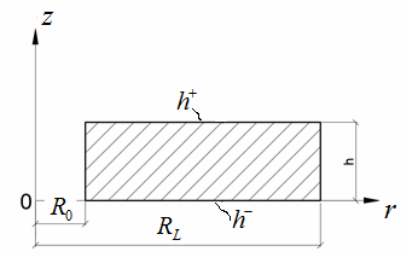

Рис. 2. Плоска вісесиметрична область

Для дослідження НДС використовуються рівняння теорії пружності в циліндричній системі координат [1].

У рівняннях σ_r, σ_θ, σ_z, τ_{rz} - компоненти тензора напружень. u, w - переміщення відповідно в напрямку осі r та z; λ, μ - коефіцієнти Ляме. Для зручності чисельних розрахунків проведена заміна $f^* = \mu f$.

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+R=0\,,\\
\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}+Z=0\,,\\
\sigma_r=\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu}\frac{\mathrm{d}\overset{*}{u}}{\mathrm{d}r}+\frac{\lambda}{\mu}\frac{\mathrm{d}\overset{*}{w}}{\mathrm{d}z}+\frac{\lambda}{\mu}\frac{\overset{*}{u}}{r}\,,\\
\sigma_\theta=\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu}\frac{\overset{*}{u}}{r}+\frac{\lambda}{\mu}\frac{\mathrm{d}\overset{*}{u}}{\mathrm{d}r}+\frac{\lambda}{\mu}\frac{\mathrm{d}\overset{*}{w}}{\mathrm{d}z}\,,\\
\sigma_z=\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu}\frac{\mathrm{d}\overset{*}{w}}{\mathrm{d}z}+\frac{\lambda}{\mu}\frac{\mathrm{d}\overset{*}{u}}{\mathrm{d}r}+\frac{\lambda}{\mu}\frac{\overset{*}{u}}{r}
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Граничні умови моделюються за допомогою стержнів заданої жорсткості, що дає можливість врахувати довільні умови взаємодії тіла з оточуючим середовищем (жорсткий контакт, шарнір, пружну взаємодію). На рис. 3-6 приведені граничні умови по контуру тіла:

при $r=R_0$:

$$
\begin{gathered}
\sigma_r(0,z)+q_{rr}(0,z)-K_{rr}^{0}\cdot\left(u(0,z)-\Delta_{rr}(0,z)\right)=0\,;\\
\tau_{rz}(0,z)+q_{rz}(0,z)-K_{rz}^{0}\cdot\left(w(0,z)-\Delta_{rz}(0,z)\right)=0\,;
\end{gathered}
\tag{2}
$$

при $r=R_L$:

$$
\begin{gathered}
\sigma_r(l,z)-q_{rr}(l,z)+K_{rr}^{l}\cdot\left(u(l,z)-\Delta_{rr}(l,z)\right)=0\,;\\
\tau_{rz}(l,z)-q_{rz}(l,z)+K_{rz}^{l}\cdot\left(w(l,z)-\Delta_{rz}(l,z)\right)=0\,;
\end{gathered}
\tag{3}
$$

$z=0$:

$$
\begin{gathered}
\sigma_z(r,0)+q_{zz}(r,0)-K_{zz}^{1}\cdot\left(w(r,0)-\Delta_{zz}(r,0)\right)=0\,;\\
\tau_{rz}(r,0)+q_{zr}(r,0)-K_{zr}^{1}\cdot\left(u(r,0)-\Delta_{zr}(r,0)\right)=0\,;
\end{gathered}
\tag{4}
$$

$z=h$:

$$
\begin{gathered}
\sigma_z(r,h)+q_{zz}(r,h)+K_{zz}^{N}\cdot\left(w(r,h)-\Delta_{zz}(r,h)\right)=0\,;\\
\tau_{rz}(r,h)+q_{zr}(r,h)+K_{zr}^{N}\cdot\left(u(r,h)-\Delta_{zr}(r,h)\right)=0\,.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

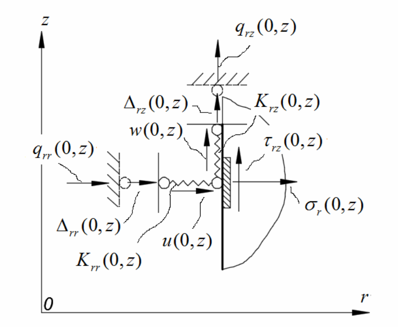

Рис. 3. Переріз $r=R_0$

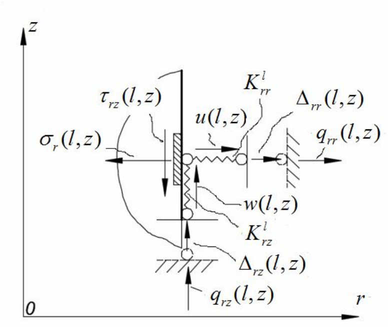

Рис. 4. Переріз $r=R_L$

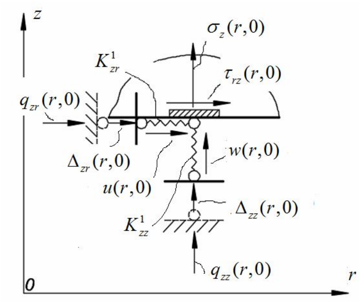

Рис. 5. Переріз $z=0$

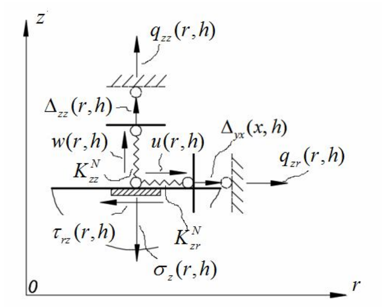

Рис. 6. Переріз $z=h$

Зниження вимірності диференціальних рівнянь (1) та граничних умов (2)-(5) виконується за допомогою проекційного методу. Тіло розбивається прямими на смужки з кроком Δ (рис. 7).

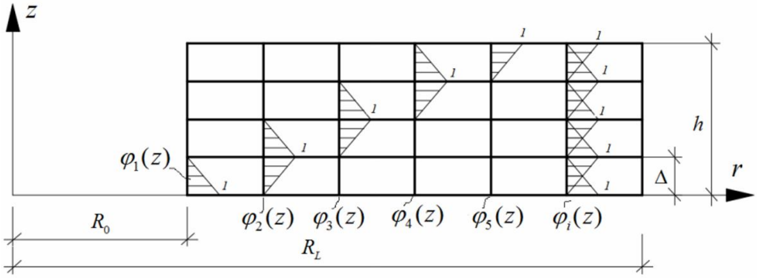

Рис. 7. Базисні функції

На прямих обирається система базисних функцій $\varphi_i(z)$. Шукані функції розкладаються за допомогою лінійної комбінації (6), знижується вимірність по координаті z:

$$\begin{aligned} f(r,z) &\approx f^i(r)\varphi_i(z) \\ f(r,z) &\approx f_i(r)\varphi^i(z) \end{aligned} \tag{6}$$

Оскільки базисні функції утворюють косокутну систему, необхідно враховувати взаємний базис. Позначимо $\varphi_i(z)$ - основний базис, $\varphi^i(z)$ - взаємний базис. Для виконання перетворень використовується індексна форма запису та метричні тензори (7), детально процес редукування описано в роботах [2]-[5].

$$\left\{g_{ij}\right\}=\left\{\varphi_i,\varphi_j\right\},\ \left\{g^{ij}\right\}=\left\{\varphi^i,\varphi^j\right\},\ \left\{\delta_i^{\ j}\right\}=\left\{\varphi_i,\varphi^j\right\}=E\ . \tag{7}$$

На наступному етапі формується редукована задача, відносно координати r. Чисельне розв’язання поставленої задачі відносно функцій $u,\ w,\ \sigma_r,\ \sigma_z$ проводиться методом дискретної ортогоналізації С.К. Годунова. Редуковані диференціальні рівняння записуються у вигляді коефіцієнтів що відповідає значенням шуканих функцій на певній прямій:

$$\frac{\mathrm{d}\overset{*}{u}{}^{\alpha}}{\mathrm{d}r}=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\sigma_r^{\alpha}-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}g^{\alpha i}b_{ij}\overset{*}{u}{}^{j},$$
$$\frac{\mathrm{d}\overset{*}{w}{}^{\alpha}}{\mathrm{d}r}=g^{\alpha i}b_{ij}\overset{*}{u}{}^{j}-\tau_{rz}^{\alpha},$$
$$\frac{\mathrm{d}\sigma_r^{\alpha}}{\mathrm{d}r}=-g^{\alpha j}[\tau_{rz}^{N}-\tau_{rz}^{1}]+g^{\alpha i}b_{ji}\tau_{rz}^{j}-\frac{1}{r}\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\sigma_r^{\alpha}+\frac{2\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{1}{r}g^{\alpha i}b_{ij}\overset{*}{u}{}^{j}-\frac{2\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{1}{r}\tau_{rz}^{\alpha}-R^{\alpha}, \tag{8}$$
$$\frac{\mathrm{d}\tau_{rz}^{\alpha}}{\mathrm{d}r}=g^{\alpha j}[\sigma_z^{1}-\sigma_z^{N}]+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}g^{\alpha i}b_{ji}\sigma_r^{j}+\frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}g^{\alpha i}b_{ji}g^{j\beta}b_{\beta\gamma}\overset{*}{w}{}^{\gamma}-\frac{\tau_{rz}^{\alpha}}{r}-Z^{\alpha}.$$

Редуковані граничні умови мають вигляд:

при $r=R_0$:

$$\sigma_{r0}^{\alpha}+q_{rr0}^{\alpha}-K_{rr}^{0}\cdot(u_0^{\alpha}-\Delta_{rr0}^{\alpha})=0,$$
$$\tau_{rz0}^{\alpha}+q_{rz0}^{\alpha}-K_{rz}^{0}\cdot(w_0^{\alpha}-\Delta_{rz0}^{\alpha})=0,$$

при $r=R_L$:

$$\sigma_{rl}^{\alpha}-q_{rrl}^{\alpha}+K_{rr}^{l}\cdot(u_l^{\alpha}-\Delta_{rrl}^{\alpha})=0,$$
$$\tau_{rzl}^{\alpha}-q_{rzl}^{\alpha}+K_{rz}^{l}\cdot(w_l^{\alpha}-\Delta_{rzl}^{\alpha})=0,$$

при $z=0$:

$$\sigma_z^{1}=K_{zz}^{1}\cdot(w^{1}-\Delta_{zz}^{1})-q_{zz}^{1},$$
$$\tau_{rz}^{1}=K_{zr}^{1}\cdot(u^{1}-\Delta_{zr}^{1})-q_{zr}^{1},$$

при $z=h$:

$$\sigma_z^{N}=-q_{zz}^{N}-K_{zz}^{N}\cdot(w^{N}-\Delta_{zz}^{N}),$$
$$\tau_{rz}^{N}=K_{zr}^{N}\cdot(u^{N}-\Delta_{zr}^{N})-q_{zr}^{N}.$$

Під час редукування вихідні диференціальні рівняння зводяться до системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, записаних у формі Коші, невідомі функції залежать лише від координати r. Розроблено чисельний алгоритм розрахунку поставленої граничної задачі, побудований на основі методу дискретної ортогоналізації С. К. Годунова [2]. Інтегрування рівнянь виконується методом Рунге-Кутта Мерсона 4 порядку точності. В середовищі Visual Fortran проведено чисельну реалізацію описаного алгоритму.

Результати розрахунку. Досліджується напружено-деформований стан сталевого циліндричного тіла (рис. 8), $E=2\cdot10^{8}\,кПа$, $\upsilon=0,3$.

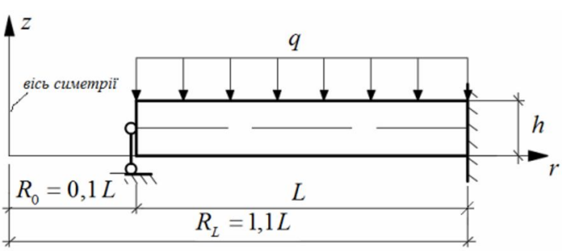

Рис. 8. Кільцева пластина

Були розглянуті тіла різних товщин: $h_1{=}0,02L$, $h_2{=}0,04L$, $h_3{=}0,06L$, $h_4{=}0,08L$, $h_5{=}0,1L$ - відносяться до тонких пластин, відповідає умові $\frac{1}{80}<\frac{h}{R_L-R_0}<\frac{1}{10}$ та $h_6=0,2L$, $h_7=0,4L$, $h_8=0,6L$, $h_9=0,8L$, $h_{10}=L$ - товсті пластини та масивні тіла, відповідає умові $\frac{h}{R_L-R_0}>\frac{1}{10}$. Порівнюються максимальні переміщення та напруження в перерізах $r=0,5L$.

Отримано чисельні результати при різному кроці розбиття, оцінено збіжність та точність методу. Результати порівнюються з результатами отриманими в теорії тонких пластин. Встановлено, що оптимальний крок розбиття прямими по висоті складає $\Delta = 0,01L$.

У табл. 1 приведені результати розрахунку тонких кільцевих пластин по класичній теорії пластин (ТП) та модифікованим методом прямих (ММП). При збільшенні товщини тіла, результати двох методів відрізняються але в допустимих межах, до 5%. Також в теорії пластин зовнішнє навантаження прикладається до серединної площину пластини, не враховуючи поперечні деформації волокон та обтиснення нормалі. При цьому нормальні напруження $\sigma_z \approx 0$. У модифікованому методі прямих можна задавати довільні статичні да кінематичні впливи на тіло. Тому в моделі навантаження q прикладено до верхньої площини тіла, що також збільшує відносну похибку отриманих даних. У ММП моделювання жорсткого защемлення виконується за допомогою двох стержнів заданої жорсткості, що розташовані на кожній прямій. Для розрахунку було прийнято жорсткість $k = 10^{20}$. При збільшенні кількості прямих загальна жорсткість з’єднання збільшується.

У табл. 2 приведені результати розрахунку товстих пластин та масивних тіл. Отримані дані порівнюються з кластичною теорією тонких пластин, тому показують велику розбіжність 50-100%.

1. Результати розрахунку тонких пластин

Таблиця 1

	$\frac{w_{\max}}{q\cdot 10^5}$	$\frac{\sigma_r(0,5L)}{q}$	$\frac{\sigma_\theta(0,5L)}{q}$	$\frac{\sigma_r(1,1L)}{q}$	$\frac{\tau_{rz}(0,5L)}{q}$
$h_1 = 0,02L$					
ТП	2,59	721,2	217,15	1157,3	3,076
ММП, $\Delta=0,01L$	2,59	720,9	217,61	1158,5	2,35
δ %	0	0,05	0,21	0,1	23,6
$h_2 = 0,04L$					
ТП	0,3	180,306	54,287	289,325	1,538
ММП, $\Delta=0,01L$	0,328	180,653	54,919	337,405	1,738
δ %	9,3	0,19	1,16	16,6	13
$h_3 = 0,06L$					
ТП	0,932	80,136	24,13	128,589	1,025
ММП, $\Delta=0,01L$	0,993	80,597	24,777	167,881	0,979
δ %	6,55	0,58	2,68	30,56	4,49
$h_4 = 0,08L$					
ТП	0,38	45,077	13,572	72,331	0,769
ММП, $\Delta=0,01L$	0,431	45,584	14,225	103,97	0,771
δ %	13,42	1,12	4,81	43,74	0,26
$h_5 = 0,1L$					
ТП	0,194	28,849	8,686	46,292	0,615
ММП, $\Delta=0,01L$	0,229	29,381	9,34	72,535	0,581
δ %	18,04	1,84	7,53	56,69	5,53

2. Результати розрахунку товстих пластин та масивних тіл

Таблиця 2

	$\frac{w_{\max}}{q \cdot 10^5}$	$\frac{\sigma_r(0,5L)}{q}$	$\frac{\sigma_\theta(0,5L)}{q}$	$\frac{\sigma_r(1,1L)}{q}$	$\frac{\tau_{rz}(0,5L)}{q}$
$h_6 = 0,2L$					
ТП	0,259	7,212	2,171	11,573	0,3075
ММП, Δ=0,01L	0,368	7,788	2,809	25,939	0,263
δ %	42,08	7,99	29,39	124,13	14,47
$h_7 = 0,4L$					
ТП	0,323	1,803	0,543	2,893	0,154
ММП, Δ=0,01L	0,858	2,392	1,133	11,548	0,092
δ %	165,6	32,67	108,66	299,17	40,26
$h_8 = 0,6L$					
ТП	0,958	0,801	0,241	1,285	0,103
ММП, Δ=0,01L	4,399	1,419	0,797	8,364	0,041
δ %	359,1	77,15	230,71	550,89	60,19
$h_9 = 0,8L$					
ТП	0,404	0,451	0,136	0,723	0,077
ММП, Δ=0,01L	2,875	1,11	0,678	7,19	0,017
δ %	611,6	146,12	398,53	894,47	77,92
$h_{10} = L$					
ТП	0,207	0,288	0,087	0,463	0,062
ММП, Δ=0,01L	20,88	0,99	0,629	6,673	0,004
δ %	9987	243,75	622,99	1341,25	93,55

У табл. 3 приведені напруження в перерізі $r = 0,5L$ для тіла з співрозмірними габаритами $h = L$, завантаженого по схемі (рис. 8). Результати були отримані запропонованою методикою (ММП) та порівнюються з результатами методу скінценних елементів.

Таблиця 3

h	$\sigma_r \cdot q$, r=0,5L			$\sigma_z \cdot q$, r=0,5L			$\sigma_\theta \cdot q$, r=0,5L		
	ММП	МСЕ	δ %	ММП	МСЕ	δ %	ММП	МСЕ	δ %
L	-0,992	-0,877	13	-1,004	-0,939	6,9	-0,629	-0,519	21
0,9L	-0,592	-0,617	4	-0,978	-0,964	1,4	-0,503	-0,514	2,2
0,8L	-0,379	-0,369	2,7	-0,886	-0,882	0,4	-0,401	-0,405	1,0
0,7L	-0,219	-0,225	2,8	-0,758	-0,759	0,1	-0,306	-0,311	1,8
0,6L	-0,158	-0,146	8,2	-0,619	-0,620	0,2	-0,234	-0,232	0,9
0,5L	-0,098	-0,099	1,0	-0,473	-0,478	1,1	-0,166	-0,166	0,1
0,4L	-0,066	-0,064	3,6	-0,346	-0,343	1,0	-0,112	-0,109	2,4
0,3L	-0,024	-0,023	6,6	-0,212	-0,220	3,7	-0,054	-0,050	7,2
0,2L	0,049	0,045	8,9	-0,116	-0,113	2,4	0,004	0,008	49
0,1L	0,157	0,170	7,7	-0,019	-0,037	48	0,073	0,079	8,0
0	0,394	0,316	25	-0,003	-0,042	93	0,155	0,086	80

На рис. 9 показана тенденція збіжності результатів ММП при збільшенні кількості прямих від 3 до 11, що відповідає кроку розбиття відповідно $\Delta = 0,5L - 0,01L$. Було встановлено, що крок розбиття $\Delta = 0,01L$ прямими по координаті z є оптимальним.

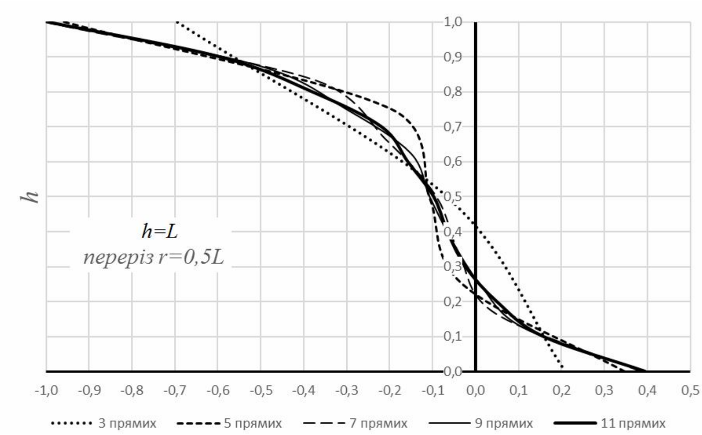

Рис.9 Радіальне нормальне напруження $\sigma_r \cdot q$ при різній кількості прямих

Висновки. У даній роботі впроваджено модифікований метод прямих до зниження вимірності диференціальних рівнянь, записаних в циліндричній системі координат. Виявлені основні особливості редукування вихідних диференціальних рівнянь та граничних умов по координаті z. Точність методу регулюється кількість прямих, але також залежить від кроку розбиття. При $\Delta < 0,01$ призводить до втрати стійкості обчислювального процесу. Під час дослідження модифікованого методу прямих визначено межі, при яких розв'язки дають наближений результат до аналітичного значення (кластичної теорії пластин). При товщині $h / L > 0,08$ відносна похибка ММП та класичної теорії тонких пластин більше 5%, що пов'язано з обмеженням застосування теорії тонких пластин. На прикладі масивних тіл показано, що точність запропонованого методу не нижча за метод скінченних елементів. При однаковій сітці розбиття результати відрізняються в межах 5%. З тал.11 видно, що МСЕ дає похибку на верхній та нижній границі, що пов'язано з специфікою методу. Отримані в даній роботі результати є основою подальшого впровадження ММП для розрахунку задач термопружності, динаміки (в двовимірній та тривимірній постановці) для об'єктів що відносяться до тіл обертання.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Новацкий В. Теория упругости. Пер. с польск. Б. Е. Победри. – М.: Мир, 1975. –256 с.
2. *Чибіряков В. К., Станкевич А. М, Левківський Д. В.* Особливості зниження вимірності рівнянь теорії пружності узагальненим методом прямих. // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 46. – Київ, КНУБА, 2012. – С. 613-624.

3. *Станкевич А. М., Левківський Д. В.* Три варіанти редукції рівнянь плоскої задачі теорії пружності методом "прямих".// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 49 – Київ, КНУБА, 2013. – С. 509-521.
4. *Левківський Д. В.* Метод прямих у циліндричній системі координат. / Д. В. Левківський, М. О. Янсонс // Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-техн. Збірник. – Вип. 92, – Київ, КНУБА, 2013. – С. 118-124.
5. *V.Chybiryakov, A. Stankevich, D. Levkivskiy, V.* Melnychuk Application of generalized "method of lines", for solving problems of thermoelasticity of thick plates. // An international journal on operation of farm and agri-food industry machinery "Motrol", vol.16, №8, Lublin 2014. P. 11-20.

REFERENCES

1. Novaczkij V. Teoriya uprugosti. (Theory of elasticity). Per. s pol`sk. B. E. Pobedri. – M.: Mir, 1975. –256 s.
2. Chybiriakov V. K., Stankevych A. M, Levkivskyi D. V. Osoblyvosti znyzhennia vymirnosti rivnian teorii pruzhnosti uzahalnenym metodom priamykh. (Features of reduction of dimensionality equations theory of elasticity by generalized method of lines). // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. – Vyp. 46. – Kyiv, KNUBA, 2012. – S. 613-624
3. Stankevych A. M., Levkivskyi D. V. Try varianty reduktsii rivnian ploskoi zadachi teorii pruzhnosti metodom "priamykh".(Three variants of the reduction the equations of a plane problem of the theory of elasticity by the method of lines). // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. – Vyp. 49 – Kyiv, KNUBA, 2013. – S. 509-521.
4. Levkivskyi D. V. Metod priamykh u tsylindrychnii systemi koordynat. / D. V. Levkivskyi, M. O. Yansons (The method of lines in a cylindrical coordinate system). // Opir materialiv i teoriia sporud: Naukovo-tekhn. Zbirnyk. – Vyp. 92, – Kyiv, KNUBA, 2013. – C. 118-124.
5. *V.Chybiryakov, A. Stankevich, D. Levkivskiy, V.* Melnychuk Application of generalized "method of lines", for solving problems of thermoelasticity of thick plates. // An international journal on operation of farm and agri-food industry machinery "Motrol", vol.16, №8, Lublin 2014. P. 11-20.

Стаття надійшла 30.09.2019 р.

Levkivsky DV, Kaverin KO, Sovych Yu.V.

RESEARCH OF THE ACCURACY OF THE MODIFIED METHOD OF LINES IN THE CALCULATION OF AXISYMMETRIC BODIES

This paper shows the application of a modified method of line for determining the stress-strain state of bodies of rotation under the static load. Differential equations of the theory of elasticity recorded in the cylindrical coordinate system are used for this purpose. Given the axial symmetry, the problem is reduced to plane and considered in the coordinate system $r0z$, circular coordinates of the desired functions do not change. In the first stage of the method, the dimensionality of initial differential equations and boundary conditions is reduced by the Bubnov-Petrov projection method by z coordinate, using local basis functions. As a result, the system of equations is reduced to a system of plain first-order differential equations that depend on the r coordinate. On the second stage of the method, the reduced system of equations and boundary conditions are solved by S.K. Godunov`s numerical method of discrete orthogonalization in combination with the Runge-Kutta method of Merson.

The study revealed all the main features of reducing initial differential equations and boundary conditions. The limits at which the solutions give an approximate result to the analytical value (classical plate theory) are determined. The example of massive bodies shows that its accuracy is not lower than the finite element method. The results obtained in this work are fundamental for further implementation of MML for calculation of thermal elasticity, dynamics problems (in two- and three-dimensional formulation) for objects pertaining to bodies of rotation.

The accuracy study was performed on the example of an axisymmetric annular plate of different thicknesses. The results are compared with values of the theory of thin plates and the finite element method.

Keywords: thick plates; axisymmetric bodies; theory of elasticity; projection method; modified method of lines; local basis functions; method discrete orthogonalization S.K. Godunov; boundary conditions.

Левківський Д.В., Каверин К.О., Сович Ю.В.

ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОСТІ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ ПРЯМИХ ПРИ РОЗРАХУНКУ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ТІЛ

У даній роботі показано застосування модифікованого методу прямих для визначення напружено-деформованого стану тіл обертання при дії статичного навантаження. Для цього використовуються диференціальні рівняння теорії пружності, записані в циліндричній системі координат. Враховуючи осьову симетрію, задача зводиться до плоскої та розглядаються в системі координат $r0z$, по коловій координаті шукані функції не змінюються. На першому етапі методу виконується зниження вимірності вихідних диференціальних рівнянь та граничних умов проекційним методом Бубнова-Петрова по координаті z, за допомогою локальних базисних функцій. В результаті система рівнянь зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, що залежать від координати r. На другому етапі методу редукована система рівнянь та граничні умови розв'язуються чисельним методом дискретної ортогоналізації С.К. Годунова в поєднанні з методом Рунге-Кутта варіант Мерсона.

Під час дослідження виявлені всі основні особливості редукування вихідних диференціальних рівнянь та граничних умов. Визначено межі, при яких розв'язки дають наближений результат до аналітичного значення (кластичної теорії пластин). На прикладі масивних тіл показано що його точність не нижча за метод скінченних елементів. Результати отримані в даній роботі є основою подальшого впровадження ММП для розрахунку задач термопружності, динаміки (в двовимірній та тривимірній постановці) для об'єктів що відносяться до тіл обертання.

Дослідження точності проведено на прикладі вісесиметричної кільцевої пластини різних товщин. Результати порівнюються із значеннями теорії тонких пластин та отриманими методом скінченних елементів.

Ключові слова: товсті пластини, вісесиметричні тіла, теорія пружності, проекційний метод, модифікований метод прямих, локальні базисні функції, метод дискретної ортогоналізації С.К.Годунова, граничні умови.

УДК 539.3
Левківський Д.В., Каверин К.О., Сович Ю.В. **Дослідження точності модифікованого методу прямих при розрахунку вісесиметричних тіл** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. – С. 243-252.

У роботі показано застосування модифікованого методу прямих для визначення напружено-деформованого стану тіл обертання в циліндричній системі координат. Зниження вимірності виконується проекційним методом по координаті z*, за допомогою локальних базисних функцій. Редукована система рівнянь та граничні умови розв'язуються чисельним методом дискретної ортогоналізації С.К. Годунова. Робота містить велику кількість чисельних результатів. Дослідження точності проведено на прикладі кільцевої пластини різних товщин. Результати порівнюються із значеннями теорії тонких пластин та отриманими методом скінченних елементів.*
Табл. 3. Іл. 9. Бібліогр. 5 назв.

UDC 539.3
Levkivsky DV, Kaverin KO, Sovych Yu.V. **Research of the accuracy of the modified method of lines in the calculation of axisymmetric bodies** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue 103. – P. 243-252.

This paper shows the application of a modified method of lines for determining the stress-strain state of rotation bodies in a cylindrical coordinate system. Dimension reduction is performed by the coordinate z by the *projection method, using local basis functions. The reduced system of equations and boundary conditions are solved by the numerical method descrete orthogonalization of S.K. Godunova. The work contains a large number of numerical results. The accuracy study was performed on the example of an annular plate of different thicknesses. The results are compared with the values of the theory of thin plates and the finite element method.*
Tabl. 3. Il. 9. Ref. 5.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *кандидат технічних наук, доцент кафедри опору матеріалів КНУБА ЛЕВКІВСЬКИЙ Дмитро Володимирович.*
Адреса: *03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, кафедра опору матеріалів, Левківський Дмитро Володимирович.*
Мобільний тел.: *+38(096) 756-21-33;*
Імейл: *Levkivskyi.dv@gmail.com*
ORCID ID: http://orcid.org/0000-0003-2964-1605

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *кандидат технічних наук, доцент кафедри будівельних матеріалів КНУБА КАВЕРИН Костянтин Олександрович.*
Адреса: *03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, кафедра будівельних матеріалів, Каверин Костянтин Олександрович.*
Мобільний тел.: *+38(095)119-18-08;*
Імейл: *kaveryn.ko@knuba.edu.ua*
ORCID ID: http://orcid.org/0000-0001-9086-5953

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *аспірант кафедри опору матеріалів КНУБА СОВИЧ Юлія Вікторівна*
Адреса: *03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, кафедра опору матеріалів, Сович Юлія Вікторівна.*
Мобільний тел.: *+38(098)981-57-31;*
Імейл: *yuliiasov@bigmir.net*
ORCID ID: http://orcid.org/0000-0002-5114-6363