

УДК 519.81:681.51

М.Д. БОРИСЮК, член-кор. НАН Украины (ХКБМ им. А.А. Морозова, г. Харьков);

А.С. КУЦЕНКО, д-р техн. наук (НТУ «ХПИ», г. Харьков);

Т.Е. АЛЕКСАНДРОВА, канд. техн. наук (НТУ «ХПИ», г. Харьков);

А.С. МАЗМАНИШВИЛИ, д-р ф.-м. наук (ННЦ «ХФТИ», г. Харьков)

СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ СТАБИЛИЗАТОРА УПРУГОЙ ТАНКОВОЙ ПУШКИ (Часть I. Математические и имитационные модели)

Рассматриваются математические модели возмущенного движения упругой танковой пушки как объекта стабилизации, электронного блока стабилизатора и электрогидравлического усилителя, а также имитационные модели случайных внешних возмущений, действующих на упругую танковую пушку при движении танка по случайной поверхности.

Розглядаються математичні моделі збуреного руху пружної танкової гармати як об'єкта стабілізації, електронного блоку стабілізатора й електрогидравлічного підсилювача, а також імітаційні моделі випадкових зовнішніх збурень, що діють на пружну танкову гармату в разі руху танка за випадковою поверхнею.

Одной из основных тактико-технических характеристик танка является точность стрельбы танковой пушки с ходу, которая определяется совокупностью многих факторов, основными из которых являются:

- внешние возмущения, действующие на танковую пушку при движении танка по неровностям дороги;
- параметры движения танка, а именно, текущая скорость движения центра масс и текущая угловая скорость поворота корпуса;
- точность стабилизации линии прицеливания относительно направления на цель;
- точность стабилизации оси канала ствола относительно линии прицеливания;
- качество работы бортового баллистического вычислителя, определяющего величины углов упреждения и возвышения оси канала ствола относительно линии прицеливания;
- качество работы системы разрешения выстрела, дающей разрешение на выстрел при малых углах отклонения оси канала ствола относительно линии прицеливания, а также при малой деформации ствола вследствие его упругих колебаний.

Из всего многообразия факторов, влияющих на точность стрельбы из танковой пушки с ходу, остановимся на одном из них, а именно, на обеспечении высокой точности стабилизации оси канала ствола относительно линии прицеливания. Это обстоятельство связано с тем, что стабилизатор танковой пушки за 70-летний период своего развития подвергся наименьшему совершенствованию из всего комплекса управления огнем. Скорострельность танковой пушки существенно повысилась благодаря введению автомата заряжания, а точность стрельбы повысилась благодаря введению стабилизатора линии прицеливания и совершенствованию танкового баллистического вычислителя. Совершенствование стабилизатора танковой пушки состояло лишь в использовании гироплатформы вместо трехстепенных гироскопов, что позволило повысить точность измерения угла рассогласования между осью канала ствола и линией прицеливания, а также в использовании непрерывно совершенствующейся элементной базы электронного блока стабилизатора. Использование же в стабилизаторе танковой пушки методов и алгоритмов современной теории управления

© М.Д. БОРИСЮК, А.С. КУЦЕНКО, Т.Е. АЛЕКСАНДРОВА, А.С. МАЗМАНИШВИЛИ, 2014

не осуществлялось. Алгоритм стабилизации оставался неизменным с момента появления первого стабилизатора танка Т-54А в начале 1950-х годов и представлял собой пропорционально-дифференциальный закон стабилизации

$$\sigma(t) = k_\varphi(t) + k_\dot{\varphi} K_v u_{\omega\varphi}(t), \quad (1)$$

где $\sigma(t)$ — функция управления, формируемая электронным блоком стабилизатора; $u_\varphi(t)$ — выпрямленный выходной сигнал гироскопического датчика угла; $u_{\omega\varphi}(t)$ — выпрямленный выходной сигнал гироскопического датчика угловой скорости; k_v — коэффициент усиления гироскопического датчика угловой скорости; k_φ , $k_\dot{\varphi}$ — варьируемые коэффициенты усиления стабилизатора, причем значения этих коэффициентов до настоящего времени выбираются с помощью диаграммы Вышнеградского, весьма упрощенной математической модели замкнутой системы стабилизации.

Целью настоящей работы является решение задачи параметрического синтеза системы наведения и стабилизации танковой пушки с последующим сравнительным анализом таких систем, реализующих различные законы стабилизации.

1. Математическая модель возмущенного движения объекта стабилизации. Упругая танковая пушка относится к так называемым дискретно-континуальным объектам, возмущенное движение которых описывается в виде системы дифференциальных уравнений, содержащей как обыкновенные, так и частные производные [1–3]. В канале вертикального наведения математическая модель возмущенного движения упругой танковой пушки принимает следующий вид [4, 5]:

$$J_g \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} - \int_r^l m_1(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} dx = M_s(t) + M_t(t); \quad (2)$$

$$m_1(x) \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} EJ(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \zeta \frac{\partial^2}{\partial x^2} EJ(x) \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^2 \partial t} = F(x, t), \quad (3)$$

где $\varphi(t)$ — угловое отклонение воображаемой недеформированной оси канала ствола от направления линии прицеливания; $y(x, t)$ — текущее отклонение произвольной точки ствола от статического прогиба оси канала ствола; $m(x)$ — погонная масса ствола; $m_1(x)$ — величина, связанная с погонной массой соотношением $m_1(x) = m(x)(r + x)$; r — расстояние от оси цапф до места соединения ствола с казенной частью; l — расстояние от оси цапф до дульного среза; J_g — момент инерции пушки относительно оси цапф; E — модуль упругости материала ствола; $J(x)$ — геометрический момент инерции поперечного сечения ствола на расстоянии x от оси цапф; ζ — коэффициент внутреннего демпфирования материала ствола; $M_s(t)$ — стабилизирующий момент, создаваемый стабилизатором танковой пушки; $M_t(t)$ — момент трения в оси цапф; $F(x, t)$ — распределенная по длине ствола сила, обусловленная вертикальными колебаниями подрессоренной части корпуса танка и определяется соотношением

$$F(x, t) = m(x)[\ddot{z}_k(t) - g], \quad (4)$$

где $\ddot{z}_k(t)$ — вертикальное ускорение подрессоренной части корпуса; g — ускорение силы тяжести.

На рис. 1, где введены системы координат: Ox_0y_0 — инерциальная система, начало которой расположено на оси цапф, а ось Ox_0 совпадает с линией прицеливания; Ox_gy_g — связанная с пушкой система, в которой ось Ox_g определяет направление воображаемой недемпфированной оси канала ствола;

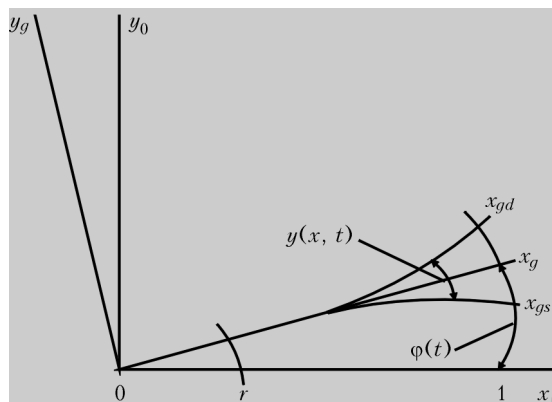


Рис. 1. Системы координат

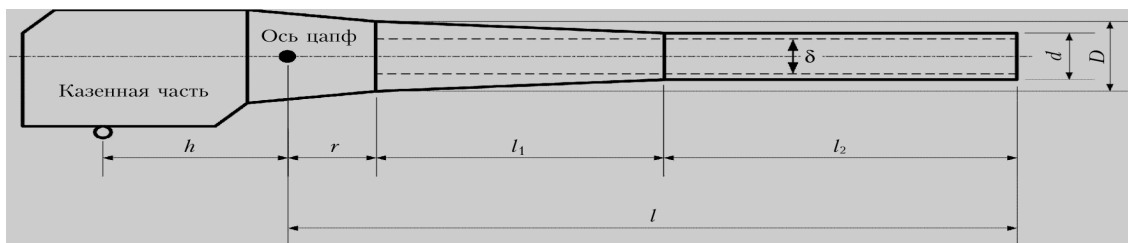


Рис. 2. Геометрические характеристики ствола

$Ox_{gs}y_g$ — связанная с пушкой система, в которой линия Ox_{gs} совпадает с деформированной под действием статической составляющей нагрузки (4) $F(x) = m(x)g$ осью канала ствола; $Ox_{gd}y_g$ — связанная с пушкой система, в которой линия Ox_{gd} совпадает с колеблющейся осью канала ствола.

Геометрические характеристики ствола 125-мм танковой пушки приведены на рис. 2. Анализ рисунка показывает, что упругая часть ствола состоит из конической и цилиндрической частей, поэтому на отрезке l_1 погонная масса $m(x)$ и геометрический момент инерции $J(x)$ зависят от величины $x \in [r, r + l_1]$, а на отрезке l_2 величины $m(x)$ и $J(x)$ постоянны и равны m_0 и J_0 .

При $x \in [r, r + l_1]$ внешний радиус ствола определяется соотношением

$$R(x) = 0,5D - kx,$$

где

$$k = \frac{0,5(D - d)}{l_1},$$

следовательно,

$$J(x) = \frac{\pi}{4} [R^4(x) - (0,5\delta)^4]. \quad (5)$$

Погонная масса ствола при $x \in [r, r + l_1]$ определяется зависимостью

$$m(x) = \frac{\pi}{2} [R^2(x) - (0,5\delta)^2]\gamma, \quad (6)$$

где γ — удельная масса материала ствола.

Величины m_0 и J_0 на отрезке l_2 могут быть получены из формул (5) и (6) при подстановке в них $R(x) = 0,5d$.

В соответствии с [6] функцию $y(x, t)$ представим в виде

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^s \gamma_i(x) T_i(t). \quad (7)$$

Подставим (7) в уравнения (2) и (3)

$$J_g \ddot{\phi}(t) - \sum_{i=1}^s \ddot{T}_i(t) \int_r^l m_1(x) \gamma_i(x) dx = M_s(t) + M_t(t); \quad (8)$$

$$\begin{aligned} m_1(x) \ddot{\phi}(t) + m(x) \sum_{i=1}^s \gamma_i(x) \ddot{T}_i(t) + \\ + E \sum_{i=1}^s \frac{\partial^2}{\partial x^2} [J(x) \gamma_i^{(II)}(x)] T_i(t) + \\ + \zeta E \sum_{i=1}^s \frac{\partial^2}{\partial x^2} [J(x) \gamma_i^{(III)}(x)] \dot{T}_i(t) = F(x, t). \end{aligned} \quad (9)$$

Обе части уравнения (9) умножим на $\gamma_i(x)$ и проинтегрируем в интервале от r до l

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}(t) \int_r^l m_1(x) \gamma_i(x) dx + \sum_{i=1}^s \ddot{T}_i(t) \int_r^l m(x) \gamma_i^2(x) dx + \\ + E \sum_{i=1}^s T_i(t) \int_r^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} [J(x) \gamma_i^{(II)}(x)] \gamma_i(x) dx + \\ + \zeta E \sum_{i=1}^s \dot{T}_i(t) \int_r^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} [J(x) \gamma_i^{(III)}(x)] \gamma_i(x) dx = \\ = \int_r^l F(x, t) \gamma_i(x) dx. \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом условия ортогональности собственных форм упругих колебаний ствола, прием обозначения

$$a_i = \int_r^l m_1(x) \gamma_i(x) dx; \quad b_i = E \int_r^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} [J(x) \gamma_i^{(II)}(x)] \gamma_i(x) dx;$$

$$c_i = \int_r^l m(x) \gamma_i^2(x) dx; \quad k_i = \int_r^l m(x) \gamma_i(x) dx,$$

где

$$(i = \overline{1, s}). \quad (11)$$

Тогда математическая модель возмущенного движения упругой танковой пушки может быть представлена в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений $2(s + 1)$ порядка

$$J_g \ddot{\varphi}(t) - \sum_{i=1}^s a_i \ddot{T}_i(t) = M_s(t) + M_t(t);$$

$$a_i \ddot{\varphi}(t) + c_i \ddot{T}_i(t) + \zeta b_i \dot{T}_i(t) + b_i T_i(t) = k_i [\ddot{z}_k(t) - g];$$

$$(i = \overline{1, s}). \quad (12)$$

Значения коэффициентов дифференциальных уравнений (12) для первых трех тонов упругих колебаний ствола 125-мм танковой пушки отечественных танков «Булат», «Береза» и «Оплот», вычисленные в соответствии с формулами (11), приведены в табл. 1. При этом параметры пушки принимались равными $J_g = 736,9 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$; $r = 0,25 \text{ м}$; $l_1 = 2,18 \text{ м}$; $l_2 = 2,40 \text{ м}$; $D = 0,252 \text{ м}$; $d = 0,172 \text{ м}$; $\delta = 0,125 \text{ м}$; $l = 4,83 \text{ м}$; $\gamma = 7810 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$; $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$; $\zeta = 0,021$.

В уравнениях (12) положим

$$T_i(t) = T_{i0} + \Delta T_i(t) \quad (13)$$

и подставим (13) в уравнения (12)

$$J_g \ddot{\varphi}(t) - \sum_{i=1}^s a_i \Delta \ddot{T}_i(t) = M_s(t) + M_T(t); \quad (14)$$

$$a_i \ddot{\varphi}(t) + c_i \Delta \ddot{T}_i(t) + \zeta b_i \Delta \dot{T}_i(t) + b_i \Delta T_i(t) = k_i \ddot{z}_k(t); \quad (15)$$

$$b_i T_{i0} = k_i g; \quad (i = \overline{1, S}). \quad (16)$$

Из (16) имеем

$$T_{i0} = \frac{k_i}{b_i} g. \quad (17)$$

Таблица 1.

Номер тона	$a_i, \text{Н} \cdot \text{с}^{-2}$	$b_i, \text{Н} \cdot \text{м}^{-2}$	$c_i, \text{Н} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$	$k_i, \text{Н} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
1	$9,721 \cdot 10^2$	$2,213 \cdot 10^5$	$2,152 \cdot 10^3$	$3,612 \cdot 10^2$
2	$7,999 \cdot 10^2$	$3,194 \cdot 10^6$	$1,941 \cdot 10^3$	$3,994 \cdot 10^2$
3	$6,340 \cdot 10$	$1,786 \cdot 10^7$	$2,144 \cdot 10^3$	$2,286 \cdot 10^2$

Подставляя (17) в (7), получаем формулу для расчета статического прогиба ствола

$$y(x) = \sum_{i=1}^s \gamma_i(x) T_{i0} = g \sum_{i=1}^s \frac{k_i}{b_i} \gamma_i(x). \quad (18)$$

При расчете коэффициентов (11) и статического прогиба (18) функции $\gamma_i(x)$, $i = 1, S$ выбираются в виде функций Крылова [6] либо в более простом виде [7]:

$$\gamma_i(x) = \sin \frac{\pi x}{2(l-r)}.$$

2. Имитационное моделирование внешних возмущений, действующих на упругую танковую пушку. Из рассмотрения уравнения (14) можно сделать вывод, что момент нагрузки, действующий на танковую пушку, представляет собой сумму моментов силы трения в оси цапф и динамического момента, обусловленного упругими колебаниями ствола

$$M_f(t) = M_i(t) + M_g(t) = M_t(t) + \sum_{i=1}^s a_i \Delta \ddot{T}_i(t). \quad (19)$$

Оба возмущающих момента обусловлены вынужденными колебаниями подрессоренной части корпуса танка при его движении по неровностям. Действительно, из рассмотрения рис. 3 можно записать соотношение для относительной угловой скорости поворота подрессоренной части корпуса танка относительно оси цапф танковой пушки

$$\dot{\phi}_g(t) = \dot{\phi}_k(t) \cos \alpha(t) + \dot{\vartheta}_k(t) \sin \alpha(t), \quad (20)$$

где $\dot{\phi}_k(t)$, $\dot{\vartheta}_k(t)$ — угловые скорости продольно-угловых и поперечно-угловых колебаний подрессоренной части корпуса соответственно. Тогда величина силы трения в оси цапф танковой пушки определяется формулой

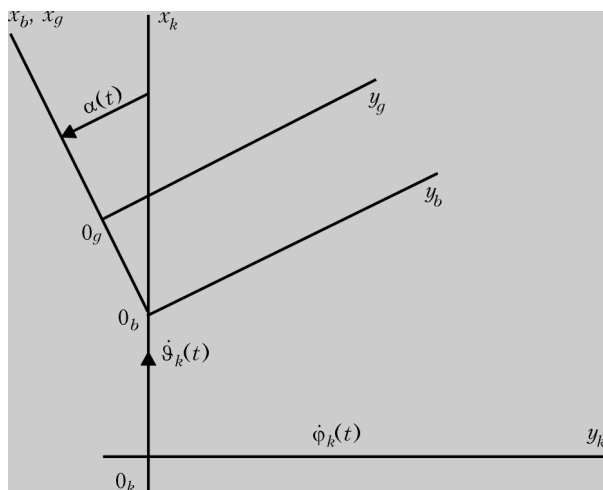


Рис. 3. Системы координат: $0_k x_k y_k$ — связанная с подвесной частью корпуса с началом, расположенным в центре корпуса; $0_b x_b y_b$ — связанная с башней с началом, расположенным на оси поворота башни; $0_g x_g y_g$ — связанная с пушкой с началом, расположенным на оси цапф; $\alpha(t)$ — угол поворота башни относительно корпуса

$$M_i(t) = m^* \operatorname{sign} [\dot{\phi}_g(t) - \dot{\phi}(t)] + \mu [\dot{\phi}_g(t) - \dot{\phi}(t)], \quad (21)$$

где m^* — величина «сухого» трения в оси цапф; μ — коэффициент вязкого трения в оси цапф.

Динамический момент $M_g(t)$, обусловленный упругими колебаниями ствола танковой пушки, в соответствии с уравнениями (14) и (15) определяется линейными вертикальными ускорениями подвесной части корпуса танка $\ddot{z}_k(t)$, следовательно, суммарный момент внешних возмущений (19), действующих на танковую пушку, определяется в общем случае случайными функциями $\ddot{z}_k(t)$; $\dot{\phi}_k(t)$; $\dot{\theta}_k(t)$ и является случайной функцией времени.

В работе [8] решена задача генерации случайных функций $z_k(t)$; $\dot{z}_k(t)$; $\phi_k(t)$; $\dot{\phi}_k(t)$ $\theta_k(t)$; $\dot{\theta}_k(t)$, являющихся решениями системы неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений, представляющих собой имитационную модель возмущенного движения

подвесной части корпуса танка, движущегося по случайной поверхности, описываемой уравнением Ланжевена [8]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + 2\beta_x \frac{\partial}{\partial x} + \Omega_x^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial y^2} + 2\beta_y \frac{\partial}{\partial y} + \Omega_y^2 \right) \times h(x, y) = \sigma v[x, y], \quad (22)$$

где $h(x, y)$ случайная реализация двумерного марковского поля $H(x, y)$; σ — среднее квадратичное отклонение высоты неровности генерируемого поля; $v(x, y)$ — порождающее поле, обладающее свойствами гауссовского двумерного «белого шума» единичной интенсивности; $\beta_x, \beta_y, \Omega_x, \Omega_y$ — характеристики случайного поля по направлениям Ox и Oy .

Если свойства случайного поля $H(x, y)$ во всех направлениях одинаковы, то $\beta_x = \beta_y = \beta$ и $\Omega_x = \Omega_y = \Omega$.

Для различных типов поверхности движения значения характеристик моделирующего поля приведены в табл. 2.

Каждой реализации двумерного «белого шума» $v_j(x, y)$, ($j = 1, N$) соответствует реализация $h_j(x, y)$, ($j = 1, N$) двумерного марковского поля $H(x, y)$, а также реализация случайных функций $\ddot{z}_k(t)$, $\dot{\phi}_k(t)$, $\dot{\theta}_k(t)$ и случайных функций $M_{gj}(t)$, $M_{ij}(t)$, $M_{fj}(t)$, ($j = 1, N$).

На рис. 4 приведены гистограммы случайной функции $M_g(t)$, обусловленной упругими колебаниями ствола пушки при движении танка по мостовой для каждого из тонов упругих колебаний ствола пушки в отдельности. Анализ этих гистограмм приводит к выводу, что основной вклад в формирование возмущающего момента $M_g(t)$ вносит первый тон упругих колебаний ствола (до 220 Н·м). Величина возмущения от второго тона достигает 40 Н·м, а от третьего тона не превышает 1 Н·м.

Таким образом, при имитационном моделировании внешних возмущений, действующих на упругую танковую пушку при движении танка по неровностям, достаточно учитывать первые два тона упругих колебаний ствола танковой пушки.

Таблица 2.

Тип поверхности движения	$\beta, \text{м}^{-1}$	$\Omega, \text{м}^{-1}$	$\sigma, \text{м}$
Асфальтобетон	0,191	0,444	0,0053
Мостовая	0,255	0,669	0,0243
Грунтовая дорога	0,337	1,065	0,1050

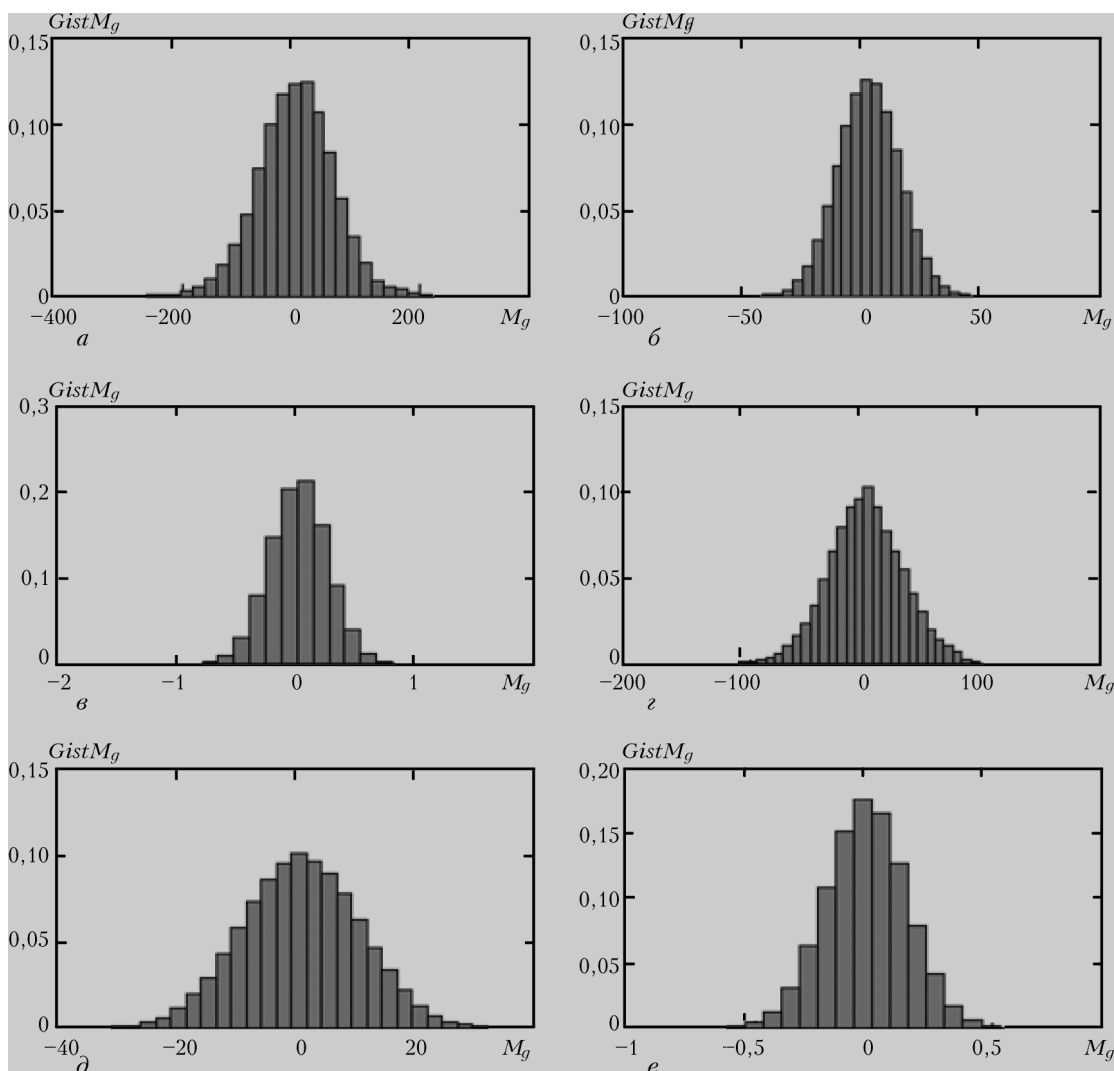


Рис. 4. Гистограммы реализаций случайной функции $M_g(t)$; a — первый тон, $V = 5 \text{ м·с}^{-1}$; b — второй тон, $V = 5 \text{ м·с}^{-1}$; c — третий тон, $V = 5 \text{ м·с}^{-1}$; d — первый тон, $V = 10 \text{ м·с}^{-1}$; e — второй тон, $V = 10 \text{ м·с}^{-1}$; f — третий тон, $V = 10 \text{ м·с}^{-1}$

Стабилизатор танковой пушки в качестве чувствительных элементов содержит гиростабилизированную платформу, с помощью которой производится измерение угла рассогласования между линией прицеливания и воображаемой недеформированной осью канала ствола $\varphi(t)$, и гироскопический датчик угловой скорости пушки относительно оси цапфы $\dot{\varphi}(t)$. В качестве усилительно-преобразовательного устройства стабилизатор содержит электронный блок, формирующий управляющую функцию $\sigma(t)$ и выходной управляющий сигнал $u(t)$ в виде:

$$u(t) = \begin{cases} \sigma(t) & \text{при } \sigma^* \leq |\sigma(t)| \leq \sigma^{**}; \\ \sigma^* \operatorname{sign} \sigma(t) & \text{при } |\sigma(t)| < \sigma^*; \\ \sigma^{**} \operatorname{sign} \sigma(t) & \text{при } |\sigma(t)| > \sigma^{**}. \end{cases} \quad (23)$$

Рассмотрим штатный стабилизатор танковой пушки, электронный блок которого реализует закон стабилизации (1). Если пренебречь собственной динамикой гиростабилизированной платформы и гироскопического датчика угловой скорости, то закон стабилизации (1) можно представить в виде

$$\sigma(t) = k_\varphi \varphi(t) + k_{\dot{\varphi}} \dot{\varphi}(t), \quad (24)$$

Сигнал управления $u(t)$, формируемый электронным блоком в соответствии с соотношениями (23) и (24), подается на вход элек-

трогидравлического усилителя танковой пушки, содержащего управляющий электромагнит, на якоре которого укреплено коромысло с запорными иглами, гидронасос и исполнительный гидроцилиндр, выходной шток которого механически связан с казенной частью танковой пушки. Математическая модель возмущенного движения электрогидравлического усилителя получена в работе [5] и может быть представлена в виде:

$$T_1^2 \frac{d^2\beta(t)}{dt^2} + T_2 \frac{d\beta(t)}{dt} + \beta(t) = \frac{k_e k_y}{c} u(t); \quad (25)$$

$$T_p \Delta \frac{dp(t)}{dt} + \Delta p(t) = k_{sy} b p \beta(t), \quad (26)$$

где $\beta(t)$ — угол поворота коромысла с расположенными на нем запорными иглами; $\Delta p(t)$ — разность давлений рабочей жидкости в полостях исполнительного гидроцилиндра; c — коэффициент жесткости фиксирующей пружины коромысла; k_e , k_y , k_p , T_1 , T_2 , T_p — коэффициенты усиления и постоянные времени агрегатов электрогидравлического усилителя.

Стабилизирующий момент, развиваемый стабилизатором, связан с разностью давлений рабочей жидкости соотношением

$$M_s(t) = -k_m \Delta p(t). \quad (27)$$

Знак минус в соотношении (27) обусловлен тем, что момент (27), вызывающий положительное изменение угла $\varphi(t)$, имеет место при отрицательном значении величины

$$\Delta p(t) = p_1(t) - p_2(t),$$

где $p_1(t)$ и $p_2(t)$ — величины значений давления рабочей жидкости в верхней и нижней полостях исполнительного гидроцилиндра соответственно.

В соответствии с формулой (19) дифференциальное уравнение возмущенного движения танковой пушки может быть представлено в виде

$$J_g \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = M_s(t) + M_f(t). \quad (28)$$

Выводы

В математической модели возмущенного движения упругой танковой пушки, как объекта стабилизации, достаточно учитывать первые два тона упругих колебаний ствола. Внешние возмущения, действующие на танковую пушку при стрельбе с ходу, определяются вертикальными ускорениями, а также продольно-угловыми и поперечно-угловыми скоростями подрессоренной части корпуса танка, вызываемыми случайными неровностями поверхности движения. ➡

Список литературы

1. *Сиразстдинов Т.К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. — Новосибирск: Наука, 1967. — 232 с.
2. *Сиразстдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1977. — 480 с.
3. *Дегтярев Г.Л., Сиразстдинов Т.К.* Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. — М.: Машиностроение, 1986. — 216 с.
4. *Александров Е.Е., Бех М.В.* Автоматизированное проектирование динамических систем с помощью функций Ляпунова. — Харьков: Основа, 1993. — 113 с.
5. *Александров Е.Е., Богаенко И.Н., Кузнецов Б.И.* Параметрический синтез систем стабилизации танкового вооружения. — К.: Техніка, 1997. — 112 с.
6. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. — М.: Наука, 1965. — 559 с.
7. *Бидерман В.Л.* Теория механических колебаний. — М.: Высшая школа, 1980. — 408 с.
8. *Борисюк М.Д., Александрова Т.Е., Мазманишвили А.С.* Стохастическая оценка плавности хода многоопорного транспортного средства // Доповіді НАНУ. — 2013. — № 6. — С. 52–59.