УДК 681.5, 621.396

С. В. ГЕРАСИМОВ,
кандидат технічних наук,

С. В. КУКОБКО, *кандидат технічних наук,*

Є. С. РОЩУПКІН, *кандидат технічних наук*

(Науковий центр Повітряних Сил Харківського університету Повітряних Сил, м. Харків),

О. О. РАССТРИГІН, *доктор технічних наук*

(Центральний науково-дослідний інститут озброєння та військової техніки Збройних Сил України, м. Київ)

Синтез вимірювальних сигналів для визначення технічного стану систем автоматичного управління

Запропоновані та досліджені критерії синтезу оптимальних вимірювальних сигналів для контролю параметрів систем автоматичного управління. Обґрунтовано, що розглянуті критерії зводяться до єдиного, який пропонується використовувати для знаходження параметрів оптимального вхідного вимірювального сигналу, що застосовується для визначення технічного стану систем автоматичного управління.

Предложены и исследованы критерии синтеза оптимальных измерительных сигналов для контроля параметров систем автоматического управления. Обосновано сведение рассмотренных критериев к единому, который предлагается использовать для нахождения параметров оптимального входного измерительного сигнала, применяемого для определения технического состояния систем автоматического управления.

Експлуатація за технічним станом передбачає проведення операцій з визначення, діагностування та прогнозування реального (фактичного) стану системи автоматичного управління (САУ) протягом життєвого циклу. Для цього за допомогою засобів вимірювальної техніки проводять безперервний або періодичний контроль параметрів технічного стану САУ.

Основою визначення технічного стану САУ є дослідження її динамічних характеристик [1–3] за узагальненою схемою, зображеною на рис. 1. За цією схемою на вхід САУ діють відомим вимірювальним (тестовим, стимулюючим, випробувальним) сигналом $u(t)$, який формується генератором тестових сигналів *Г* і має певні характеристики. Під впливом вхідного вимірювального сигналу $u(t)$ на виході САУ утворюється вихідний сигнал (сигнал-відгук) $y(t)$ або реакція певної форми, залежно від форми вхідного сигналу та параметрів САУ. Вхідний вимірювальний сигнал $u(t)$ та вихідний сигнал $y(t)$ САУ подаються в аналізатор *А*, за допомогою якого визначаються параметри системи q_j, $j=1,N$, де *N* – кількість параметрів контролю системи, або апостеріорних параметрів z_i, $i=1,M$, *M* – кількість значень *i*-го параметра, що отримана після проведення контролю системи (апостеріорна кількість параметрів контролю), значення яких дозволяють визначити технічний стан системи.

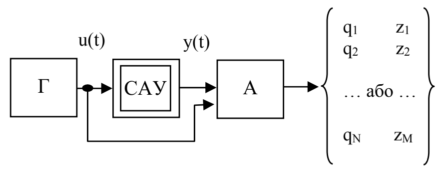

Рис. 1. Структурна схема контролю

При визначенні технічного стану САУ важливе місце займають методики та методи проведення контролю. Тому синтез оптимальних вхідних вимірювальних сигналів для дослідження динамічних характеристик САУ при її експлуатації за технічним станом є актуальною науковою проблемою.

Розглянемо САУ, математичний оператор $\Phi(\{u\})$ якої визначає її реакцію $y(t)$ у момент часу *t* на вхідний вимірювальний сигнал $u(t)$. Оператор $\Phi(\{u\})$ залежить від параметрів контролю САУ q_j і в загальному випадку може бути нелінійним. Отже, реакція системи є функцією від параметрів q_j і функціоналом від вхідного вимірювального сигналу $u(t)$: $Y = y(t, q_j, \{u\})$. За наявності адитивної завади $\xi(t)$ вихідний сигнал системи $x(t) = y(t) + \xi(t)$. Позначимо номінальні значення параметрів q_j через q_{ji}. При малих відхиленнях параметрів САУ q_j від номінальних значень q_{ji} сигнал неузгодження на виході системи $\Delta x = x - x_i$ залежно від моменту часу контролю можна записати у вигляді

$$\Delta x(t) = \sum_{j=1}^{N} d_j(t, \{u\}) q_j + \xi(t), \tag{1}$$

де $d_j(t, \{u\}) = \left.\dfrac{\partial \Delta y}{\partial q_j}\right|_{q_j = q_{ji}}$; $\Delta y = y - y_i$ – неузгодження реакції (сигналу-відгуку) САУ на вхідний вимірювальний сигнал $u(t)$; y, y_i – реакція (сигнал-відгук) САУ і номінальне значення реакції (сигналу-відгуку) відповідно.

Параметри контролю САУ q_j (або похибки параметрів системи $\Delta q_j = q_j - q_{ji}$) у загальному випадку є статистично залежними. Але необхідно враховувати, що наявність залежних параметрів призводить до надмірності контролю, тобто до зменшення оперативності та збільшення економічних витрат. Тому при обґрунтуванні методів контролю будемо вважати параметри контролю САУ стаціонарними та некорельованими із завадою. Згідно із цією умовою позначимо кореляційну матрицю величин Δq_j через $R_{qij} < \Delta q_i \; \Delta q_j >$, де знак $< >$ означає середнє значення за ансамблем величин Δq_j. Оскільки матриця R_{qij} є позитивно визначеною ($\sum_{\substack{i=1,\, j=1 \\ i \neq j}}^{N} R_{qij} \xi_i \xi_j > 0$ при будь-яких $\xi_j \neq 0$) і симетричною ($R_{qij} = R_{qji}$), то лінійним перетворенням перейдемо до нових змінних $\Delta q_j^{'}$, що будуть статистично незалежними та їх дисперсії будуть дорівнювати одиниці, тобто $R_{qij}^{'} < \Delta q_i^{'} \, \Delta q_j^{'} > \; \delta_j$, де δ_{ij} – символ Кронекера [4]. Тоді в незалежних змінних $\Delta q_j^{'}$ співвідношення (1) запишемо так:

$$\Delta x(t) = \sum_{j=1}^{N} a_j(t, \{\mathrm{u}\}) \Delta \mathrm{q}_j^{'} + \xi(t), \tag{2}$$

де $a_j(t, \{\mathrm{u}\}) = \left.\frac{\partial \Delta x}{\partial \mathrm{q}_j^{'}}\right|_{q_j^{'} = q_{ji}^{'}}$, $q_j^{'}$ – незалежні параметри контролю САУ.

При необхідності за допомогою співвідношення (2) можна повернутися до початкових статистично залежних змінних. Доведене відноситься й до змінних q_j, що також можна вважати статистично незалежними при подальших розрахунках.

Часто метою контролю САУ є вимірювання не самих параметрів q_j, а якоїсь функції від цих параметрів $Y = f(\mathrm{q}_1, q_2, ..., q_N)$, тобто визначення технічного стану системи за узагальненим параметром. Прикладом такої функції може бути будь-яка величина, що визначає кількісну оцінку запасу стійкості системи. Позначимо величини, значення яких необхідно отримати в результаті контролю (апостеріорні значення параметрів контролю), через z_i. Хоча значення параметрів z_i (при $M < N$) несуть менше інформації про систему, ніж повний набір параметрів q_j, однак у більшості випадків вдалий вибір відносно невеликої кількості апостеріорних параметрів z_i вважається достатнім для порівняно повної оцінки якості системи та, з іншого боку, може істотно спростити її контроль. У загальному випадку параметри z_i можуть співпадати з параметрами q_j. Тому повнота контролю Π системи залежить від кількості параметрів, що не підлягають контролю, тобто $\Pi = M/N$. Як правило, при виборі параметрів контролю САУ необхідно прагнути умови $\Pi \to 1$ [5].

При малих відхиленнях Δq_j параметрів системи q_j від номінальних значень q_{ji} величини z_i зв'язані з цими параметрами лінійною залежністю

$$z_i = \sum_{j=1}^{N} b_j q_j, \tag{3}$$

де $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, N}$, $M \leq N$; b_{ij} – матриця коефіцієнтів, яка залежить від характеристик САУ.

Відзначимо, що в загальному випадку матриця b_{ij} може не мати оберненої (це обов'язково буде при $N \neq M$). Величини z_i можна прийняти ортонормованими випадковими величинами, тобто $< z_i z_j >= \delta_{ij}$.

Метою контролю САУ є визначення величин z_i залежно від значень параметрів q_j (або параметрів неузгодження $\Delta x(t)$). Оскільки $\Delta x(t)$ є функціоналом від вхідного вимірювального сигналу $u(t)$, то значення z_i будуть залежати, з одного боку, від методу контролю, а з іншого боку – від параметрів вимірювального сигналу $u(t)$. Різні критерії будуть приводити до різних оптимальних вимірювальних сигналів $u_{опт}(t)$. При цьому виникає питання, якому з критеріїв потрібно віддати перевагу. Відзначимо, що при досить малій заваді практично всі вимірювальні сигнали рівноцінні, оскільки в цьому випадку, як видно з (2), знання функціонала $\Delta x(t)$ навіть у фіксовані моменти часу дозволяє достатньо точно визначити значення незалежних параметрів $\Delta q_j^{'}$, а отже, й величин z_i. Для цього потрібно розв'язати систему рівнянь (2), що записана для різних моментів часу відносно величин $\Delta q_j^{'}$. Тому задача вибору параметрів оптимального вимірювального сигналу САУ є актуальною тільки за досить великої завади. Іншими словами, той вимірювальний сигнал САУ, який буде оптимальним для великої завади, буде також оптимальним за будь-якого значення завади, бо за малої завади практично всі вимірювальні сигнали САУ є тією чи іншою мірою оптимальними.

Розглянемо основні критерії оптимізації параметрів вхідних вимірювальних сигналів САУ, до яких віднесемо максимум інформаційного показника, мінімум середньоквадратичної похибки, максимум чутливості, і обґрунтуємо, що за великої завади всі названі критерії зводяться до одного. Цей критерій може бути прийнятий як універсальний для будь-якої завади.

Інформаційний показник. Припустимо, що вихідний сигнал САУ вимірюється в точках $\{t_1, t_2, ..., t_m\}$, m – кількість точок вимірювання параметра z_i. Для спрощення подальших розрахунків уведемо векторні позначення.

Нехай вектор Q означає сукупність параметрів контролю САУ, $Q = \{q_1, q_2, ..., q_N\}$; вектор Z – сукупність величин, $Z = \{z_1, z_2, ..., z_M\}$, значення яких визначаються за результатами контролю САУ після впливу на неї вхідного вимірювального сигналу $u(t)$; вектор ΔX є сукупністю значень вихідного сигналу $\Delta x(t)$ САУ, $\Delta X = \{\Delta x(t_1), \Delta x(t_2), ..., x(t_m)\}$; відповідно вектор завад $\xi = \{\xi(t_1), \xi(t_2), ..., \xi(t_m)\}$. Тоді рівняння (2) і (3) запишемо у вигляді

$$\Delta X = AQ + \xi; \tag{4}$$

$$Z = BQ, \tag{5}$$

де A – матриця з елементами $a_{jk} = a_j(t_k)$, $k = \overline{1, m}$; B – матриця з елементами b_{ij}, при цьому, оскільки $< z_i z_j >= \delta_{ij}$, матриця B задовольняє співвідношенню

$$BB^T = E\,, \qquad (6)$$

де B^T – транспонована матриця; E – одинична матриця.

З метою проведення арифметичних операцій над матрицями введемо вектори $\zeta = \{\Delta y(t_1), \Delta y(t_2), ..., \Delta y(t_m); z_1, z_2, ..., z_M\}$ і $\widetilde{\xi} = \left\{\xi(t_1), \xi(t_2), ..., \xi(t_m); \underbrace{0, ..., 0}_{M}\right\}$, розмір яких $m + M$, і матрицю $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Тоді з (4) і (5) отримаємо

$$\zeta = CQ + \widetilde{\xi}\,, \qquad (7)$$

а взаємна інформація між величинами ΔX і Z

$$I(\Delta X, Z) = \int_i^{m+M} p(\Delta X, Z) \log \frac{p(\Delta X, Z)}{p(Z) p(\Delta X)} dZ d\Delta X =$$

$$= H(\Delta X) + H(Z) - H(\zeta), \qquad (8)$$

де $p(\Delta X, Z)$ – спільна імовірність появи величин $\Delta X, Z$; $p(Z), p(\Delta X)$ – імовірності появи величин Z, ΔX відповідно; $H(\Delta X)$, $H(Z)$, $H(\zeta)$ – ентропії величин ΔX, Z, ζ відповідно, що визначаються за формулами

$$H(\Delta X) = -\int_i^{m+M} p(\Delta X) \log p(\Delta X) d\Delta X\,;$$

$$H(Z) = -\int_i^{m+M} p(Z) \log p(Z) dZ; \qquad (9)$$

$$H(\zeta) = -\int_i^{m+M} p(\zeta) \log p(\zeta) d\zeta\,,$$

де $p(\zeta)$ – імовірність появи величини ζ.

Якщо величини Q розподілені за нормальним законом, то і величини ΔX, Z, ζ відповідно до (4), (5), (6) також будуть розподілені за нормальним законом. Позначимо кореляційні матриці цих величин відповідно

$$(R_{\Delta X})_{ij} = <\Delta X_i\, \Delta X_j>; \ (R_Z)_{ij} = <Z_i\, Z_j>; \qquad (10)$$
$$(R_\zeta)_{ij} = <\zeta_i\, \zeta_j>.$$

Якщо σ^2 є дисперсією завади, то ці кореляційні матриці з урахуванням (4), (5), (6) запишемо у вигляді

$$R_{\Delta X} = AA^T + \sigma^2 E\,;$$
$$R_Z = BB^T = E\,; \qquad (11)$$
$$R_\zeta = \begin{pmatrix} R_{\Delta X} & AB^T \\ BA^T & E \end{pmatrix}.$$

Використовуючи відомі вирази для ентропії нормального закону [4], отримаємо

$$I(\Delta X, Z) = \frac{1}{2} \log \frac{\det R_{\Delta X}}{\det R_\zeta}\,. \qquad (12)$$

Застосовуючи формулу Гауса для розрахунку $\det R_\zeta$, знаходимо

$$\det R_\zeta = \det R_{\Delta X} \det\left(E - BA^T R_{\Delta X}^{-1} AB^T\right), \qquad (13)$$

і для функції $I(\Delta X, Z)$ остаточно маємо

$$I(\Delta X, Z) = -\frac{1}{2} \log \det\left(E - BA^T R_{\Delta X}^{-1} AB^T\right). \qquad (14)$$

За великої завади

$$R_{\Delta X}^{-1} \approx \frac{E}{\sigma^2} + 0\left(\frac{1}{\sigma^4}\right), \qquad (15)$$

де $0\left(\frac{1}{\sigma^4}\right)$ – нульова матриця з діагональними елементами $\frac{1}{\sigma^4}$, тому з (14) отримаємо

$$I(\Delta X, Z) = -\frac{1}{2} \log\left[1 - \frac{1}{\sigma^2} Sp\left(BA^T AB^T\right)\right] \approx$$

$$\approx \frac{1}{2\sigma^2} Sp\left(BA^T AB^T\right) = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{M} \left(\sum_{j=1}^{N} b_{ij} a_{kj}\right)^2.$$

Позначимо $\Phi(\{u\}) = \sum_{k,i}\left(\sum_j b_{ij} a_{kj}(\{u\})\right)^2$. Тоді інформаційний критерій вибору оптимального вимірювального сигналу $u_{опт}(t)$, тобто сигналу, який дозволяє отримати максимальну інформацію про величини z_i, зводиться до умови

$$\Phi(\{u_{опт}\}) = \sup_{\{u\}} \Phi(\{u\})\,. \qquad (17)$$

Показник середньоквадратичної похибки. Позначимо через ε середньоквадратичну похибку (СКП) оцінки z_i^o величин z_i:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{M} <\left(z_i - z_i^o\right)^2>. \qquad (18)$$

Як відомо, мінімальне значення СКП оцінки z_i^o забезпечується, якщо як z_i^o застосувати апостеріорне середнє значення z_i, тобто

$$z_i^o = \int_{k=1}^{m} z_{ik}\, p(Z|\Delta X) dz\,, \qquad (19)$$

де $p(Z|\Delta X) = p(Z, \Delta X) / p(\Delta X)$;

$$p(Z, \Delta X) \equiv p(\zeta) = (2\pi)^{-(m+M)/2} \left|\det R_\zeta\right|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\zeta R_\zeta^{-1} \zeta\right)\right]; \qquad (20)$$

$$p(\Delta X) = (2\pi)^{-m/2} \left|\det R_{\Delta X}\right|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\Delta X R_{\Delta X}^{-1} \Delta X\right)\right].$$

Після проведення розрахунків величини $\partial(Z|\Delta X)$ отримаємо

$$p(Z|\Delta X) = (2\pi)^{-M/2} \left|\det H\right|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(ZH^{-1}Z\right)\right], \qquad (21)$$

де $H = E - BA^T R_{\Delta X}^{-1} AB^T$.

При цьому для СКП оцінки z_i^o знаходимо

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{M} < \Delta z_i^2 > = \sum_{i=1}^{M} H_{ii} = M - Sp\left(BA^T R_{\Delta X}^{-1} AB^T\right). \quad (22)$$

Оптимальний сигнал $u_{onm}(t)$ САУ, який мінімізує СКП ε оцінки z_i^o, визначимо з умови

$$\varepsilon_{\min}(\{u_{onm}\}) = \underset{\{u\}}{Jnf}\, \varepsilon(\{u_{onm}\}). \quad (23)$$

За достатньо великої завади, враховуючи (15), формула (23), що визначає параметри оптимального вимірювального сигналу $u_{onm}(t)$ САУ, набуває вигляду

$$\varepsilon_{\min}(\{u_{onm}\}) = M - \frac{1}{\sigma^2} \sup_{\{u\}} \mathrm{Sp}\left(BA^T AB^T\right), \quad (24)$$

що еквівалентно співвідношенню (17).

Показник чутливості. Повернемося до (2), (3) і розрахуємо похідну величини $\Delta y(t)$ в напрямку нормалі до гіперплощини $z_i = \mathrm{const}$, тобто коефіцієнт чутливості величини $\Delta y(t)$ по відношенню до зміни величини z_i. У координатах $\{q_1, q_2, ..., q_N\}$ величини $a_j(t)$ є складовими градієнта функції $\Delta y(t)$: $\nabla[\Delta y(t)] = \{a_1(t), a_2(t), ..., a_N(t)\}$. Згідно з (6) величини b_{ij} є складовими одиничного вектора нормалі до гіперплощини $z_i = \mathrm{const}$: $n_i = \{b_{i1}, b_{i2}, ..., b_N\}$. Тому похідна функції $\Delta y(t)$ у напрямку нормалі n_i дорівнює скалярному добутку

$$\frac{\partial \Delta y}{\partial z_i} = \left[n_i \nabla(\Delta y)\right] = \sum_{j=1}^{N} b_j\, a_j(t). \quad (25)$$

Позначимо цю похідну через $B_i(t)$, $B_i(t) = \sum_{j=1}^{N} b_j\, a_j(t)$.

Введемо середньоквадратичну чутливість, яка визначається за всіма результатами вимірювань та за всіма величинами z_i за формулою

$$S = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{M} B_i^2(t_k). \quad (26)$$

Тоді для оптимального вхідного вимірювального сигналу $u_{onm}(t)$ САУ, який забезпечує максимальне значення середньоквадратичної чутливості, запишемо

$$S(\{u_{onm}\}) = \sup_{\{u\}} \mathrm{S}(\{u\}). \quad (27)$$

Як видно з (27), умова для визначення параметрів оптимального вхідного вимірювального сигналу $u_{onm}(t)$ САУ, яка базується на критерії максимуму чутливості, еквівалентна співвідношенню (24), що визначає мінімум СКП, і співпадає з умовою (17), яка відповідає максимуму інформаційного показника.

Висновки. Проведений аналіз свідчить, що критерії максимуму інформації, мінімального значення середньоквадратичної похибки та максимальної середньоквадратичної чутливості за достатньо великої завади зводяться до єдиного критерію визначення оптимального вхідного вимірювального сигналу $u_{onm}(t)$ САУ

$$\Phi(\{u_{onm}\}) = \sup_{\{u\}} \Phi(\{u\}) = \sup_{\{u\}} \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{M} B_i^2(t_k, \{\mathrm{u}\}), \quad (28)$$

де $B_i(t_k, \{\mathrm{u}\}) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \frac{\partial \Delta y}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^{N} b_j\, a_j(t_k, \{\mathrm{u}\})$.

Оскільки за малої завади оптимальним є вимірювальний сигнал, який породжує неособливу матрицю $a_j(t_k)$ (ця умова необхідна для розв'язання системи рівнянь (2) при $\xi \to 0$), то оптимальним буде сигнал, отриманий, наприклад, за допомогою критерію максимального значення інформаційного показника (17). Це дозволяє застосувати критерій (17) для визначення параметрів оптимального вхідного вимірювального сигналу САУ за довільної завади.

Відзначимо, що при безперервному вимірюванні сигналу на виході САУ суму по всіх точках t_k можна замінити інтегралом за часом контролю. При цьому функціонал $\Phi(\{u\})$ перейде у функціонал

$$\Phi_1(\{u\}) = \int_0^T \sum_{i=1}^{M} B_i^2(t, \{u\}) dt. \quad (29)$$

Як було показано вище, за умови, що матриця b_{ij} має обернену (6), виконуються рівності $B^T = B^{-1}$ і $B^T B = E$. При цьому $\mathrm{Sp}(BA^T AB^T) = Sp(A^T A)$, і функціонал Φ дещо спрощується:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} a_j^2(t_k, \{\mathrm{u}\}). \quad (30)$$

З іншого боку, з (2) видно, що середньоквадратичне значення вихідного вимірювального сигналу САУ

$$\sum_{k=1}^{m} < \left[\Delta x(t_k)\right]^2 > = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} a_j^2(t_k) + N\sigma^2, \quad (31)$$

тобто функціонал Φ є середньоквадратичним значенням корисного сигналу на виході системи. Якщо параметри z_i залежать не від усіх параметрів q_j (матриця b_{ij} в цьому випадку не буде мати оберненої), то в критерій (17) входять тільки коефіцієнти чутливості по параметрах q_j, що впливають на величини z_i, а частина вихідного сигналу, яка залежить від інших випадкових параметрів q_j, фактично належить до завади. При цьому критерій (17) максимізує тільки корисну (інформаційну) частину вихідного сигналу.

Таким чином, у статті досліджені основні критерії оптимізації вимірювальних сигналів засобів вимірювальної техніки (генераторів, калібраторів, контрольно-перевірочної апаратури тощо), що використовуються для визначення параметрів систем автоматичного управління. Обгрунтовано, що за наявності адитивної гаусівської завади достатньо великого рівня розглянуті критерії зводяться до єдиного. Цей критерій пропонується використовувати для знаходження параметрів оптимального вхідного вимірювального сигналу для контролю технічного стану систем автоматичного управління.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бесекерський, В. А. Теория систем автоматического регулирования [Текст] / В. А. Бесекерський, Е. П. Попов. – М. : Наука, 1972. – 768 с.

2. Смирнов, Н. Н. Обслуживание и ремонт авиационной техники по состоянию [Текст] / Н. Н. Смирнов, А. А. Ицкевич. – М. : Транспорт, 1987. – 272 с.
3. Техническая эксплуатация летательных аппаратов [Текст] : учеб. для вузов / Н. Н. Смирнов, Н. И. Владимиров, Ж. С. Черненко [и др.] ; под ред. Н. Н. Смирнова. – М. : Транспорт, 1990. – 423 с.
4. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике [Текст] / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М. : Наука, 1986. – 544 с.
5. Дмитриев, А. К. Основы теории построения и контроля сложных систем [Текст] / А. К. Дмитриев, П. А. Мальцев. – Л. : Энергоатомиздат, 1988. – 192 с.

Рецензент Д. П. Кучеров, д-р техн. наук, проф.
(Національний авіаційний університет)