УДК 623.412

Т. Е. АЛЕКСАНДРОВА,
доктор технических наук
(Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков)

Метод главной координаты в теории стабилизируемых систем

Предлагается метод параметрического синтеза стабилизатора линейного объекта, основанный на использовании понятия «главной координаты» стабилизируемого объекта.

Пропонується метод параметричного синтезу стабілізатора лінійного об'єкта, який засновано на використанні поняття «головної координати» об'єкта, що стабілізується.

Понятие «главная координата» по отношению к стабилизируемому объекту впервые было введено в работе [1]. Под «главной координатой» будем понимать координату, в наибольшей мере характеризующую поведение стабилизируемого объекта. Изменение главной координаты в стабилизируемом процессе определяет значение функционала качества, вычисленного при решениях математической модели возмущенного движения замкнутой системы стабилизации. Для стабилизируемых объектов и, в частности, объектов военного назначения (танковых и корабельных пушек, самолетов, ракет различного класса) главной координатой обычно является угол отклонения стабилизируемого объекта от заданного направления, а основным требованием к стабилизатору является требование точности стабилизации объекта, которое качественно оценивается значением интегрального квадратичного функционала

$$I = \int_0^T \varphi^2(t)dt, \qquad (1)$$

вычисленного на решениях замкнутой системы стабилизации. В соотношении (1) через $\varphi(t)$ обозначена главная координата стабилизируемого объекта; T – время анализа качества замкнутой системы стабилизации.

Если предположить, что возмущенное движение замкнутой системы стабилизации описывается линейным векторно-матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{X}(t) = A(\alpha)X(t) \qquad (2)$$

где $X(t)$ – n-мерный вектор состояния; α – m-мерный вектор варьируемых параметров стабилизатора, то задача параметрического синтеза стабилизатора состоит в отыскании вектора $\alpha \in G_\alpha$, обеспечивающего на решениях системы (2) минимум интегрального квадратичного функционала

$$I(\alpha) = \int_0^T \langle X(t,\alpha), QX(t,\alpha)\rangle dt,; \qquad (3)$$

где G_α – множество допустимых векторов α; Q – симметрическая сильвестрова матрица.

В работе [1] показано, что сформулированная задача параметрического синтеза на множестве G_α имеет единственное решение, иными словами, функционал (3), вычисленный на решениях системы (2) на множестве G_α, имеет единственный минимум.

В работе [2] показано, что значение функционала (3) составляет

$$I(\alpha) = \langle X(0), K(\alpha)X(0)\rangle, \qquad (4)$$

где квадратная симметрическая матрица $K(\alpha)$ является решением линейного матричного алгебраического уравнения Ляпунова

$$K(\alpha)A(\alpha) + A^T(\alpha)K(\alpha) + Q = 0, \qquad (5)$$

а символ T означает транспонирование матрицы.

Решение сформулированной выше задачи параметрического синтеза стабилизатора сводится к поиску минимакса квадратичной формы (4)

$$I^* = \min_{\alpha \in G_\alpha} \max_{X(0) \in G_X} \langle X(0), K(\alpha) X(0) \rangle, \qquad (6)$$

где G_X – область допустимых значений вектора $X(0)$.

Поиск минимакса квадратичной формы (4) является весьма непростой задачей, для решения которой требуются современные сертифицированные программные продукты. В связи с этим **целью** настоящей статьи является использование понятия «главной координаты» стабилизируемого объекта для упрощения решения задачи параметрического синтеза стабилизатора.

Без ограничения общности предположим, что главной координатой, характеризующей поведение замкнутой системы стабилизации, является координата $x_1(t)$. Обычно при исследовании процессов стабилизации задают следующие начальные условия системы (2): $x_1(0) = x_{10}$; $x_2(0) = x_3(0) = ... = x_n(0) = 0$, т. е. ненулевое начальное условие имеет место только лишь по главной координате. Тогда квадратичная форма (4) принимает следующий вид:

$$I(\alpha) = k_{11}(\alpha) x_{10}^2. \qquad (7)$$

В связи с тем, что оптимальное значение аргумента, обеспечивающего минимум некоторой функции, не зависит от постоянного множителя в соотношении, описывающем функцию, то соотношение (7) может быть представлено в виде

$$I(\alpha) = k_{11}(\alpha), \qquad (8)$$

где $k_{11}(\alpha)$ – первый главный диагональный элемент матрицы $K(\alpha)$, а задача поиска минимакса квадратичной формы (4) заменяется задачей поиска минимума функции (8)

$$I^* = \min_{\alpha \in G_\alpha} k_{11}(\alpha), \qquad (9)$$

что значительно упрощает решение задачи параметрического синтеза.

В качестве множества G_α обычно используется область устойчивости в m-мерном пространстве компонент вектора α.

В качестве примера рассмотрим замкнутую систему наведения и стабилизации танковой пушки, возмущенное движение которой описывается линейными дифференциальными уравнениями из работы [1]:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}(t) &= -\frac{k_м k_д}{I_п} \beta(t); \\ \ddot{\beta}(t) &= -\frac{1}{T_1^2}\beta(t) - \frac{T_2}{T_1^2}\dot{\beta}(t) + \frac{k_e k_y}{cT_1^2} k_\varphi \varphi(t) + \frac{k_e k_y}{cT_1^2} k_c k_{\dot{\varphi}} \dot{\varphi}(t), \end{aligned} \qquad (10)$$

где $\varphi(t)$ – угол поворота оси канала ствола танковой пушки относительно направления на цель; $\beta(t)$ – угол поворота якоря электрогидравлического усилителя относительно нейтрального положения; $I_п$ – момент инерции пушки относительно оси цапф; T_1, T_2 – постоянные времени электромагнита управления; $k_м$, $k_д$, k_e, k_y, k_c, – коэффициенты пропорциональности; c – коэффициент жесткости пружины якоря; k_φ, $k_{\dot{\varphi}}$ – варьируемые параметры стабилизатора, подлежащие выбору.

Производя замену переменных $x_1(t) = \varphi(t)$; $x_2(t) = \dot{\varphi}(t)$; $x_3(t) = \beta(t)$; $x_4(t) = \dot{\beta}(t)$, систему (10) и функционал (1) записываем в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k_м k_д}{I_п} x_3(t); \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t); \\ \dot{x}_4(t) &= \frac{k_e k_y}{cT_1^2} k_\varphi x_1(t) + \frac{k_e k_y}{cT_1^2} k_c k_{\dot{\varphi}} x_2(t) - \frac{1}{T_1^2} x_3(t) - \frac{T_2}{T_1^2} x_4(t), \end{aligned} \qquad (11)$$

$$I(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) = \int_0^T x_1^2(t) dt. \qquad (12)$$

Собственная матрица системы (11)

$$A(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_м k_д}{I_п} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_e k_y}{cT_1^2} k_\varphi & \frac{k_e k_y}{cT_1^2} k_c k_{\dot{\varphi}} & -\frac{1}{T_1^2} & -\frac{T_2}{T_1^2} \end{bmatrix}. \qquad (13)$$

Матрица квадратичной формы подынтегральной функции функционала (12)

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (14)$$

Рассмотрим характеристическое уравнение замкнутой системы (11)

$$\text{let}[A(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) - Es] = \det \begin{bmatrix} -s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -s & -\frac{k_м k_д}{I_п} & 0 \\ 0 & 0 & -s & 1 \\ \frac{k_e k_y}{cT_1^2} k_\varphi & \frac{k_e k_y}{cT_1^2} k_c k_{\dot{\varphi}} & -\frac{1}{T_1^2} & -\frac{T_2}{T_1^2} - s \end{bmatrix} = 0$$

или

$$s^4 + \frac{T_2}{T_1^2} s^3 + \frac{1}{T_1^2} s^2 + \frac{k_м k_д k_e k_y}{cI_п T_1^2} k_c k_{\dot{\varphi}} s + \frac{k_м k_д k_e k_y}{cI_п T_1^2} k_\varphi = 0. \qquad (15)$$

Значения параметров танковой пушки с электрогидравлическим исполнительным органом составляют $I_п$ = 736,9 Н·м·с^2; $T_1 = 10^{-2}$ с; $T_2 = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$с; c = 100 Н·м; k_c = 0,2 с^2; $k_м = 0{,}6 \cdot 10^{-3}$ Н·м·Па$^{-1}$; $k_д = 1{,}228 \cdot 10^7$ Па; $k_a = 10^3$ Н·м·А$^{-1}$; k_y = 10 Ом.

Тогда характеристическое уравнение (15) записывается в виде

$$s^4 + 5s^3 + 10^4 s^2 + 0{,}2 \cdot 10^4 k_{\dot{\varphi}} s + 10^4 k_\varphi = 0. \qquad (16)$$

В плоскости варьируемых параметров стабилизатора $(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}})$ построим линии равной степени устойчивости [3], для чего в (16) произведем замену $s = \beta + j\omega$, выделим в полученном уравнении действительную и мнимую части, приравняем их к нулю и найдем коэффициенты k_φ и $k_{\dot{\varphi}}$:

$$k_\varphi = 3\cdot10^{-4}\beta^4 + 2\cdot10^{-4}\beta^2\omega^2 - 10^{-4}\omega^4 + 10^{-3}\beta^3 - 10^{-3}\beta\omega^2 + \omega^2 + \beta^2; \quad (17)$$
$$k_{\dot\varphi} = -2\cdot10^{-3}\beta^3 + 2\cdot10^{-3}\beta\omega^2 - 7{,}5\cdot10^{-3}\beta^2 + 2{,}5\cdot10^{-3}\omega^2 - 10\beta.$$

В плоскости варьируемых параметров $(k_\varphi, k_{\dot\varphi})$ с помощью соотношений (17) построим кривые при изменении ω от нуля до бесконечности для различных отрицательных значений β. При $\beta = 0$ построенная кривая представляет собой область устойчивости замкнутой системы стабилизации, а при $\beta_k < 0$, $(k = \overline{1,4})$ – линию равной степени устойчивости. При нахождении точки $(k_\varphi, k_{\dot\varphi})$ на этой кривой запас устойчивости системы составляет $\beta = \beta_k$ (рис. 1).

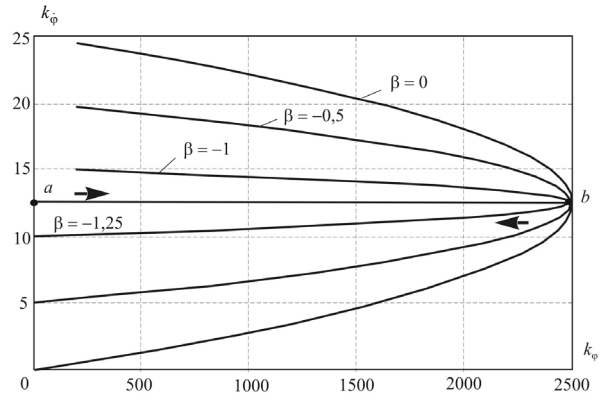

Рис. 1. Кривые равной степени устойчивости системы (11)

При β = −1,25 кривые равной степени устойчивости стягиваются в отрезок прямой, параллельной оси абсцисс, ограниченный точками a = 1,5613 и b = 2496,87. Если значения варьируемых параметров k_φ и $k_{\dot\varphi}$ выбраны на отрезке (a, b), то замкнутая система стабилизации имеет постоянный максимальный запас устойчивости. Всюду на отрезке (a, b) значение параметра $k_{\dot\varphi}$ постоянно и равно $k^*_{\dot\varphi} = 12{,}5$.

В системе (11) главной координатой является переменная $x_1(t)$, поэтому в качестве начальных условий выберем $x_1(0) = x_{10}$; $x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0$. Действительно, в момент $t = 0$ танковая пушка отклонена от направления на цель на угол x_{10}, а стабилизатор отключен, следовательно $x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0$. После выбора цели в момент $t = 0$ стабилизатор включается и происходит наводка оси канала ствола на цель. При выбранных начальных условиях значение функционала (12) определяется формулой (8), где вектор варьируемых параметров

$$\alpha = [k_\varphi \; k_{\dot\varphi}]^T.$$

Квадратную симметричную матрицу $K(k_\varphi, k_{\dot\varphi})$ будем отыскивать в виде

$$K(k_\varphi, k_{\dot\varphi}) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Подставим матрицы (13), (14) и (18) в матричное уравнение (5), которое эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных элементов матрицы (18):

$$\begin{aligned}
&2\cdot10^3 k_\varphi k_{14} + 1 = 0;\\
&k_{11} + 0{,}2\cdot10^3 k_{\dot\varphi} k_{14} + 10^3 k_\varphi k_{24} = 0;\\
&-10k_{12} - 10^{-4}k_{14} + 10^3 k_\varphi k_{34} = 0;\\
&k_{13} - 50k_{14} + 10^3 k_\varphi k_{44} = 0;\\
&k_{12} + 0{,}2\cdot10^3 k_{\dot\varphi} k_{24} = 0;\\
&-10k_{22} - 10^{-4}k_{24} + k_{13} + 0{,}2\cdot10^3 k_{\dot\varphi} k_{34} = 0;\\
&k_{23} - 50k_{24} + k_{14} + 0{,}2\cdot10^3 k_{\dot\varphi} k_{44} = 0;\\
&-10k_{23} - 10^4 k_{34} = 0;\\
&k_{33} - 50k_{34} - 10^3 k_{24} - 10^4 k_{44} = 0;\\
&k_{34} - 50k_{44} = 0.
\end{aligned} \quad (19)$$

Из системы (19) получаем

$$k_{11}(k_\varphi, k_{\dot\varphi}) = \frac{k_{\dot\varphi}}{k_\varphi} + \frac{10^3 k_{\dot\varphi} + 2{,}5k_\varphi - 25\cdot10^3}{40k^2_{\dot\varphi} - 10^3 k_{\dot\varphi} + 2{,}5k_\varphi}. \quad (20)$$

В соотношении (20) положим $k_{\dot\varphi} = 12{,}5$. В результате имеем

$$k_{11}(k_\varphi) = \frac{12{,}5}{k_\varphi} + \frac{2{,}5k_\varphi + 12{,}5\cdot10^3}{2{,}5k_\varphi - 6{,}25\cdot10^3}. \quad (21)$$

Отыщем минимум функции (21) по k_φ, для чего продифференцируем правую часть (21) по k_φ и результат дифференцирования приравняем нулю:

$$k^2_\varphi + 25{,}1k_\varphi - 3\cdot10^4 = 0. \quad (22)$$

Решение квадратичного уравнения (22) позволяет получить на отрезке (a, b) точку $k_\varphi = 161{,}1$, обеспечивающую минимум функции (21). На рис. 2 показаны сечения функции двух переменных (20) по переменной k_φ при различных постоянных значениях переменной $k_{\dot\varphi}$.

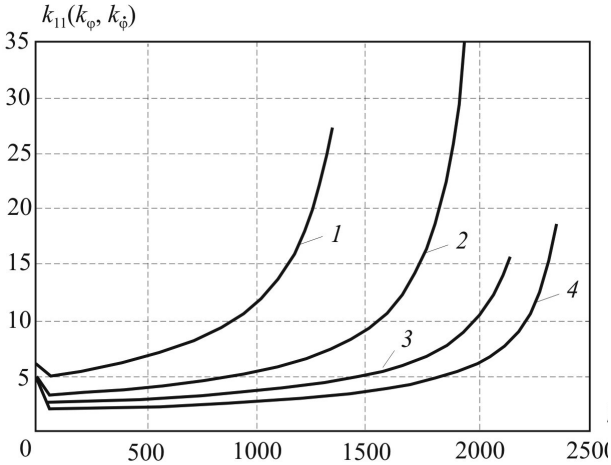

Рис. 2. Сечения функции (20) при $k_{\dot\varphi} = 5$ (кривая *1*); $k_{\dot\varphi} = 7{,}5$ (кривая *2*); $k_{\dot\varphi} = 10$ (кривая *3*); $k_{\dot\varphi} = 12{,}5$ (кривая *4*)

Анализ рис. 2 позволяет сделать вывод, что функционал (7), вычисленный на решениях системы (11),

имеет единственный минимум в области устойчивости замкнутой системы (11).

Заключение. Предложенный метод параметрического синтеза стабилизатора линейного объекта, основанный на использовании понятия «главной координаты» стабилизируемого объекта, позволяет получить значения варьируемых параметров стабилизатора, обеспечивающих максимальный запас устойчивости замкнутой системе стабилизации и минимум интегральному квадратичному функционалу, являющемуся количественной оценкой точности замкнутой системы.

Список литературы

1. *Александрова, Т. Е.* О единственности решения задачи параметрического синтеза линейной динамической системы с интегральным квадратичным критерием оптимальности [Текст] / Т. Е. Александрова // Системи обробки інформації. – Харків : Харківський університет Повітряних Сил. – 2013. – Вип. 7 (114). – С. 116–120.
2. *Александров, Е. Е.* Автоматизированное проектирование динамических систем с помощью функций Ляпунова [Текст] / Е. Е. Александров, М. В. Бех. – Харьков : Основа, 1993. – 113 с.
3. *Орурк, И. А.* Новые методы синтеза линейых и некоторых нелинейных динамических систем [Текст] / И. А. Орурк. – М.-Л. : Наука, 1965. – 207 с.

Рецензент Д. О. Волонцевич, д-р техн. наук, проф. (Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»)