УДК 62-533.7

Є. В. ЛЕБІДЬ, інж., **Г. Д. РАДЗІВІЛОВ,** канд. техн. наук, **К.О. БЕЛЯКОВ,** інж.
(Військовий інститут телекомунікацій та інформації Державного університету телекомунікацій, м. Київ)

ЗМЕНШЕННЯ ФАЗОВОГО ШУМУ ЗА РАХУНОК ПІДВИЩЕННЯ ФІЛЬТРУЮЧИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ПОВНІСТЮ ЦИФРОВОЇ СИСТЕМИ ФАЗОВОГО АВТОПІДСТРОЮВАННЯ ЧАСТОТИ

Проведено порівняльний аналіз зменшення фазового шуму та підвищення фільтруючих властивостей системи фазового автопідстроювання частоти. Досліджено зв'язок часового джитера зі спектральною щільністю потужності фазового шуму, що необхідно для знаходження часової нестабільності періоду коливань повністю цифрової системи фазового автопідстроювання частоти.

Проведен сравнительный анализ уменьшения фазового шума и повышения фильтрующих свойств системы фазовой автоподстройки частоти. Исследована связь временного джиттера со спектральной плотностью мощности фазового шума, как необходимые для нахождения временной нестабильности периода колебаний полностью цифровой системы фазовой автоподстройки частоти.

The comparative analysis of diminishing of phase noise and increase of filter properties of the system PLL is conducted in the article. Connection of temporal jitter is investigational with a spectral closeness powers of phase noise, which are needed for being of sentinel instability of period of vibrations fully of the system digital PLL.

Якість роботи схеми системи фазової автопідстроювання частоти (ФАПЧ) залежить від багатьох параметрів, у тому числі від рівня фазового шуму (джитера). Основна задача з метою проектування та розроблення систем ФАПЧ – це об'єктивний вибір смуги частот кола зворотного зв'язку так, щоб забезпечувався компроміс між рівнем вихідного джитера й смугою пропускання фільтром нижніх частот (ФНЧ) у схемі ФАПЧ.

Джитер на виході ФАПЧ зумовлений, в основному, двома джерелами: шумом опорного джерела та внутрішнім шумом керованого генератора напруги (ГКН). Перший генерується джерелами сигналу, паразитними зв'язками в пристрої, неідеальністю схеми джерела живлення. Шум ГКН генерується елементами ФНЧ, підсилювачем у схемі ГКН та джерелом живлення.

Фазові шуми вихідного сигналу системи ФАПЧ (рис. 1):

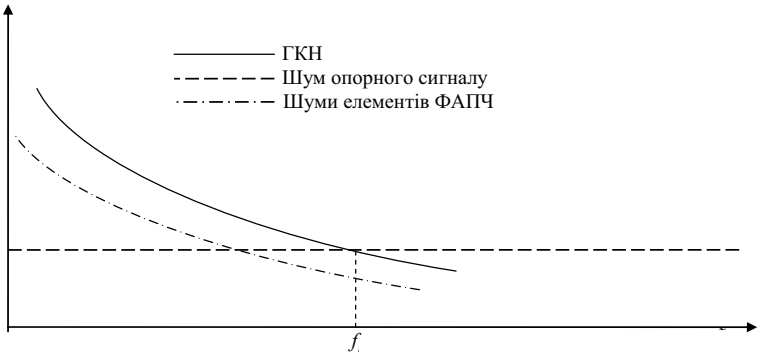

Рис. 1. Характеристики фазових шумів генератора напруги, опорного генератора і компонентів контуру фазового автопідстроювання частоти

© Є. В. ЛЕБІДЬ, Г. Д. РАДЗІВІЛОВ, К.О. БЕЛЯКОВ, 2015

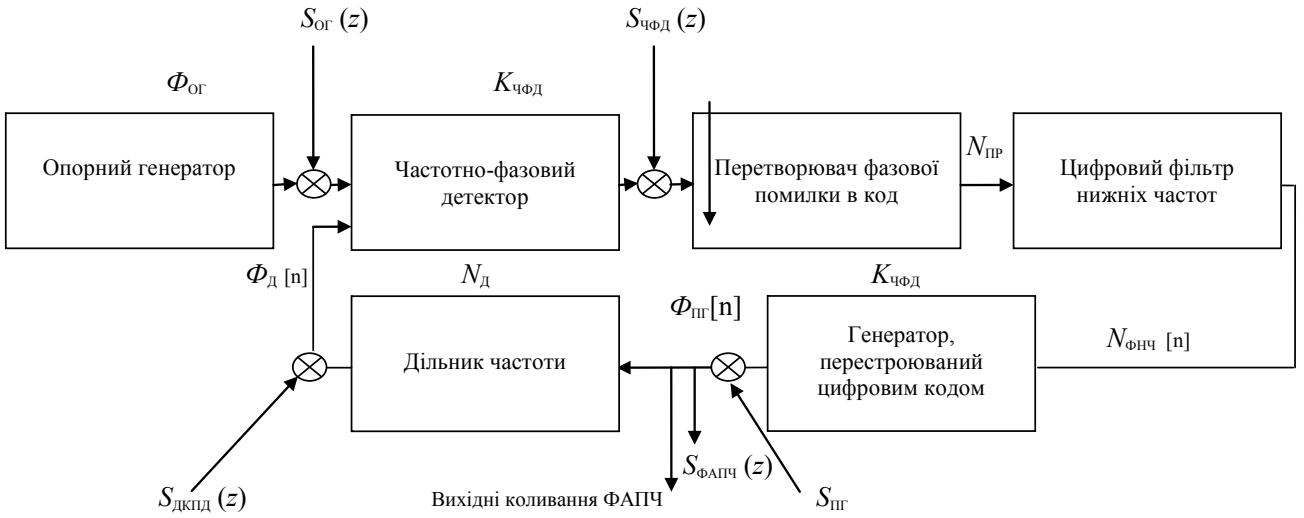

Рис. 2. Структурна схема цифрової фазового автопідстроювання частоти з адитивними джерелами шуму

1) Шуми в смузі пропускання ФНЧ, що визначаються шумами в петлі ФАПЧ і шумами ГКН. Шуми в петлі ФАПЧ залежать від таких параметрів: нормованих рівнів фліккер-шумів й фазових шумів частотно-фазового детектора (ЧФД), робочої частоти ЧФД (частоти порівняння), частоти ГКН.

2) Шуми за межами смуги пропускання петльового ФНЧ, що визначаються шумами ГКН.

Мета статті – провести порівняльний аналіз зменшення фазового шуму та підвищення фільтруючих властивостей системи ФАПЧ. Дослідити зв'язок часового джитера зі спектральною щільністю потужності фазового шуму, що необхідно для знаходження часової нестабільності періоду коливань повністю цифрової системи ФАПЧ.

Фільтруючі властивості системи ФАПЧ на цифрових логічних елементах. У разі розробки систем ФАПЧ необхідно оцінити вихідні характеристики шумових коливань. З цією метою необхідно знайти передавальні функції шуму окремих блоків, що входять до складу системи ФАПЧ.

Якщо потужність усіх джерел шуму мала в порівнянні з потужністю корисних коливань на виході системи ФАПЧ, тобто всі джерела шуму є адитивними, їх можна додати до відповідних вузлів системи, що розглядається (рис. 2).

Розглянемо шуми, які генеровано такими блоками системи ФАПЧ дільником частоти генератора, який перебудовано, частотно-фазовим детектором, цифровим фільтром нижніх частот, генератором опорних коливань.

Нехай $S_{ДПКД}(z)$, $S_{ПГ}(z)$, $S_{ОПР.Г.}(z)$, і $S_{ФАПЧ}(z)$ – спектральні щільності потужності фазового шуму дільника частоти, спектральна щільність потужності фазового шуму перестроюваного генератора, спектральна щільність потужності фазового шуму сигналу опорного генератора, спектральна щільність потужності фазового шуму частотно-фазового детектора і спектральна щільність потужності фазового шуму вихідних коливань повністю цифрової системи ФАПЧ відповідно.

Передаточні функції шуму окремих блоків структурної схеми повністю цифрової системи ФАПЧ з адитивними джерелами шуму (рис. 1)

$$H_{\hat{I}\tilde{A}}(z)=\frac{z^{-1}\cdot K_{\times\hat{O}\ddot{A}}\cdot K_{\ddot{I}\tilde{A}}\cdot \acute{I}_{\hat{O}\acute{I}\times}(z)}{N_{\ddot{A}}\cdot(1-z^{-1})+z^{-1}\cdot K_{\times\hat{O}\ddot{A}}\cdot K_{\ddot{I}\tilde{A}}\cdot \acute{I}_{\hat{O}\acute{I}\times}(z)^3} \quad (1)$$

$$S^{\hat{I}\tilde{A}}_{\hat{O}\grave{A}\ddot{I}\times}(z)=\left|H_{\hat{O}\grave{A}\ddot{I}\times}(z)\right|^2\cdot S_{\hat{I}\tilde{A}}(z) \quad (2)$$

Передаточна функція шуму перестроюваного генератора

$$H_{\ddot{I}\tilde{A}}(z)=H_{\ddot{I}}(z)\,; \quad (3)$$

$$H_{\ddot{I}}(z)=H_{\hat{O}\grave{A}\ddot{I}\times}(z)\,; \quad (4)$$

$$S^{ПГ}_{ФАПЧ}(z)=\left|1-H_{ФАПЧ}(z)\right|^2\cdot S_{ПГ}(z)\,. \quad (5)$$

Передаточна функція шуму дільника частоти

$$H_{\ddot{A}}(z)=\frac{z^{-1}\cdot K_{\times\hat{O}\ddot{A}}\cdot K_{\ddot{I}\tilde{A}}\cdot \acute{I}_{\acute{I}\times\hat{O}}(z)}{N_{\ddot{A}}\cdot(1-z^{-1})+z^{-1}\cdot K_{\times\hat{O}\ddot{A}}\cdot K_{\ddot{I}\tilde{A}}\cdot H_{\acute{I}\times\hat{O}}(z)}\,; \quad (6)$$

$$S^{\ddot{A}}_{\hat{O}\grave{A}\ddot{I}\times}(z)=\left|H_{\hat{O}\grave{A}\ddot{I}\times}(z)\right|^2\cdot S_{\ddot{A}}(z)\,. \quad (7)$$

Для частотно-фазового детектора

$$H_{\times\hat{O}\tilde{A}}(z)=\theta\frac{z^{-1}\cdot K_{\times\hat{O}\tilde{A}}\cdot K_{\tilde{I}\tilde{A}}\cdot H_{\tilde{I}\times\hat{O}}(z)}{N_{\tilde{A}}\cdot(1-z^{-1})+z^{-1}\cdot K_{\times\hat{O}\tilde{A}}\cdot K_{\tilde{I}\tilde{A}}\cdot N_{\tilde{I}\times\hat{O}}(z)} \quad (8)$$

;

$$S_{\Phi A\Pi Ч}^{ЧФД}(z)=\left|H_{\Phi A\Pi Ч}(z)\right|^2\cdot S_{ЧФД}(z)\,. \quad (9)$$

Сумарна спектральна щільність потужності фазового шуму вихідних коливань повністю цифрової системи ФАПЧ визначається сумою (2), (3), (7), (9):

$$S_{\hat{O}\hat{A}\tilde{I}\times}(z)=S_{\hat{O}\hat{A}\tilde{I}\times}^{\tilde{I}\tilde{A}}(z)+S_{\hat{O}\hat{A}\tilde{I}\times}^{\tilde{I}\tilde{A}}(z)+S_{\hat{O}\hat{A}\tilde{I}\times}^{\tilde{A}}(z)+S_{\hat{O}\hat{A}\tilde{I}\times}^{\times\hat{O}\tilde{A}}(z) \quad (10)$$

Співвідношення (2), (3), (7), (9) і (10) може бути використано з метою оцінки спектральної щільності потужності фазового шуму повністю цифрової системи ФАПЧ з метою подальшого розрахункового знаходження часової нестабільності періоду вихідних коливань цієї системи.

Зв'язок часового джитера зі спектральною щільністю потужності фазового шуму

Нехай t_{n+1} і t – моменти часу, які відповідають достатньому фронту коливання генератора. Період *n*-го коливання генератора визначимо за відношенням

$$T_n=t_{n+1}-t_n\,. \quad (11)$$

У ідеальному генераторі значення T_n не залежить від номера періоду. Тепловий шум, шум завади за колами живлення призводять до змінення протягом часу періоду вихідних коливань генератора.

Девіація періоду вихідних коливань перестроюваного генератора визначається з відхиленням T_n від середнього математичного значення періоду коливань генератора T.

$$\Delta T=T_n-\bar{T}. \quad (12)$$

З метою опису шумових характеристик системи ФАПЧ використовують абсолютний часовий джитер, який визначається відношенням

$$T_{\text{abs}}(N)=\sum_{n-1}^{N}\left(T_n-\bar{T}\right). \quad (13)$$

Абсолютний часовий джитер є функцією числа періодів, що пройшли з початку стеження. Згідно з (13) значення абсолютного часового джитера вільного генератора необмежено зростає зі збільшенням числа періодів. Невизначеність перемикання такого генератора в критичний момент часу впливає на всі наступні перемикання.

Системи ФАПЧ обмежують абсолютний часовий джитер змінної частоти коливань перестроюваного генератора. У цьому разі $T_{\text{abs}}(N)$ залежить від смуги пропускання системи ФАПЧ [6 – 10]:

$$\Delta T_c(N)=\lim_{N\to\infty}\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=t}^{N}\Delta T_n^2}\,. \quad (14)$$

Величина $\Delta T_c(N)$ не несе ніякої інформації про динаміку коливань генератора. Остання описується міжперіодним джитером

$$\Delta T_{cc}(N)=\lim_{N\to\infty}\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(T_{n+1}-T_n\right)_n^2}\,. \quad (15)$$

Величина $\Delta T_{cc}(N)$ описує короткочасну динаміку коливань генератора. Різниця між джитером періоду й міжперіодним джитером полягає в тому, що джитер періоду порівнює період коливання, що спостерігається, із середнім значенням періоду коливань T. за весь час спостереження. Міжперіодний джитер порівнює період спостережуваного коливання з періодом попереднього коливання.

З метою аналітичного знаходження міжперіодного джитера необхідно використати математичні залежності (16) – (18).

Автокореляційна функція відхилення двох періодів

$$C\Delta T_{(m)}(m)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(T_{n+1}\cdot T_n\right) \quad (16)$$

Для значення *m*, рівного нулю, отримаємо

$$C_{\Delta t}(0)=\Delta T_c^2\,. \quad (17)$$

Якщо ж значення *m* прямує до нескінченності, то

$$\Delta T_{cc}^2=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(T_{n+1}-T_n\right)^2=2C_{\Delta T(0)}-2C_{\Delta T(I)}\,. \quad (18)$$

У (16) – (18) враховується, що

$$\begin{aligned}C_{\Delta T(0)}&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(T_{n+1}\right)^2\\ C_{\Delta T(0)}&-\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n+1}^{N}\left(T_n\right)^2\\ C_{\Delta T(0)}&-\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n+1}^{N}\left(T_n\cdot T_{+1}\right)^2\end{aligned} \quad (19)$$

Тривала динаміка, пов'язана з $\frac{1}{f}$ – шумом, не описується міжперіодним джитером правильно. Щоб врахувати залежність абсолютного джитера від $1/f$ -шуму використовується емпіричний вираз

$$T_{\grave{a}bs}(t = N \cdot \bar{T}) = c.\sqrt{t + k \cdot t} \quad , \qquad (20)$$

де c і k – деякі константи.

Внесок $\frac{1}{f}$-шуму в значення абсолютного часового джитера помітно на інтервалах часу, більших ніж $t_{гран.} = 1/f_{гран.}$, де $t_{гран.}$ – гранична частота цього шуму. Це означає, що абсолютний часовий джитер, отриманий на короткому інтервалі часу, не буде враховувати впливу $1/f$-шуму.

На інтервалі часу, меншому ніж $t_{гран.}$, абсолютний часовий джитер визначається першим складником у виразі (19). Він враховує тільки некорельовані між собою джерела шуму.

У [5, 6, 8–10] показано, що у разі наявності тільки некорельованих джерел шуму справедливе співвідношення

$$T_{\grave{a}bs}(t = N \cdot \bar{T}) - c.\sqrt{m} \cdot \square T_c(N) = \sqrt{t \cdot f_{osc}} \cdot \square T_c(N) \qquad (21)$$

де $f_{osc} = 1/\bar{T}$ – частота коливань генератора.

У разі наявності тільки некорельованих між собою джерел шуму для джитера періоду й міжперіодного джитера справедлива нерівність

$$\square T_{cc}(N) = \sqrt{2} \cdot \square T_c(N). \qquad (22)$$

Джитер періоду і міжперіодний джитер описують малі флуктуації фази коливань кільцевого генератора. Викликані ними флуктуації частоти коливань $\square\omega$ потраплять до смуги пропускання системи ФАПЧ і не будуть відфільтровані. Флуктуації частоти коливань, що викликані дією $1/f$ – шуму, виявляться за межами смуги пропускання навіть безфільтрової системи ФАПЧ і не впливають на її шумові характеристики. У разі розробки системи ФАПЧ для систем синхронізації процесорів найважче визначити шумові характеристики в малих флуктуаціях фази.

Оцінка часового джитера системи ФАПЧ. У ряді випадків існує необхідність оцінки часового джитера, виходячи зі спектральної щільності фазового шуму [9, 10]. Нехай моменти часу $^3 \cdot T.$, де $^3 =$ 0, ..., n є моментами початку ^{3}-го коливання генератора. Тут $T.$ – значення періоду коливань генератора або період коливань генератора, на який не впливає дія джерел шуму.

Під дією джерел шуму період коливань генератора буде змінюватися. Відхилення періоду коливань при наявності джерела шуму від номінального значення $T.$ позначається через $\varphi_0, ..., \varphi_n$. Період коливань генератора визначаємо таким чином:

$$T = \left[n \cdot \bar{T} + \varphi_i \right] - \left[(n-1) \cdot T + \bar{\varphi}_{i-1} \right] \qquad (23)$$

.

У режимі синхронізму система ФАПЧ буде змінювати значення відхилення періоду за рахунок перестройки частоти так, що математичне сподівання значень відхилень буде дорівнювати нулю:

$$E\{\varphi_1\} = 0.$$

Розглянемо інтервал часу

$$\square T = T_n - T_0 = n \cdot \bar{T} + \varphi(T_n) - \varphi(T_0) \qquad (24)$$

де T_n і T_0 – моменти часу, що відповідають початку n-го нульового такту.

Так як $E\{\varphi_1\} = 0$, то

$$E\{\square T\} = n \cdot \bar{T}. \qquad (25)$$

Часовий джитер визначимо так:

$$\sigma^2_{\square r} = \frac{1}{\omega_0^2}\left(E\left\{ \left(\square T - E\{\square T\} \right)^2 \right\} \right). \qquad (26)$$

Виконавши перетворення з (25) і (22), отримаємо

$$\sigma^2_{\square r} = \frac{1}{\omega_0^2}\left(E\left\{ (\varphi(T_n) - \varphi(T_n))^2 \right\} \right) \qquad (27)$$

$$\sigma^2_{\square r} = \frac{1}{\omega_0^2}\left(E\left\{ \varphi(T_n)^2 \right\} + E\left\{ \varphi(T_0)^2 \right\} - E\{\varphi(T_0)\varphi(T_n)\} \right) \qquad (28)$$

Співвідношення (19) можна представити в іншому вигляді.

Функцію $\varphi(\grave{O})$ можна вважати стаціонарною в широкому сенсі,

$$C_\varepsilon(0) = E\left\{ \varphi(T_n)^2 \right\} = E\left\{ \varphi(T_0)^2 \right\}, \qquad (29)$$

$$C_\varepsilon(\square T) = E\{\varphi(T_0)\varphi(T_n)\}$$

де $C_\varepsilon(0)$ і $C_\varepsilon(\square T)$ – функції автокореляції.

З урахуванням (29) отримаємо

$$\sigma^2_{\square T} = \frac{2}{\omega_0^2} \cdot \left[C\varepsilon(0) - C\varepsilon(\square T) \right] \qquad (30)$$

За допомогою теореми Віннера – Хінчина можна виразити функцію автокореляції через спектральну щільність фазового шуму $S_\varepsilon(\omega)$ [9]:

$$C_\varepsilon(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_\varepsilon(\omega)\, d\omega, \qquad (31)$$

$$\tilde{N}\varepsilon(\square T) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_\varepsilon(\omega) e^{j\omega\square T}\, d\omega. \qquad (32)$$

Підставляючи (31), (32) в (30), отримаємо

$$\sigma^2_{\square T} = \frac{8}{\omega_0^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left[S_\varepsilon(\omega) e^{j\omega\square T} \right] d\omega. \qquad (33)$$

Звідки

$$\sigma^2_{\square T} = \frac{8}{\omega_0^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} S_\varepsilon(\omega)\left[1 - e^{jw\square T}\right] d\omega = \frac{8}{\omega_0^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} S_\varepsilon(\omega) \sin\left(\frac{\omega\square T}{2}\right) dw\,. \qquad (34)$$

Співвідношення (34) встановлює зв'язок часового джитера вихідних коливань генератора, який характеризується значенням стандартного відхилення $\sigma^2_{\square T}$ із спектральною щільністю потужності фазового шуму цих коливань. У розглянутому випадку $\sigma^2_{\square T}$ – міжперіодний джитер [6, 10]. Кількісно оцінити міжперіодний джитер $\sigma^2_{\square T}$ вихідних коливань повністю цифрової системи ФАПЧ можна, якщо замість $S_\varepsilon(\omega)$ використати $S_{\hat{O}\grave{A}\ddot{I}\times}(\omega)$.

Висновок

З метою опису шумових характеристик системи фазового автопідстроювання частоти використовують абсолютний часовий джитер, який є функцією числа періодів, що пройшли з початку моменту стеження. Значення абсолютного часового джитера для вільного генератора необмежено зростає зі збільшенням числа періодів. Невизначеність переключення такого генератора в критичний момент часу впливає на всі наступні переключення, тому оцінка часового джитера системи ФАПЧ необхідна для знаходження часової нестабільності періоду коливань повністю цифрової системи фазового автопідстроювання частоти за відомим значенням спектральної щільності потужності фазового шуму вихідних коливань цієї системи.

Список літератури

1. *Системы* фазовой автоподстройки частоты / В. В. Шахгильдян, А. А. Ляховкин; под ред. В. В. Шахгильдяна. – М.: Связь, 1972. – 220 с.
2. *Kroupa V.* Phase Lock Loops and Frequensy Synthesis. — Chichestes: John Wiley & Sons Ltd., 2003.
3. *Комбинированная* система фазовой автоподстройки частоты. В 3-х. Ч. 3. Показатели качества системы / Г. Ф. Зайцев, В. Л. Булгач, А. П. Полоневич, Н. В. Градобоева // Зв'язок. – 2012. – № 3. – С. 64–68.
4. *Системы* фазовой синхронизации с элементами дискретизации / Под ред. В. В. Шахгильдяна. – М. : Радио и связь, 1989.
5. *Стеклов В. К.* Анализ нелинейных систем фазовой автоподстройки / В. К. Стеклов, В. В. Мирошников // Радиотехника. – 2004. – № 138. – С. 105–110.
6. *Lee B.-J.* A 2.5-10Gb/s CMOS transceiver with alternating edge sampling phase detection for loop characteristic stabilization / Lee B-J et al // ISSCC Dig. Tech. Papers. – 2003. – N 2. – P. 76–77.
7. *Fast* Frequency Acquisition Phase-Frequency Detectors for GSa/s Phase-Locked Loops / А. П. Бондарєв et al. // EEE J. Solid-State Circuits. – 2002. – Vol. 37; N. 10. – P. 1331–1334.
8. *Nash G.* Phase-Locked Loop Design / *G. Nash* // Fundamentals Document Number: AN535 Rev. 1.0. – 02/2006.
9. *Mansuri M.* A low-power lovv-jitter adaptive bandwidth PLL and clock buffer / *Mansuri M. and Yang. C.-K.* // ISSCC Dig. Tech. Papers. – 2009. – N 2. – P. 430–431.
10. *A low-power* multiplying DLL for lovv-jitter multigigahertz clock generation in highly integrated digital chips / Farjad-Rad R. et al. // IEEE J. of Solid StateCircuits. – 2002. – Vol. 37; N 12. – P. 1804–1812.